材料力学

〔美〕S. 铁摩辛柯
J. 盖　尔　著

科 学 出 版 社

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

材料力学

〔美〕S. 铁摩辛柯 J. 盖尔 著

胡人礼 译

藏书

科学出版社

1978

内 容 简 介

本书内容丰富，论述系统，深入浅出，且有大量的例题和习题，是材料力学方面的重要著作。

本书内容包括：承受轴向载荷、扭转和弯曲的结构杆件之分析，以及材料力学的基本概念，例如应变能、应力和应变的变换、非弹性性能等等；还有工程人员所关心的专门课题，例如热效应、非棱柱形杆、梁的大挠度、非对称梁的弯曲、剪切中心和许多其他问题。在最末一章介绍了结构分析和能量法，可以作为读者研究现代结构理论之基础。

本书可供高等工业院校师生和有关工程技术人员参考。

S. Timoshenko J. Gere
MECHANICS OF MATERIALS
Van Nostrand Reinhold Company
1972

2095/07

材 料 力 学

〔美〕S. 铁摩辛柯 J. 盖尔 著
胡人礼 译

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街137号

北京印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1978年3月第一版 开本：787×1092 1/32
1978年3月第一次印刷 印张：21 3/8
插页：精 2
印数：精 1—52,050 字数：486,000
平 1—38,580

统一书号：13031·660
本社书号：959·13—2

定价：布脊精装本 2.35 元
平 装 本 1.95 元

译 者 序

本书系根据1972年所出版铁摩辛柯和盖尔合著名为«Mechanics of Materials»(材料力学)一书译出的. 它是铁摩辛柯的新著.

伟大领袖毛主席教导我们，要**"打倒奴隶思想，埋葬教条主义，认真学习外国的好经验，也一定研究外国的坏经验"**，这是我们对待国外科学技术所应持的根本态度. 早在1930年，铁摩辛柯出版过名为«Strength of Materials»一书，后来于1940年和1955年进行了再版. 1951年出版过中译本，亦译为«材料力学». 近一些年来，材料力学有了发展，在此新著中得到了反映. 本书共分十一章. 它具有内容丰富，编排系统以及阐述深入浅出等特点，既可供初学者阅读，也适于一般工程技术人员参考. 但是，同时我们也应看到，此书存在一些问题，譬如，在书后面的"参考文献和历史注释"中对于历史人物的评价，存在不正确的观点，这是我们阅读时应加以分析的.

本书采用英制单位. 为了便于读者参考，译者在书的末尾增加了英制单位与公制单位换算表.

本书的翻译和译稿的校核工作得到译者所在单位的领导及同志们的大力支持，特别是王恩惠和郑象铣两位同志对译稿作了全面的校核，谨在此表示感谢.

译 者

1976年

前　　言

希望有可能写出这样一本材料力学课本，它能满足初学这门课程的学生和要求一本可信任的参考书的工程技术人员之需要．著者的目标是满足这两方面的要求．我们已尝试借充分的讨论和解释例题，采取利于教学和便于学习的方式，来介绍它的理论和方法，以使学生能易于掌握其原理．然而，课文中往往超出了初等课程，而包括较为高等的课题和较为专门的问题．这样，无论对于从事设计还是从事研究的工程技术人员，也不管他是在既有基础上作进一步学习，都将发现这里有许多与其有益的附加材料．

从目录中，可以看出本书所涉及到的论题．这些论题包括承受轴向荷载、扭转和弯曲的结构杆件之分析，以及材料力学的基本概念，例如应变能、应力和应变的变换、非弹性性能等等．对于工程人员所关心的专门课题，包括有热效应、非棱柱形梁、梁的大挠度、非对称梁的弯曲、剪切中心以及许多其它问题．最后，在本书最末一章中，对结构分析和能量法进行了介绍，包括单位荷载法、互等定理、柔度法、刚度法、应变能定理、位能原理、瑞利-里兹法以及余能定理．该章可供读者作为研究现代结构理论之基础．

显然，本书中的材料多于学校正规课程中所要涉及的材料，从而，每一位教师有机会选择他认为是最基本的和最重要的材料．教师还可以挑选本书中几百个新的习题（总数超过了 600 个习题）作为课余练习或用于课堂讨论．

读者将立即看到在本书的后面收集了广泛的参考文献．

这些参考文献介绍了历史的发展和其主题的最初来源．此外，由于考虑读者对发展该主题的先驱们有很大的兴趣，我们还在参考文献中的许多地方列出了他们的传记注释．

如就书中包括现时所关心的题材为材料力学的全新介绍这一意义来说，本书是“新”的．但是，另一方面它又是“老”的，因为它是从众所周知的铁摩辛柯教授所著两卷名为«Strength of Materials»[1]的著作发展而来的．«Strength of Materials»一书最后修订于1955年和1956年，以第三版出版．其第二版出版于1940年和1941年，第一版出版于1930年．此外，第一版实际上是建于俄国出版的较早的几个版本甚至是早在1908年出版的版本基础之上的．著者期望通过本书连同稍晚将要出版的名为«Advanced Mechanics of Materials»(高等材料力学)一书，使上述一系列课本发展到最新水平．

S. 铁摩辛柯

J. 盖　尔

1971年7月，于斯坦福，加利福尼亚

1) 通常译作«材料力学»．——译者注

符 号 表

A	面积、作用力(力或力偶)、常数
a, b, c	尺寸、距离、常数
C	积分常数、形心
c	中性轴至梁外缘表面的距离
D	位移、动未知数
d	直径、尺寸、距离
E	弹性模量、第二类椭圆积分
E_r	折合弹性模量
e	偏心距、尺寸、距离
F	力、第一类椭圆积分、柔度系数
f	剪力流、塑性弯曲的形状系数
f_s	剪切形式系数
G	剪切弹性模量
g	重力加速度
H	距离、力、反力、马力
h	高度、尺寸
I	平面面积的惯性矩(或二次矩)
I_x, I_y, I_z	对 x, y 和 z 轴的惯性矩
I_1, I_2	主惯性矩
I_{xy}	平面面积对 x 轴和 y 轴的惯性积
J	极惯性矩、扭转常数
K	体积弹性模量、柱的有效长度系数
k	用于 $\sqrt{P/EI}$ 的符号

L	长度、跨度
M	弯矩、反力偶
M_p	梁的塑性弯矩
M_y	梁的屈服弯矩
N	轴向力
n	安全系数、数目、比率、整数、每分钟的转数
O	坐标原点
P	集中力、荷载、轴向力
P_{cr}	柱的临界荷载
P_u	极限荷载
P_w	资用荷载或容许荷载
P_y	屈服荷载
p	压力
Q	集中力、平面面积的一次矩(或静力矩)
q	分布荷载的强度(单位距离上的荷载)
q_u	极限荷载
q_y	屈服荷载
R	反力、半径
r	半径、距离、迴转半径($r=\sqrt{I/A}$)
S	力、梁的截面模量、剪切中心、刚度系数
s	距离、沿曲线的长度
T	温度、扭转力偶或扭矩
T_u	极限扭矩
T_y	屈服扭矩
t	厚度
U	应变能
u	单位体积的应变能
U★	余能

$u^\bigstar$	单位体积的余能
V	剪力、体积
v	挠度、速度
v', v'' 等	$dv/dx, d^2v/dx^2$ 等
W	重量、功
$W^\bigstar$	余功
X	静赘余力
x, y, z	直角坐标、距离
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	形心坐标
Z	梁的塑性模量
α	角、热膨胀系数、比率
α_s	剪切系数
β	角
γ	剪切应变、单位体积的重量
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	xy, yz 和 zx 平面内的剪切应变
γ_θ	对于斜轴的剪切应变
δ, Δ	挠度、位移、伸长量
ϵ	法向应变
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	顺 x, y 和 z 方向的法向应变
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	主法向应变
ϵ_y	屈服应变
ϵ_θ	对于斜轴的法向应变
θ	角、单位长度的扭转角、梁轴旋转角
θ_p	对主平面的角或对主轴的角
θ_s	对最大剪应力平面的角
κ	曲率($\kappa=1/\rho$)
κ_y	屈服曲率
λ	距离

ρ 半径、曲率半径、极坐标中的径向距离

ν 泊松比

σ 法向应力

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 与 x, y 和 z 轴相垂直平面上的法向应力

σ_θ 斜平面上的法向应力

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 主应力

σ_{cr} 柱的临界应力($\sigma_{cr}=P_{cr}/A$)

σ_r 残余应力

σ_u 极限应力

σ_w 资用应力或容许应力

σ_y 屈服应力

τ 剪应力

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 与 x, y 和 z 轴相垂直平面上平行于 y, z 和 x 轴的剪应力

τ_θ 斜平面上的剪应力

τ_u 极限剪应力

τ_w 资用剪应力或容许剪应力

τ_y 屈服剪应力

ϕ 角、扭转角

ψ 无量纲系数

ω 角速度

目　　录

符号表 ………………………………………………………… ix

第一章　拉伸、压缩和剪切 ………………………………… 1

1.1　引言 ………………………………………………… 1

1.2　应力和应变 ………………………………………… 2

1.3　拉伸试验 …………………………………………… 4

1.4　线性弹性和虎克定律 ……………………………… 8

1.5　承受轴向荷载的杆的变位 ………………………… 12

1.6　静不定结构 ………………………………………… 15

1.7　热效应和预应变效应 ……………………………… 24

1.8　非线性状态 ………………………………………… 27

1.9　剪应力和剪切应变 ………………………………… 32

1.10　应变能 …………………………………………… 35

习题 ………………………………………………… 43

第二章　应力和应变的分析 ………………………………… 55

2.1　斜平面上的应力 …………………………………… 55

2.2　双轴应力 …………………………………………… 59

2.3　纯剪 ………………………………………………… 64

2.4　双轴应力的莫尔圆 ………………………………… 67

2.5　平面应力 …………………………………………… 70

2.6　平面应力的莫尔圆 ………………………………… 76

2.7　三轴应力 …………………………………………… 79

2.8　平面应变 …………………………………………… 83

习题 ………………………………………………… 90

第三章　扭转 ……………………………………………… 95

3.1　圆杆的扭转 ………………………………………… 95

3.2 空心圆杆的扭转 …… 101
3.3 扭转应变能 …… 104
3.4 薄壁管 …… 106
3.5 圆杆的非弹性扭转 …… 112
习题 …… 115
第四章 剪力和弯矩 …… 121
4.1 梁的类型 …… 121
4.2 梁中的应力合力 …… 123
4.3 荷载、剪力和弯矩之间的关系 …… 127
4.4 剪力图和弯矩图 …… 130
习题 …… 138
第五章 梁中的应力 …… 146
5.1 梁中的法向应力 …… 146
5.2 梁的设计 …… 154
5.3 梁中的剪应力 …… 159
5.4 圆形横截面梁中的剪应力 …… 167
5.5 合成梁 …… 169
5.6 梁中的主应力 …… 172
5.7 非棱柱形梁中的应力 …… 176
5.8 组合梁 …… 184
5.9 弯曲和扭转的组合 …… 192
5.10 弯曲和轴向荷载的组合 …… 195
习题 …… 201
第六章 梁的挠度 …… 215
6.1 挠度曲线的微分方程 …… 215
6.2 简单梁 …… 219
6.3 悬臂梁 …… 224
6.4 力矩-面积法 …… 226
6.5 叠加法 …… 232
6.6 非棱柱形梁 …… 237

6.7 有限差分法 …… 241
6.8 弯曲应变能 …… 246
6.9 与挠度成比例的荷载 …… 250
6.10 热效应 …… 254
6.11 剪切变形的效应 …… 256
6.12 梁的大挠度 …… 264
习题 …… 269

第七章 静不定梁 …… 280
7.1 静不定梁 …… 280
7.2 挠度曲线的微分方程 …… 282
7.3 迭加法 …… 285
7.4 力矩-面积法 …… 295
7.5 有限差分法 …… 299
7.6 连续梁 …… 301
7.7 热效应 …… 309
7.8 梁端的水平位移 …… 311
习题 …… 314

第八章 非对称弯曲 …… 324
8.1 承受斜荷载的对称梁 …… 324
8.2 非对称梁的纯弯曲 …… 327
8.3 非对称梁由于横向荷载引起的弯曲 …… 333
8.4 薄壁开口横截面梁中的剪应力 …… 337
8.5 薄壁开口横截面的剪切中心 …… 344
8.6 绕非主轴弯曲的梁中剪应力 …… 351
习题 …… 358

第九章 非弹性弯曲 …… 366
9.1 引言 …… 366
9.2 非弹性弯曲方程 …… 367
9.3 塑性弯曲 …… 368
9.4 塑性铰 …… 377

9.5 梁的塑性分析 …… 379
9.6 挠度 …… 390
9.7 非弹性弯曲 …… 394
9.8 残余应力 …… 401
习题 …… 403
第十章 柱 …… 411
10.1 承受偏心轴向荷载的柱 …… 411
10.2 柱的临界荷载 …… 416
10.3 柱中的应力 …… 424
10.4 柱的正割公式 …… 427
10.5 柱的缺陷 …… 430
10.6 柱的设计公式 …… 433
习题 …… 436
第十一章 结构分析和能量法 …… 442
11.1 引言 …… 442
11.2 虚功原理 …… 443
11.3 用以计算位移的单位荷载法 …… 448
11.4 梁的剪切挠度 …… 466
11.5 互等定理 …… 472
11.6 柔度法 …… 480
11.7 刚度法 …… 495
11.8 应变能和余能 …… 510
11.9 应变能法 …… 520
11.10 势能法 …… 531
11.11 瑞利-里兹法 …… 535
11.12 余能原理 …… 548
11.13 力法 …… 556
11.14 卡斯提里阿诺第二定理 …… 560
11.15 应变能和柔度法 …… 563
11.16 结构分析的其它方法 …… 565

习题 …… 566
参考文献和历史注释 …… 583
附录A 平面面积的特性 …… 603
A.1 面积的形心 …… 603
A.2 组合面积的形心 …… 606
A.3 面积的惯性矩 …… 608
A.4 极惯性矩 …… 610
A.5 平行轴定理 …… 613
A.6 惯性积 …… 614
A.7 轴的旋转 …… 617
A.8 主轴 …… 619
习题 …… 621
附录B 平面面积的特性 …… 626
附录C 几种结构型钢的特性 …… 629
附录D 梁的挠度和斜度 …… 636
习题答案 …… 642
英制-公制单位换算 …… 666

第一章　拉伸、压缩和剪切

1.1　引言

材料力学是应用力学的一个分支，它讨论固体在承受各种荷载时的性能。它是以“材料强度”和“变形体力学”等不同名称为人们所熟知的研究领域。本书中所讨论的固体，包括承受轴向荷载的杆、轴、梁和柱，以及由这些部件装配成的结构。通常，我们分析的目的是要确定由于荷载所产生的应力、应变和变形；如果对于在破坏荷载之前所有荷载下的这些量都能求得，那么我们将得到物体的力学性能的完整概念。

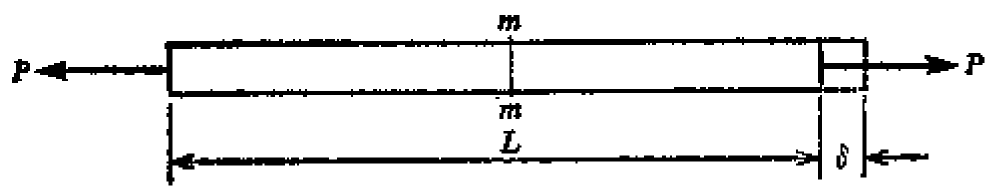
理论分析和试验结果在材料力学研究中具有同等重要的地位。在很多情况下，我们采取逻辑推导得到预示力学性能的公式和方程，但是，同时我们必须承认这些公式不能实际应用，除非材料的某些性质为已知。只有在实验室里做了相适应的试验之后，我们才能得到这些性质。另外，工程中的许多重要问题不能借理论手段有效地去处理，而试验测定方法却成为实用所必需的东西。材料力学的历史发展是理论和试验二者最好的融合。在有些情况下试验得出对结果有用的方法，而在另一些情况下则理论得出对结果有用的方法。象达·芬奇(Leonardo da Vinci, 1452—1519)和伽利略(Galilei Galileo, 1564—1642)这些著名人物虽然他们没有提出充分的理论(按今天的标准来看)去解释他们的试验结果，但是他们用试验确定了金属线、杆和梁的强度。反之，著名数学家欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)在有试验验证表明他的结果的重要意义之前很久，他就于1744年提出了柱的数学理论

并计算了柱的临界荷载．欧拉的理论成果今天已成为柱的理论基础，虽然它们在很多年内一直没有被应用[1]．

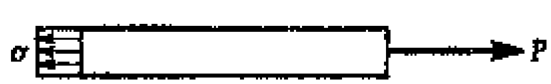
在我们进行本课程学习之后，将明显看出理论推导与试验确定的材料性质相结合的重要性．本章中我们将从讨论某些基本概念着手，例如先讨论应力和应变，然后，我们研究承受拉伸、压缩和剪切的简单结构部件的性能．

1.2 应力和应变

应力和应变的概念可藉讨论棱柱形杆的拉伸这一基本方法（见图 1-1 a）来阐述．棱柱形杆是沿其整个长度上具有等截面和直线轴线的杆件．在这里的阐述中，假设杆的两端作用有使杆产生均匀伸长或拉伸的轴向力 P．我们可藉与杆轴线成正交的人为切面（截面 mm），将杆件分离出一部分作为自由体(图 1-1 b)．在其右边端头处，作用有拉力 P，面另一端存在表示杆件移去部分对留下部分所作用的力．这些力沿整个横截面连续分布，类似于浸没面上液体静压力的连续分布．该力的强度，亦即单位面积上的力，称为应力，通常用希腊字母 σ 来表示．假设应力在整个横截面上均匀分布，我们可容



(a)



(b)

图 1-1 棱柱形杆受拉

1) 从达·芬奇和伽利略开始的材料力学史，可参见参考文献 1-1，1-2 和 1-3．

易地看出其合力等于强度 σ 乘以杆的横截面积 A. 此外，根据图 1-1 b 所示物体的平衡，我们还可以看出此合力必定与力 P 的大小相等而方向相反. 因此，我们得到

$$\sigma=\frac{P}{A} \tag{1-1}$$

此为棱柱形杆中均匀应力的方程. 该方程说明应力的单位为力的单位除以面积的单位，例如磅/平方吋或千磅/平方吋. 如图所示，当杆被力 P 拉伸时，所产生的应力为拉应力；如果力反转其方向，使杆压缩，那么所产生的应力则称为压应力. 方程（1-1）能够成立的必要条件是：应力 σ 在杆的整个横截面上必须是均匀的. 如果轴向力 P 通过横截面的形心，那么此条件是存在的，这点可借静力学来证明（见习题 1.2-1）. 当荷载 P 不作用于形心处时，杆将产生弯曲，需要作较复杂的分析（见第 5.10 节）. 但是本书自始至终假设所有轴向力均作用于横截面的形心处，除非特殊说明不同情况. 同样，除非另有说明，一般均假设物体自身重量忽略不计，在讨论图 1-1 中的杆件时就是这样假定的.

承受轴向力的杆件的总伸长量，用希腊字母 δ 来表示（见图 1-1 a）. 单位长度的伸长量，或应变，用下列方程来确定：

$$\epsilon=\frac{\delta}{L} \tag{1-2}$$

式中 L 为杆的总长度. 注意，应变 ϵ 为一无量纲的量. 只要应变沿整个杆长是均匀的，就可按方程(1-2)得到其精确值. 如果杆件受拉，其应变则为拉伸应变，它表示材料伸长或拉伸；如果杆件受压，那么其应变为压缩应变，这就意味着杆件的相邻横截面彼此移近.

1.3 拉伸试验

特定材料中的应力与应变关系借拉伸试验方法来确定.材料的试件,通常采取圆杆形式,将它放到拉伸机上承受拉力.随着荷载增加,测量杆上的力和杆的拉伸量.其应力借横截面积去除力来求得,应变借发生伸长的长度去除伸长量来求得.按这样的方式可得到材料的完整的应力-应变图.

结构钢的应力-应变图的典型形状示于图1-2a中,图中在水平轴上绘出轴向应变,藉$OABCDE$曲线的纵坐标定出其相应应力.从O至A,应力与应变成正比,其图形为线性的.过了A点以后,应力与应变的线性关系不再存在;因此,A点处的应力称为比例极限.对于低碳(结构)钢,此极限通常在30,000磅/平方吋至36,000磅/平方吋之间,但对于高强度钢,它可以大很多.当荷载再增加时,应变的增大比应力的增大要快得多.直到B点,拉力没有明显的增加,却开始发生相当大的伸长量.这种现象称为材料的屈服.B点的应力称为屈服点或屈服应力.在BC范围内,认为材料成了塑性的,杆件实际上是塑性地伸长,其

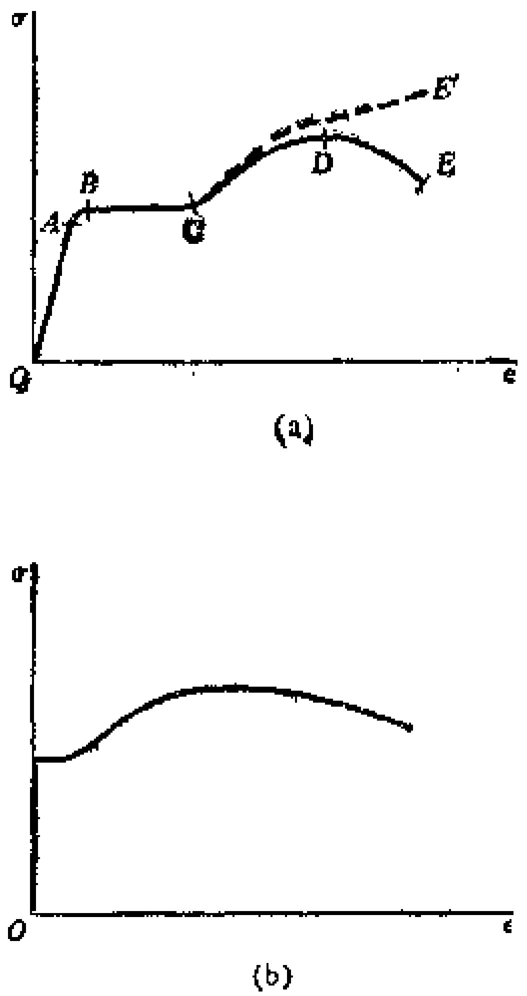


图 1-2 结构钢的典型应力-应变曲线:(a) 示意图(未按比例);(b) 按比例图

伸长量将等于比例极限时所产生伸长量的10倍或15倍。C点处，材料开始应变硬化，对于荷载增加呈现出附加抗力。于是，随着伸长量增加，应力增大，而于D点处达到其最大值，或称为极限应力。超过这点之后，杆件继续伸长，而荷载却随着减小，最后于图上E点处试件发生断裂。

杆件在伸长期间，发生侧向收缩，以致杆件的横截面积减小。这种现象在到达C点之前对应力-应变图没有影响，但过了该点之后，面积的减小对于应力的计算值却有显著的影响。杆件发生显著的颈缩（见图1-3），如果用此颈缩处狭窄部分的实际横截面积来计算σ，将会发现准确的应力-应变曲线按

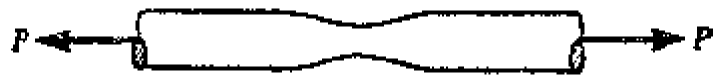


图 1-3 杆受拉时的颈缩

虚线CE'形成。然而，在极限应力之后，杆件能承受的总荷载确实减小（DE线）。这种减小是由于面积的缩小，而不是因材料自身强度的损失。直到破坏点之前，材料实际上一直经得起应力增加。然而，在大多数实际应用中来说，根据试件原来横截面积所得的常规应力-应变曲线$OABCDE$对于设计已可提供满意的数据。

图1-2a中所绘的图形表示钢的应力-应变曲线的一般特征，但其比例不是真实的，因为正如已经提到的那样，从B至C所发生的应变可以达到从O至A所发生应变的15倍之巨。并且，从C至E的应变还要更大于从B至C的应变。用适当比例绘制的图形示于图1-2b中。该图从O点至A点的应变与从A至E的应变相比，前者将小到看不出来，图中的直线部分呈现为一竖直线。

在显著的屈服点出现之后，继之有很大的塑性应变，这可以说是钢所独有的情况，而钢在今天是最普通的结构金属。铝合金呈现从直线区向非直线区逐渐过渡的现象，如图 1-4 中所示的应力-应变图形。钢和许多铝的合金在破坏之前都将经历很大的应变，所以将它们划属于延性材料。反之，脆性材料在相当低的应变值时就遭到破坏（见图 1-5），例如陶土、铸铁、混凝土、某些金属的合金以及玻璃。

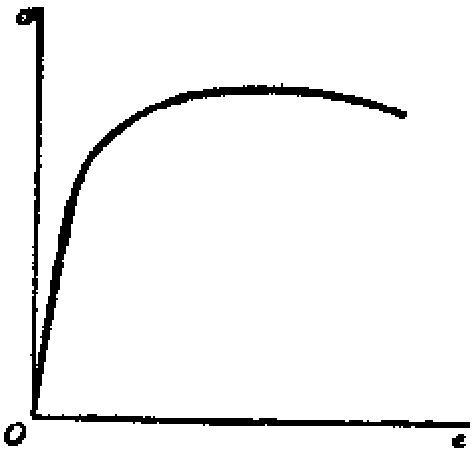


图 1-4 结构铝合金的典型应力-应变曲线

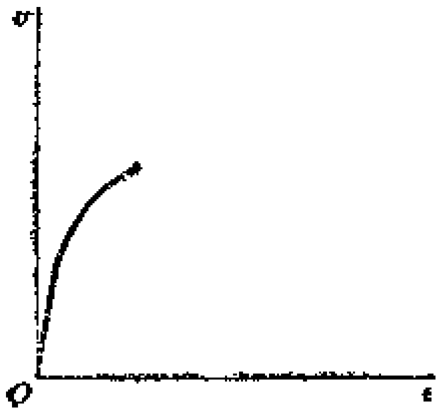


图 1-5 脆性材料的典型应力-应变曲线

也可以得到各种材料压缩时与受拉相类似的图形，并可确定其比例极限、屈服点和极限应力等这些特征应力。对于钢，已发现其比例极限和屈服应力在拉伸和压缩时是大致相同的。自然，对于许多脆性材料，压缩的特征应力要比拉伸时大得多[1]。

弹性 图 1-2，1-4 和 1-5 所示的应力-应变图说明了不同材料受拉加载时的性能。当材料的试件卸载时，亦即荷载逐渐减小到零时，加载中所产生的伸长量的一部分或者全

1) 应力-应变图为 Jacob Bernoulli (1654—1705) 和 J. V. Poncelet (1788—1867)所创始，见参考文献 1-4.

部将消失掉. 卸载中恢复其原来状态的这种材料性能称为弹性. 如果杆件完全恢复其原状,就叫做是完全弹性的;如果它仅部分回到其原状,则是部分弹性的. 在后一种情况中,荷载移去后杆中余留下来的伸长量称为永久变形.

当进行材料拉伸试验时, 荷载可(少量地)加大到某些选定值,然后移去. 如果没有永久变形,亦即杆中的应变恢复为零,那么在用小于此选定荷载值的应力时,材料是弹性的. 这种加载和卸载的过程可逐次地用较高的荷载值重复地进行. 最后, 应力达到不能使全部应变在卸载后恢复为零的地步. 用这种方式可以确定表示弹性范围的上限应力; 这一应力称为弹性极限. 对于钢和许多其它金属, 其弹性极限和比例极限几乎是一致的. 然而,对于橡胶之类的材料,其弹性性能可以延续,远远超过其比例极限.

容许应力　在结构设计中,需要保证在工作条件下,结构足以起到建造它所应有的作用. 从结构承受荷载的能力这一观点出发,结构中的最大应力通常应保持低于其比例极限,因为只有这样当荷载作用后又移去时才没有永久变形. 考虑到结构有偶然超载和建造中可能的误差以及结构分析中可能存在未可知的变量, 一般通过选择低于比例极限的容许应力(或说资用应力)来提供安全系数. 例如, 在钢结构设计中, 对屈服点为 33,000 磅/平方吋的钢通常采用容许应力为 20,000 磅/平方吋. 这样,避免屈服的安全系数为 1.65. 有些其它情况, 则对极限应力采取适当的安全系数来确定其资用应力. 这往往用于象混凝土之类的脆性材料和木材之类的材料中. 一般来说,当根据容许应力进行设计时,下列两个方程之一可用来求其资用应力 σ_w:

$$\sigma_w=\frac{\sigma_y}{n_1} \qquad 或 \qquad \sigma_w=\frac{\sigma_u}{n_2} \qquad (1\text{-}3)$$

式中 σ_y 和 σ_u 分别代表屈服点和极限应力，n_1 和 n_2 为安全系数。合理的安全系数之确定，是一件复杂的事，因为它与使用的材料类型有关，还与结构的工作条件有关。当荷载是动态者（或突然作用，或大小是变化着的），例如出现在机器部件、飞机和桥梁上的荷载，就需要比承受静荷载的结构具有较大的安全系数，因为有疲劳破坏的可能性。

对应于应用容许应力的另一种方法是：设计结构时采用一个避免完全毁坏的安全系数。首先必须确定引起结构毁坏的荷载（或诸荷载）的大小，然后借适当选择的**荷载系数**去除极限荷载来确定其容许荷载（或说资用荷载）。这种设计方法称为**极限荷载设计**。可以看出，在这种情况下，结构中实际应力的大小在确定其资用荷载时没有起直接的作用。在金属结构设计中，资用应力法和极限荷载法都是常用的。对于某些简单结构，其极限荷载的确定将放在后面第 1.8 节和第 9.5 节中讨论。

1.4 线性弹性和虎克定律

大多数结构材料的应力-应变曲线具有这样一种初始区段，在此区段上材料性能呈现既是弹性的又是线性的。在钢的应力-应变图上，从 O 至 A 的区段（见图 1-2 a）就是一例，其它例子如图 1-4 和 1-5 中曲线上低于比例极限的区段。当材料表现为弹性且应力和应变之间呈现线性关系时，就称为**线性弹性**的。这是包括大多数金属、塑料、木材、混凝土和陶土等许多固体材料的极为重要的性质。

当杆件受拉时，应力和应变之间的线性关系可藉简单的方程来表达：

$$\sigma = E\epsilon \tag{1-4}$$

式中 E 为一比例常数，称为材料的**弹性模量**。弹性模量可视

为线性弹性范围内应力-应变图的斜率，对于不同的材料，它是不相同的．某些 E 的代表值列于表 1-1 中(注意 E 具有与应力相同的单位)．对于大多数材料，其压缩弹性模量与拉伸时是相同的．计算中，拉应力和拉伸应变通常考虑为正，而压应力和压缩应变则为负．在英国科学家托马斯·杨 (Thomas Young, 1773—1829)之后弹性模量有时称为**杨氏模量**，杨氏曾研究了杆的弹性性能(参考文献 1-5 和 1-6)．由于另一位英国科学家罗伯特·虎克(Robert Hooke, 1635—1703) 的研究工作，方程(1-4)通常称为**虎克定律**，虎克首先通过实验建立了荷载和伸长量之间的线性关系(参考文献 1-7 和 1-8)．

当杆仅承受拉力时(见图 1-1 a)，其轴向应力为 $\sigma=\dfrac{P}{A}$，轴向应变为 $\epsilon=\delta/L$，如前面方程(1-1)和(1-2) 所给．用虎

表 1-1　有代表性的材料的力学性能*

材　料	密　度 (磅/吋^3)	弹性模量 E (磅/吋^2)	弹性剪切模量 G (磅/吋^2)	屈服应力 σ_y (磅/吋^2)	极限应力 σ_u (磅/吋^2)
铝	0.097	10×10^6	4×10^6	20×10^3	30×10^3
铝合金	0.1—0.3	10×10^6	4×10^6	$15\text{-}50\times10^3$	$20\text{-}60\times10^3$
黄铜	0.3	14×10^6	5.5×10^6	$15\text{-}60\times10^3$	$40\text{-}75\times10^3$
青铜	0.3	14×10^6	5.5×10^6	$10\text{-}55\times10^3$	$30\text{-}60\times10^3$
混凝土(压缩)	0.085	$2—4\times10^6$			$2\text{-}10\times10^3$
铜	0.32	15×10^6	6×10^6	$10\text{-}45\times10^3$	$30\text{-}60\times10^3$
铸铁	0.28	15×10^6	6×10^6	$6\text{-}40\times10^3$	$16\text{-}60\times10^3$
镁	0.064	6×10^6	2.4×10^6	$12\text{-}18\times10^3$	$20\text{-}30\times10^3$
软钢	0.283	$29\text{-}30\times10^6$	$11\text{-}12\times10^6$	$30\text{-}60\times10^3$	$50\text{-}100\times10^3$
高强度钢	0.283	$29\text{-}30\times10^6$	$11\text{-}12\times10^6$	$50\text{-}160\times10^3$	$100\text{-}280\times10^3$
钨	0.68	50×10^6	20×10^6		600×10^3
建筑木材(压缩)	0.01—0.03	$1\text{-}2\times10^6$			$4\text{-}10\times10^3$

* 这些性能中有许多依其成分、热处理、冷加工等因素而有很大变化．除说明者外，表中所示均属于拉伸的性能．

克定律($\sigma=E\epsilon$)将这些结果结合起来得出杆件伸长量的下列方程：

$$\delta=\frac{PL}{EA} \tag{1-5}$$

此方程说明，线性弹性杆的伸长量与荷载和长度成正比，而与弹性模量和横截面积成反比．乘积 EA 称为杆的**轴向刚度**．

图 1-1 a 所示杆件的**柔度**定义为由于单位荷载值所引起的变位，因此，我们从方程(1-5)看出柔度为 L/EA．用类似的方式，杆件的**刚度**定义为产生单位变位所需要的力；因而，其刚度等于 EA/L，是为柔度的倒数．柔度和刚度在分析各种结构时具有重要的作用，如后面第十一章所述．

泊松比　当杆受到拉伸时，杆在轴向伸长的同时还产生侧向收缩，亦即当杆的长度增长时，其宽度变小．在弹性范围内，侧向应变与纵向应变之比值为一常数，此常数称为**泊松比** ν，于是

$$\nu=-\frac{\text{侧向应变}}{\text{轴向应变}} \tag{1-6}$$

此常数是以著名法国数学家 S. D. 泊松(S. D. Poisson, 1781—1840) 命名的，他曾致力于采用材料分子学说计算这个比值(参考文献 1-9)．对于各个方向具有相同弹性性能的材料，称为**各向同性**材料，泊松发现其 $\nu=0.25$．金属的实际试验指出，ν 通常位于 0.25 至 0.35 范围内．

如果材料的泊松比和其弹性模量已知，杆件受拉时体积的变化就可以计算出来．图 1-6 表示从受拉杆中切出的微小材料单元的体积变化．该单元的原来形状为一立方体 $abcd$ $efgh$，假设它的诸边均为单位长度．图中，应力 σ 指出了轴向力的方向．单元立方体顺荷载方向的伸长量为 ϵ（等于 σ/E），立方体沿两个侧向边长的缩短量为 $\nu\epsilon$．因此，立方体的横

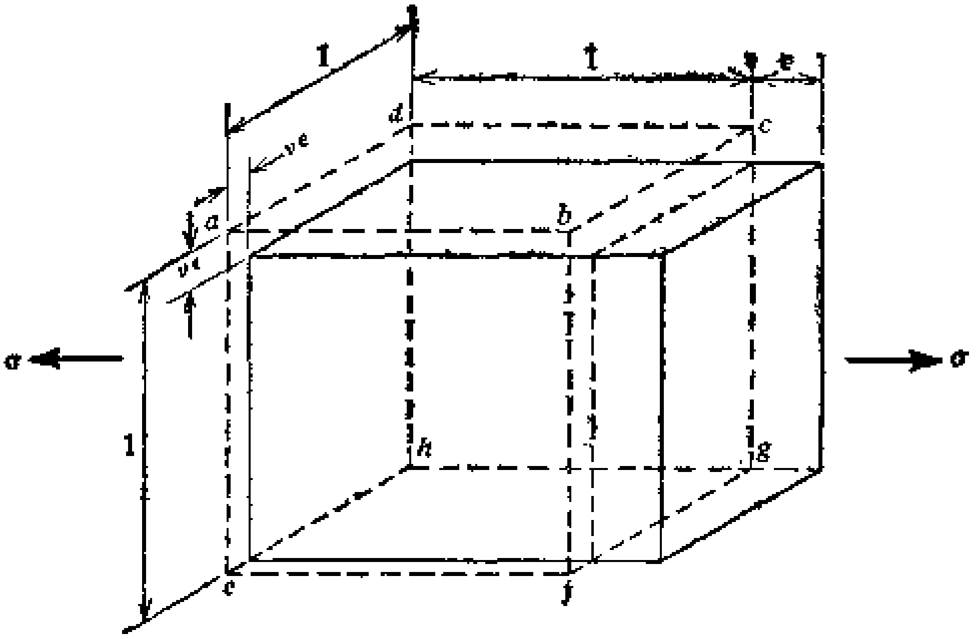


图 1-6 单位立方体受拉时的体积变化

截面积按比值$(1-\nu\epsilon)^2$:1 缩小，而其体积按比值 $(1+\epsilon)(1-\nu\epsilon)^2$:1 增大。当将这后一比值中左边乘积展开，如果舍弃那些包括 ϵ 的平方和立方的诸项（这些项是非常小的量），那么此比值简化为$(1+\epsilon-2\nu\epsilon)$:1。立方体体积的变化等于最终体积减去原来体积，即 $\epsilon(1-2\nu)$。此量称为单位体积的变化，我们可将它表达如下：

$$\frac{\Delta V}{V}=\epsilon(1-2\nu) \tag{1-7}$$

在此方程中，$\frac{\Delta V}{V}$代表体积的变化 ΔV 与原来体积 V 之比。当已知轴向应变 ϵ 和泊松比 ν 时，此方程可用于计算承受拉力的杆的体积变化。

因为受到拉伸时任何一种材料减小其体积看来都是不合理的，所以我们根据方程(1-7)可以得出结论认为 ν 必须总是小于 0.5。橡胶和石蜡是两种受拉时体积几乎无变化的材料，因此对于这些材料，其 ν 接近于极限值 0.5。反之，软木是 ν 值几乎等于零的材料，而混凝土的 ν 大约为 0.1。

上面关于拉伸中发生侧向收缩的讨论，也可用于讨论压缩的情况，只是纵向的压缩带来侧向膨胀。就实用来说，ν 的数值不论材料受拉还是受压是相同的。

1.5 承受轴向荷载的杆的变位

各种涉及承受轴向荷载的杆的情况，均可用方程(1-5)求出其变位。例如，不仅是两端，而且在中间也承受轴向力的杆，如图 1-7 所示的例子，其变位是容易确定的。确定图 1-7 中所示杆的变位的程序是：首先求得该杆每一部分上的轴向力，亦即求出 AB，BC 和 CD 部分上的荷载，接着分别计算这每一部分的伸长量(或缩短量)。然后将这些长度的变化按代数相加即得整个杆的长度之总变化值。同样的方法可用于如图 1-8 所示由不同横截面积的部分所组成的杆上。因此，我们看出，一般来说，对于由几种不同轴向力或不同横截面积部分组成的杆件，其总伸长量 δ 可按下列方程求得：

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \tag{1-8}$$

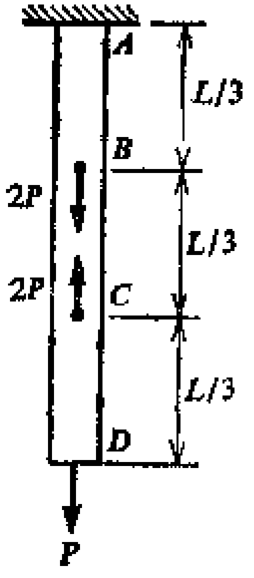


图 1-7 承受中间轴向载荷的杆

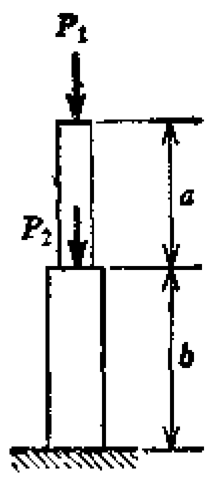


图 1-8 横截面改变的杆

式中的下脚 i 是区别杆件各个部分的编号，而 n 为所划分部分的总个数。

当轴向力或横截面积沿杆轴线连续变化时，方程(1-8)就不再适用了。而是藉分析杆件的微分单元得出其伸长量的表达式，然后对杆的整个长度进行积分，便可求出该杆的伸长量。这种概念说明于图 1-9 中。图中假设锥形杆承受使杆内产生变化着轴向力的轴向连续分布荷载。距杆左端 x 处切出长度为 dx 的单元。作用于该单元上的轴向力 P_x 和该单元的横截面积 A_x 均必须表达为 x 的函数。于是该单元的伸长量的方程为：

$$d\delta=\frac{P_x dx}{EA_x}$$

杆的总伸长量则为

$$\delta=\int^{L} d\delta=\int_{0}^{L}\frac{P_x dx}{EA_x} \tag{1-9}$$

当方程 (1-9) 中积分符号内的表达式不容易按闭型积分时，可采用数值法求算积分。另外，对于锥形杆，只要杆的两侧边间夹角很微小，就可从方程 (1.9) 得出准确的结果。作为特殊例子，我们可看到：如果其侧边的夹角为 20°，那么计算的法向应力 $\sigma=P/A$ 的最大误差仅为百分之三。当夹角还要小时，误差就更小。如果杆的锥度很大时，则需要采用较精确的分析方法(见参考文献 1-10)。

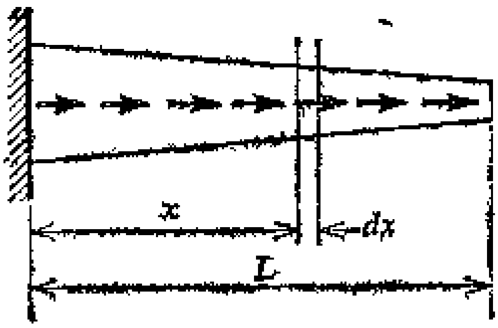


图 1-9 具有变化横截面积且承受变化轴向载荷的杆

桁架的挠度　对于铰接简单桁架，如果它的每一杆件的长度变化为已知,那么桁架节点的挠度可藉几何学来确定。自然，该桁架中每一杆件的长度变化可按已经叙述过的方法来求出。为了说明求桁架挠度的几何法,让我们确定图 1-10 a 所示桁架中节点 B 的位移。桁架中两根杆件的力 F_{ab} 和 F_{bc} 为:

$$F_{ab}=P\cot\theta \qquad F_{bc}=P\csc\theta$$

式中 F_{ab} 为拉力,而 F_{bc} 为压力。杆的长度变化为:

$$\delta_{ab}=\frac{PL_{ab}\cot\theta}{EA_{ab}} \qquad \delta_{bc}=\frac{PL_{bc}\csc\theta}{EA_{bc}}$$

为了确定节点 B 的位移,我们首先假定 AB 杆伸长量为 δ_{ab}(见图 1-10 b),因而其端点位于位置 B_1 处。然后以 A 为中心,以距离 AB_1 为半径作一圆弧。由于 B 点的位移非常小,该圆弧可用通过 B_1 而垂直于 AB 杆轴的直线来代替。类似地,假设 BC 杆缩短量为 δ_{bc}，使其端头移至 B_2 点处。然后以 C 为圆心,取距离 CB_2 为半径作另一圆弧。此圆弧用垂直 BC 而通过 B_2 点的直线来代替。此二垂直线相交于 B' 点处，该点即为 B 点的最终位置。因此,自 B 至 B' 的向量表示桁架节点 B 的位移 δ_b。

对图 1-10 b 的位移图解采用较大比例尺绘于图 1-10 c 中，以帮助进行计算。从该图中我们看出：δ_b 的水平分量为 δ_{ab}，而其竖向分量由两部分（B_1B_3 和 B_3B'）所组成。距离 B_1B_3 与距离 BB_4 相同，等于 $\delta_{bc}\sin\theta$。距离 B_3B' 可根据三角形 B_2B_3B' 求出,三角形的 B_2B_3 边等于 $\delta_{bc}\cos\theta+\delta_{ab}$。用这种方式进行，我们找出 δ_b 的竖直分量为:

$$B_1B'=\delta_{bc}\sin\theta+(\delta_{bc}\cos\theta+\delta_{ab})\cot\theta$$
$$=\delta_{bc}\csc\theta+\delta_{ab}\cot\theta$$

求出节点 B 的位移水平分量和竖直分量后，现在我们可以没有困难地求出其合成位移 δ_b。

图 1-10 c 所示的这种位移图解是计算桁架位移的重要辅助手段。这种图解称为**威里沃特图解**，因为它是由法国工程师 J. V. 威里沃特(J. V. Williot)于 1877 年首先提出来的（参考文献 1-11)。分析法对于寻求桁架的挠度也是有用的，其中一种很有力的方法称为单位荷载法,将在后面第 11.3 节中来叙述。

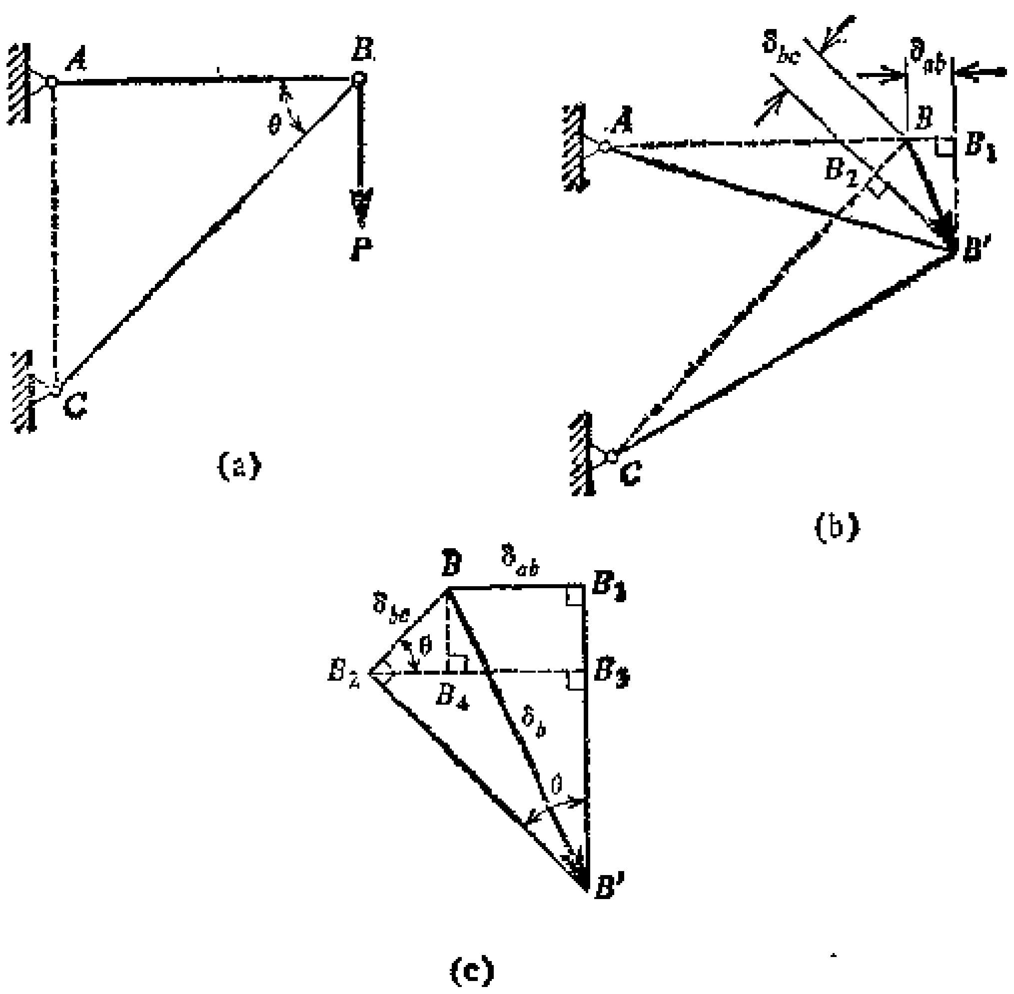


图 1-10 用威里沃特图解求桁架的挠度

1.6 静不定结构

上面整个讨论都是假设结构内诸杆的轴向力可用静力学来确定．这样的结构说成是静定结构．然而，有另外一种情况，其静力平衡方程不足以确定全部杆力和反力．对于这样的静不定结构，其杆力和反力只有考虑了结构的位移才能求出来．

图 1-11 a 表示静不定结构的一个简单例子．杆 AB 的两端为刚性支承，由于中间 C 点处的力 P 作用成为轴向受

力．该杆的端头将存在反力 R_a 和 R_b，但是这些反力不能仅用静力学去求得[1]．该杆的唯一静力平衡方程为：

$$R_a + R_b = P \tag{a}$$

式中含有两个未知反力，因此不能满足它们的计算，而必须根据杆的变位来出第二个方程．

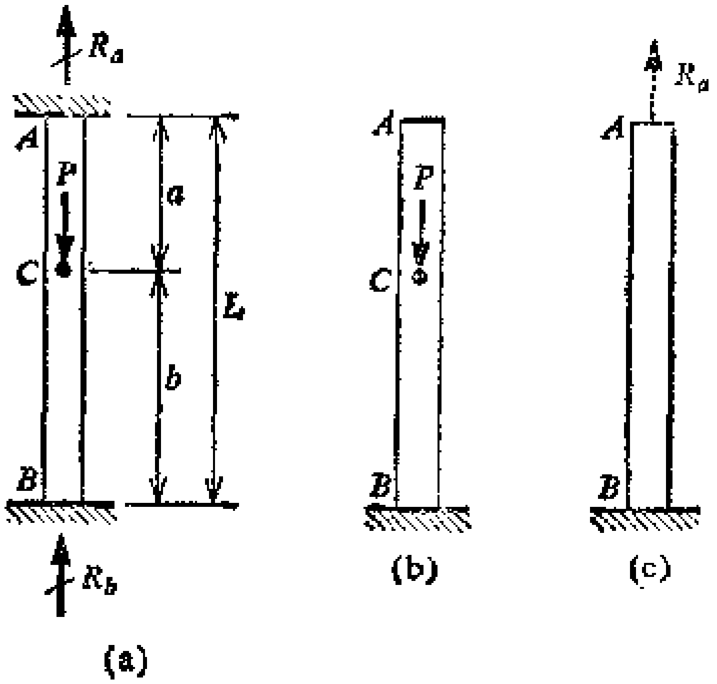


图 1-11　静不定杆（用力法分析）

为了得到求解静不定问题所需要的附加方程，有两种通用的方法可以利用．我们将用图 1-11 a 所示的杆件来说明这两种方法．在应用第一种方法时，我们从选择反力之一作为未知量来开始．在本例中，让我们选用 R_a．如果此量可以求出，那么另一反力 R_b 就可藉静力学来求得（见方程 a）．未知量 R_a 称为**静赘余力**，因为如果将它象图 1-11 b 中所示那样移去，结构便成为静定而又稳定者．因此，从构造观

1）为了使反力与结构上的荷载相区别，通常用一贯穿箭头的截线或斜线来表示反力，如图 1-11 a 所示．

点来看，作为能支承荷载的结构，其 A 端的反力是不需要的，也就是它是多余的．放松赘余力之后的结构称为**放松结构**，或**基本结构**．

现在，让我们考虑荷载 P 对于放松结构中 A 点位移的影响（图 1-11 b）．此位移等于

$$\delta_P=\frac{Pb}{EA}$$

其方向向下．其次，让我们考虑赘余力 R_a 对于 A 点位移的影响（图 1-11 c）．注意，现在 R_a 是看作作用于放松结构上的荷载．A 点由于 R_a 产生的位移向上，其值为：

$$\delta_R=\frac{R_aL}{EA}$$

由于 P 和 R_a 同时作用时 A 点的最终位移 δ 应由 δ_P 与 δ_R 组合而得．因此，取向下的位移为正值，我们得

$$\delta=\delta_P-\delta_R$$

由于 A 点的实际位移等于零，上述方程变为

$$\delta_R=\delta_P \tag{b}$$

或

$$\frac{R_aL}{EA}=\frac{Pb}{EA} \tag{c}$$

从它得到

$$R_a=\frac{Pb}{L} \tag{d}$$

从此方程知道 R_a 后，我们可根据静力学方程（方程 a）求出 R_b

$$R_b=\frac{Pa}{L}$$

这样杆的两个反力就都求出来了．

用于分析静不定杆的上述方法可总结如下．将未知反力之一选为赘余力，然后藉切断杆件并移去支承使结构放松

(该放松后的结构是静定且稳定者). 再将实际荷载 P 和赘余力作用到放松结构上去. 计算出由于这两种力所引起的位移，并代人位移协调方程(方程 b). 此协调方程表达有关位移的条件，也就是在本例中位移 δ 等于零. 将力所表示的位移的表达式代人协调方程 (方程 c)后，我们可以求解未知力(方程 d). 最后，剩下的未知力藉静力学求得.

这种以力作为未知量的分析方法，通常称为力法. 它还称为柔度法，因为在协调方程中(方程 c)，未知量(R_a) 的系数(L/EA)是柔度. 这种方法比这里所阐述的要广泛得多，它可用于具有许多赘余力的结构，这将在下面章节中进行介绍. 然而，本节仅讨论很简单的、具有一个赘余力的静不定体系.

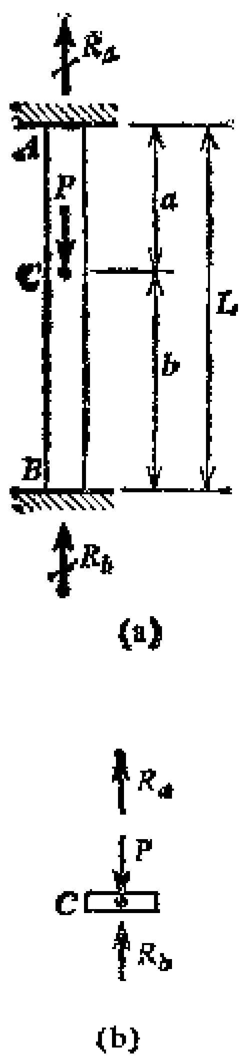


图 1-12 静不定杆(用位移法分析)

现在让我们转到第二种一般分析方法，用它求解同一个例题 (见图 1-12 a). 在应用这第二种方法中，我们取杆的两部分接头处 C 点的位移 δ_c 作为未知量. 该杆顶上和底面处的力 R_a 和 R_b 可用 δ_c 表达如下：

$$R_a=\frac{EA}{a}\delta_c \qquad R_b=\frac{EA}{b}\delta_c \qquad \text{(e)}$$

在写这两方程时，我们假设 δ_c 向下为正. 因而杆的上部产生拉伸，而下部产生压缩.

第二步是从杆中将 C 点取出作为自由体 (图 1-12 b)，考虑它的平衡. 作用于自由体上有向下的荷载 P、作用于上部的拉力 R_a 和作用于下部的压力 R_b.

根据静力学，我们得出

$$R_a+R_b=P \tag{f}$$

或

$$\frac{EA}{a}\delta_c+\frac{EA}{b}\delta_c=P \tag{g}$$

从它得到

$$\delta_c=\frac{Pab}{EAL} \tag{h}$$

知道 δ_c 后，我们现在可以从方程(e)求出 R_a 和 R_b：

$$R_a=\frac{Pb}{L} \qquad R_b=\frac{Pa}{L}$$

自然，这些结果与前面所得的相同。

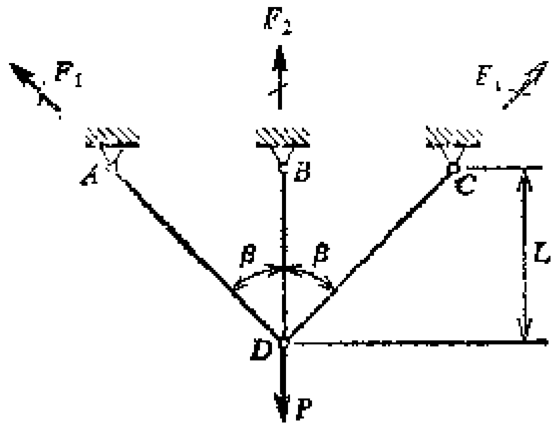
归纳起来，第二种分析方法以取适当的位移作为未知量来开始．此位移必须按这样的方式来选择，就是要使得结构每一部分内的力都可用它来表达．然后将这些力组成平衡方程(方程 f)．当用位移所表示的力的表达式代入后(方程 g)，我们可求解未知的位移(方程 h)．最后，可根据位移求得诸力．

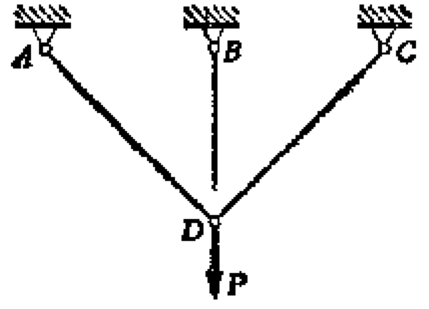
这种分析方法称为**位移法**或**刚度法**，其前一命名是来自以位移作为未知数的缘故，后一命名是因平衡方程（方程 g）中的系数(EA/a 和 EA/b)均为刚度而得．这种方法也是很通用的一种方法，它可用于许多结构的分析．

对于很大的结构，力法和位移法的选择取决于许多因素，例如结构的几何形状和节点的数目．然而，本节将仅讨论一种方法和另一种方法都满意的问题，因此，对于它们之间的选择是有点随意的．后面在第七章和第十一章中我们还将再讨论静不定结构的分析[1)]．

---

1) 从历史的观点来看，欧拉首先于 1774 年分析静不定体系。他讨论了有关支承于弹性基础上有四条腿的刚性桌子的问题(参考文献 1-12)。而第二步工作是由纳维埃(Navier)进行的，他于 1825 年指出静不定反力可借考虑结构的弹性来求得(参考文献 1-14)。纳维埃求解了类似图 1-14 所示的桁架。





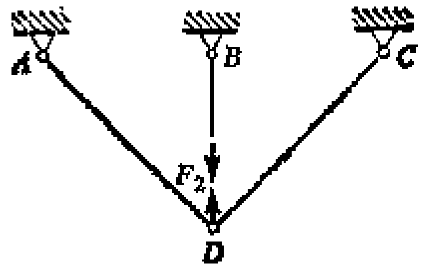


图 1-13 例题 1.静不定桁架（用力法分析）

例题 1 让我们用力法分析图 1-13 a 中的平面桁架，作为第一个例子. 假设该桁架是对称的，我们可以看出外面两根杆的拉力是相等的. 因此，根据诸力在竖直方向的平衡，我们得出

$$2F_1\cos\beta+F_2=P \tag{i}$$

此方程包括两个未知力(F_1 和 F_2)，因此需要一个附加方程.

本例中力 F_2 被选作赘余力，将杆 BD 的下端切开(图 1-13 b) 以便

将此力移去(如果需要的话，该杆可切于任一其它点处)。当荷载 P 作用于放松结构上时(图 1-13 b)，节点 D 的向下位移(按上节所述求得)为

$$\delta_P=\frac{PL}{2EA\cos^3\beta} \tag{j}$$

式中 L 为竖直杆的长度。所有杆均假设具有同样的轴向刚度 EA。当赘余力 F_2 作用于放松结构时(图 1-13 c)，切杆 BD 将因向下的拉力 F_2 而产生拉伸，同时节点 D 处作用有与其相等但方向相反的 F_2。后者使节点 D 向上移动下列值（与方程 i 比较）：

$$\delta_F=\frac{F_2L}{2EA\cos^3\beta} \tag{k}$$

节点 D 由于 P 和 F_2 同时作用所产生向下的总位移为 $\delta_P-\delta_F$。我们还必须注意到杆 BD 的伸长量为 F_2L/EA。节点 D 的位移协调条件表明：节点 D 的向下位移等于杆 BD 的伸长量，因此，我们得到

$$\delta_P-\delta_F=\frac{F_2L}{EA}$$

将方程(j)和(k)代入此方程，对 F_2 进行求解，我们求出

$$F_2=\frac{P}{1+2\cos^3\beta}$$

最后，根据平衡方程(方程 i)，我们求出

$$F_1=\frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}$$

从这些结果中我们看出：中间杆内的轴向力大于外侧杆内的力。

例题 2　现在用位移法分析例题 1 中的桁架，以便提供两种解法的比较。节点 D 的位移 δ(见图 1-14 a) 在分析中将作为未知量。图中的虚线表示桁架变位后的图形。节点 D 的威里沃特图解示于图 1-14 b 中，线 DD_1 和 DD_2 分别表示杆 CD 和 AD 的伸长量，而 DD' 表示节点 D 的竖直位移 δ。根据图解，我们看出两根斜杆的伸长量均为

$$DD_1=DD_2=\delta\cos\beta$$

因此，斜杆中的力均为

$$F_1=\frac{EA\cos\beta}{L}(\delta\cos\beta)=\frac{EA\delta\cos^2\beta}{L} \tag{l}$$

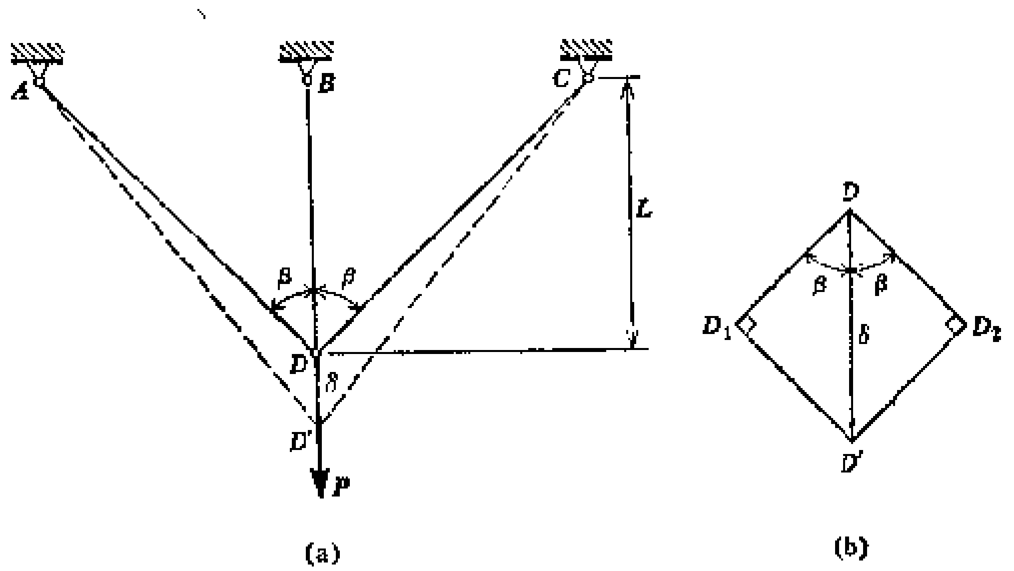


图 1-14 例题 2 静不定桁架(用位移法分析)

另外,竖直杆中的力为

$$F_3=\frac{EA\delta}{L} \tag{m}$$

方程(l)和(m)代表用一个未知数(即挠度 δ)所表示的杆力。

第二个步骤是应用静力平衡方程(方程 i). 将方程(l)和(m)代入方程(i),我们求出

$$\frac{2EA\delta\cos^3\beta}{L}+\frac{EA\delta}{L}=P$$

从它得

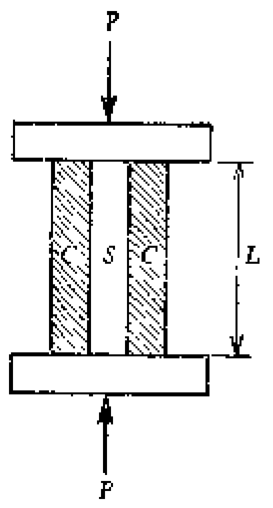
$$\delta=\frac{PL}{EA}\,\frac{1}{1+2\cos^3\beta} \tag{n}$$

现在挠度 δ 为已知,杆力可借方程(n)代入方程(l)和(m)来求出. 这样就得出与例题 1 中对于 F_1 和 F_2 相同的结果。

例题 3 有一钢圆柱和一铜管(图 1-15 a 中标了 S 和 C)置于试验机机头之间进行压缩. 试确定钢和铜中的应力,并确定由于力 P 所产生的竖向压缩应变。

当应用力法时,我们移去顶面板,得到图 1-15 b 所示的结构. 分别代表钢和铜中总轴向未知力的 P_s 和 P_c 藉下列静力学方程联系起来:

$$P_s+P_c=P \tag{o}$$



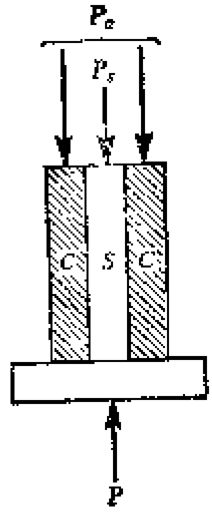


图 1-15　例题 3. 静不定系统

钢圆柱的缩短量为 P_sL/E_sA_s，其中 E_sA_s 为钢圆柱的轴向刚度，而铜管的缩短量为 P_cL/E_cA_c，其中 E_cA_c 为铜管的轴向刚度。其协调条件基于这样的事实之上，即钢圆柱与铜管二者的缩短量相等、因此：

$$\frac{P_sL}{E_sA_s}=\frac{P_cL}{E_cA} \tag{p}$$

联立解(o)和(p)两个方程，我们可以求算钢和铜中的力：

$$P_s=\frac{E_sA_s}{E_sA_s+E_cA_c}P \qquad P_c=\frac{E_cA_c}{E_sA_s+E_cA_c}P \tag{q}$$

这些方程说明钢和铜中的力与它们的轴向刚度成比例。

现在可藉 A_s 去除 P_s 得到钢中的压应力 σ_s，用类似方法可以求出应力 σ_c。两种材料的压缩应变相同，可藉虎克定律求出，其结果为

$$\epsilon=\frac{P}{E_sA_s+E_cA_c} \tag{r}$$

此方程说明应变等于总的荷载除以钢和铜的轴向刚度之和。

例题 4　用位移法求解上面的例题。

在本例中，未知位移为端板的相对位移 δ，此位移与钢和铜的缩短量相同。当用此位移 δ 表达时，其力 P_s 和 P_c 为

$$P_s=\frac{E_sA_s\delta}{L} \qquad P_c=\frac{E_cA_c\delta}{L} \tag{s}$$

将这些表达式代入平衡方程，得

$$\frac{E_s A_s \delta}{L}+\frac{E_c A_c \delta}{L}=P$$

从它求出位移 δ：

$$\delta=\frac{PL}{E_s A_s+E_c A_c}$$

现在，将此 δ 的表达式代入方程(s)，得出力 P_s 和 P_c。这些结果与例 3 中所得一致(见方程 q)。另外，用长度 L 去除 δ 得出应变 ϵ，与方程(r)一致。

比较例题 3 和例题 4 表明：尽管观点基本不同，但是在某些情况下力法和位移法的计算工作量差别相当小。但另一方面，读者应认识到在较复杂的问题中，这两种方法之间可存在显著的不同。如果图 1-15 中所示的体系加上其它材料的杆件，则变得较为复杂（见图 1-16 中的例子），那么藉位移法按上面所述相同方式进行求解是非常简单的，反之，用力法求解则变得较为复杂，而且要求求解附加联立方程。在其它一些情况下则相反，用力法求解较为容易。

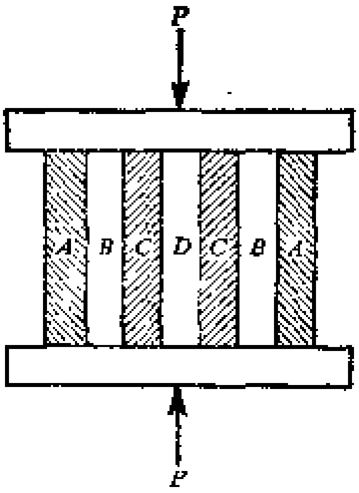


图 1-16　静不定系统

1.7　热效应和预应变效应

在静定结构中，整个结构均匀温度变化不会产生任何应力，因为整个结构可以自由地膨胀和收缩。反之，静不定状态下结构的温度变化将使杆件产生应力，这种应力称为热应力。这个结论可以借比较一端自由的杆(见图 1-7 中的例子)和固定端杆(图 1-17 a)看出来。在前者中、作用于整个杆中的均匀温度变化引起下列伸长量：

$$\delta=\alpha L\Delta T \tag{1-10}$$

式中 α＝热膨胀系数(见表1-2)，L＝长度，ΔT＝温度的增加。由于此伸长量可自由地产生，所以杆中不产生应力。

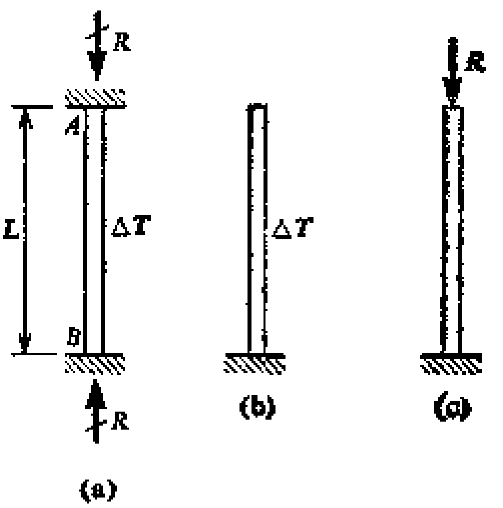


图 1-17　温度增高时的杆

表 1-2　有代表性的热膨胀系数值

材　　料	热膨胀系数 α ($10^{-6}/°F$)
钢	6.5
铝	11.9—13.3
镁	14.5
铜	9.3
混凝土	4.7

在图 1-17 a 所示静不定杆的情况下，不可能让杆件伸长，因此，当温度增高时，杆中将产生压力 R。该压力可藉上节所述分析方法来计算。对于固定端杆，我们看出如果 A 端放松（图 1-17 b），那么它单独由于温度变化所产生向上的位移为 $\alpha L\Delta T$，而单独由于 R 所产生向下的位移（图 1-17 c）为 RL/EA。令这两个位移相等，得出

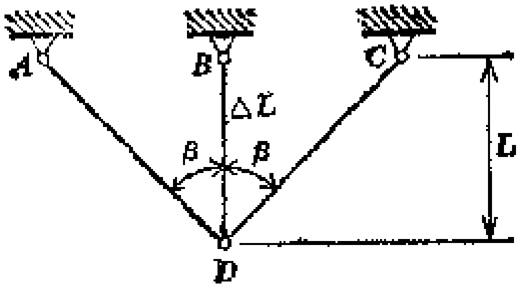
$$R = EA\alpha\Delta T \tag{1-11}$$

根据此方程求出 R 之后，杆中的压应力和压缩应变可以计算

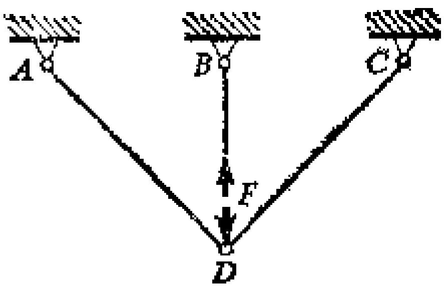
如下：

$$\sigma=\frac{R}{A}=E\alpha\Delta T \qquad \epsilon=\frac{\sigma}{E}=\alpha\Delta T \tag{1-12}$$

从此例题中我们看出，即使没有外荷载作用，热效应也是会使静不定体系中产生应力的。



(a)



(b)

图 1-18　竖直杆具有初始应变 ΔL 的桁架

当结构中的一根杆件长度不准确，或当一根杆件由于初始力产生预加应力并随后移去初始力，这样都存在类似的情况。在这两种情况中即使结构上没有外荷载作用，但产生预应力条件，使结构存在初始应变。以图 1-18 a 中的桁架为例，假设用 $L+\Delta L$ 代替竖直杆在不产生应力时的长度 L。于是仅当压缩竖直杆和拉长斜杆后诸杆才能装配就位。令 F 代表竖直杆中的压力（图 1-18 b）。于是节点 D 由于 F 产生的向下位移为：

$$\delta_F = \frac{FL}{2EA\cos^3\beta}$$

这可从上节方程(i)看出来。节点 D 的协调条件说明：节点 D 的向下位移 δ_F 等于竖直杆初始增长量 ΔL 减去由于力 F 使竖直杆产生的缩短量。因此，其协调方程为

$$\frac{FL}{2EA\cos^3\beta} = \Delta L - \frac{FL}{EA}$$

从它得到

$$F = \frac{EA\Delta L}{L}\,\frac{2\cos^3\beta}{1+2\cos^3\beta} \qquad \text{(a)}$$

知道压力 F 之后，我们可以容易地藉静力学计算斜杆中的力。前面两个例子说明了这样的问题，即静不定结构在温度变化或有初始应变时的分析方法与用于荷载作用下的结构分析是相同的。

最后一个例子，让我们再次讨论图 1-18 a 中的桁架，并假设竖直杆加熱，使其温度升高ΔT。这种温度升高对于杆力所产生的效应将与当竖直杆具有初始伸长 ΔL 时相同，若我们取ΔL等于杆自由伸长时所产生的温度膨胀值。因此，在方程(a)中，我们为了求得竖直杆由于温度变化所产生的力 F，只需要用 $\alpha L\Delta T$ 代替ΔL。

1.8 非线性状态

在上面讨论中总是假设结构的材料服从虎克定律。现在让我们讨论当应力超过比例极限时，结构拉伸和压缩的状态。我们假设材料的应力-应变图为已知。

如果结构是静定者，其轴向力可不考虑材料的性能而借静力学求出来。知道力之后，我们就可计算结构每点处的应力。最后，应用应力-应变图我们可以得到每一点处的应变，从而我们还可以得到每一杆件的长度变化和所产生的位移。

这种分析静定结构的程序是非常简单明了的，将在本章末尾习题 1.8-1 至 1.8-5 中说明。

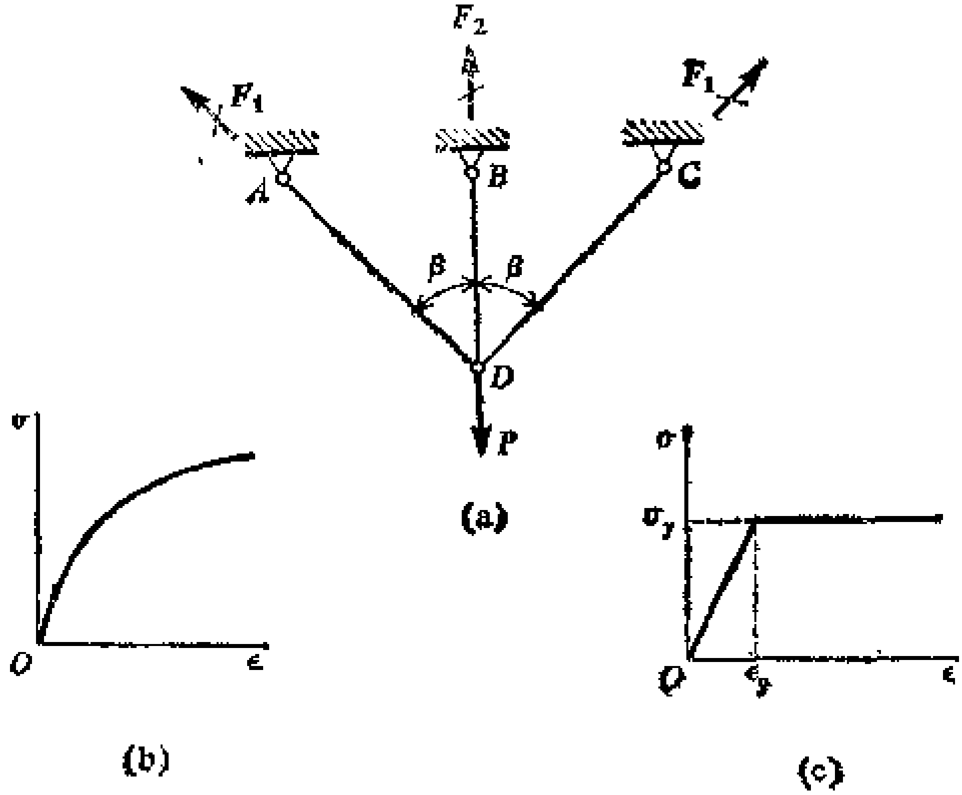


图 1-19　具有非线性应力-应变图的静不定桁架

在静不定体系中，分析变得复杂多了，因为没有预先求出位移就不可能求出其力，而位移本身又与力和应力-应变关系有联系。在这样的体系中可以采用试凑法或逐次接近法。为了说明这一种分析方法，让我们再讨论图 1-19a 所示对称三根杆的桁架，只是我们现在研究桁架的材料具有图 1-19b 所示应力-应变图的情况。我们从假设节点 D 处的试用竖直位移 δ 来开始分析。然后，根据节点 D 处的威里沃特图解，我们可以得到所有三根杆的伸长量。这种计算法保证节点处的协调条件是满足的。其次必须对节点处力的平衡进行核对。根据伸长量可以求出杆中的应变，然后可从应力-应变图求出其应力。知道了杆中的应力，我们可以求出杆中的力，并

核对节点 D 处的平衡。如果最初假设的 δ 值是正确的话，我们将发现节点 D 处诸力的平衡是满足的。否则，我们将发现诸力不平衡，因此，必须选择 δ 的新的试用值，并重复地进行。最后，我们将得到能使节点 D 处协调和平衡都能满足的 δ 值。杆中与此相应的力是为正确值。

另一种程序是从假设竖直杆中力 F_2 的试用值来开始。然后，应用节点 D 处力的平衡，我们可以计算斜杆中的力。其次，可以确定每一根杆中的应力和应变（根据应力-应变图）以及其伸长量。最后，我们根据节点 D 处的威里沃特图可确定所有三根杆的伸长量是否彼此协调。如果它们是协调的，那么 F_2 的试用值是正确的，其分析就完成了。反之，则必须选择 F_2 的新的试用值，并重复进行，直到平衡和协调均得到满足为止。

藉按上面所述方式分析图 1-19a 中静不定桁架，我们可以得到对于任何假设荷载 P 所引起的桁架挠度和杆力。因此有可能得到荷载从零增大到其最大值时桁架状态的完整图形。

塑性分析　有少数材料，特别是结构钢，在线性区段之后有显著的屈服区段，这种材料的应力-应变图可以用两根直线精度良好地加以理想化，如图 1-19c 所示。假设该材料在屈服点之前服从虎克定律，在屈服点之后，材料屈服，其应力为一常数。屈服点处的应力和应变分别用 σ_y 和 ϵ_y 来表示。应力不增加就产生屈服的材料称为完全塑性的。自然，钢的应力-应变图最后上升超过屈服应力是因为应变硬化的缘故，如同早在第 1.3 节中所说的那样，但是在此发生之时，变形已变得非常大，结构失去了它的用途。因此，根据图 1-19c 所示图形来分析处于塑性范围的钢结构，已成为通用的方法。对于钢，这同一个图可用于受拉和受压。具有图 1-19c 所示应力-

应变图的材料(亦即，在线性弹性区段之后有完全塑性区段的材料)称为弹-塑性材料. 采取这些假定进行的分析，称为结构的塑性分析，或极限分析.

塑性分析的方法可藉再次研究图 1-19a 中的三杆桁架来说明，并假设诸杆均由弹-塑性材料所制成(图 1-19c). 当荷载逐渐增加时，杆中的力也将增大，只要应力低于屈服应力 σ_y，这种力可藉弹性分析来确定(见第 1.6 节的例题 1). 如果诸杆的横截面积相等，然后比斜杆中的力要大的中间杆到达屈服应力 σ_y。这种情况发生于力 F_2 变成等于 $\sigma_y A$ 的时候，其中 A 为每一根杆的横截面积. 当荷载 P 进一步增大时，斜杆中的力还要增加，但力 F_2 保持为常数，因为中间杆已成为塑性的了. 最后，侧边的杆也将成为塑性的，于是结构就不能再承受附加荷载；否则在常值的(最大的)荷载下，所有杆均将继续伸长. 此时的荷载称为极限荷载 P_u.

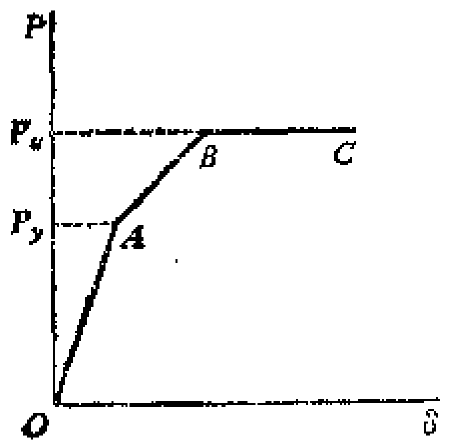


图 1-20　图1-19a中桁架的载荷-挠度图

上节中所述的现象，藉图 1-19a 中桁架的荷载-挠度图描述于图 1-20 中. 以荷载 P 作为该图的纵坐标，而节点 D 的挠度 δ 为其横坐标. 从原点 O 至 A 点，所有三根杆均是弹性者，其杆中的力(根据第 1.6 节例题 1)为

$$F_1=\frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}\quad F_2=\frac{P}{1+2\cos^3\beta}$$

中间杆于 A 点处开始屈服，其相应的荷载 P 值称为屈服荷载 P_y，它藉使上面方程中的 F_2 等于 $\sigma_y A$ 来求得：

$$P_y=\sigma_y A(1+2\cos^3\beta)$$

从 A 至 B，中间杆中的力保持等于 $\sigma_y A$，斜杆中的力可根据节点 D 的平衡来求得（见第 1.6 节的方程 i）：

$$F_1=\frac{P-\sigma_y A}{2\cos\beta}$$

在 B 点处，斜杆也屈服了. 所以，$F_1=\sigma_y A$，根据节点 D 的平衡，我们得出下列极限荷载 P_u 的结果

$$P_u=\sigma_y A(1+2\cos\beta)$$

从 B 至 C，结构在常数荷载 P_u 作用下继续变形. 正如前面所述，最后将发生硬化应变，于是结构能承受附加荷载，但对于实用来说，很大变位的出现意味着结构已经破坏. 由于这个原因，极限荷载 P_u 的计算对于设计者是非常重要的.

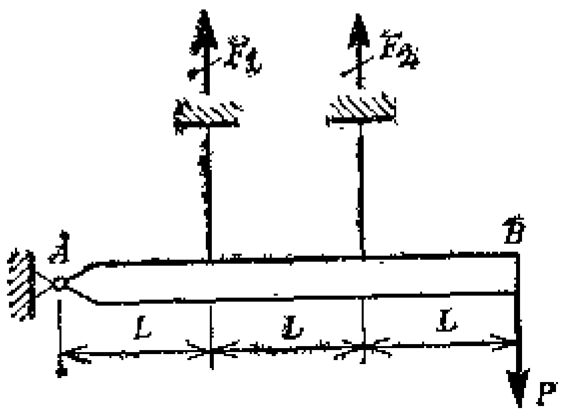


图 1-21　例题

例题　如果图 1-21 所示结构中的水平杆为刚性者，而其竖直吊线是由弹-塑性材料制成的，需要确定该结构的屈服荷载 P_y 和极限荷载 P_u。另外，要求算出荷载系数为 1.85 时结构的容许荷载 P_w（假设这两根吊线具有相同的横截面积 A）。

联系这两根吊线中的力 F_1 和 F_2 与荷载 P 的方程，可通过取对杆的 A 端处的力矩来求得：

$$3P=F_1+2F_2 \tag{a}$$

此方程对于荷载 P 从零至极限荷载 P_u 的任何一个值都是成立的. 从图上清楚地看出右边那根吊线的伸长量总是为左边那根吊线伸长量的两倍. 因此，在弹性条件下，我们得 $F_2=2F_1$，并且看到当荷载 P 逐渐增

大时，力 F_2 将首先到达屈服值 $\sigma_y A$. 此时，力 F_1 将等于 $\sigma_y A/2$；而荷载的相应值等于屈服荷载 P_y，根据方程(a)来求得：

$$P_y=\frac{5\sigma_y A}{6}$$

当到达极限荷载P_u时，F_1 和 F_2 都将等于 $\sigma_y A$. 因此，根据方程(a)，我们求得：

$$P_u=\sigma_y A$$

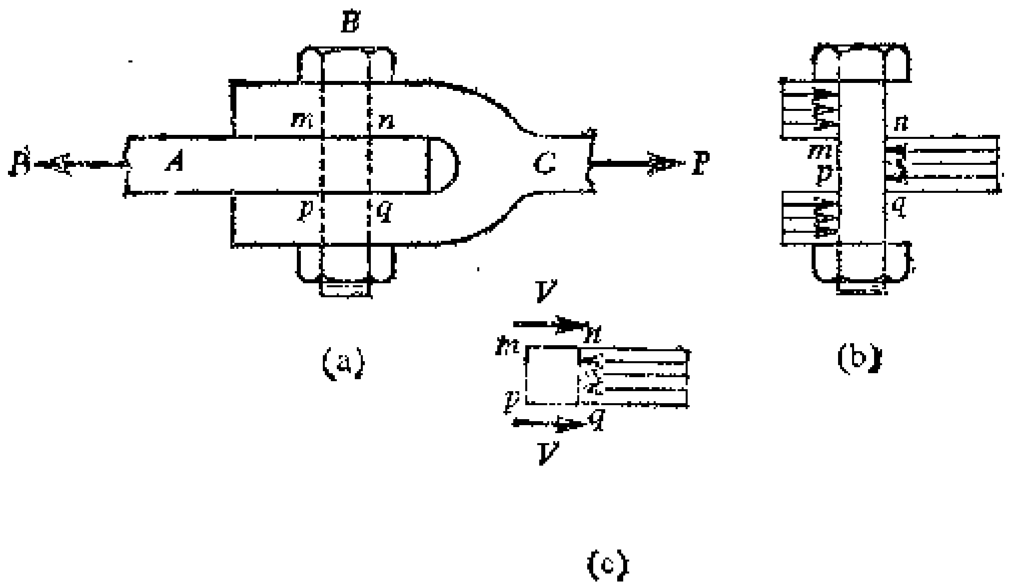
容许荷载 P_w 借荷载系数去除极限荷载而得，正如前面第1.3节所述；因此

$$P_w=\frac{P_u}{荷载系数}=\frac{\sigma_y A}{1.85}$$

我们从此例题看出，对于静不定结构，其极限荷载 P_w 的确定比弹性分析要容易得多.

1.9 剪应力和剪切应变

让我们讨论图1-22a所示的连接件作为出现剪应力的实际情况的例子. 此连接件由杆 A，U 形铁钩 C 以及穿过杆 A 和 U 形铁钩的孔的螺栓 B 所组成. 在荷载 P 作用下，杆 A 和 U 形铁钩将在其支承处按相对方向挤压螺栓，对螺栓产生



(c)

图 1-22 直接剪切的实例

接触应力，这种应力称为支承应力，如图 1-22 b 所示. 该图还说明沿截面 mn 和截面 pq 存在切剪螺栓的趋势. 如果我们画出螺栓的 $mnpq$ 部分的自由体图(图 1-22 c)，显然必须有剪力 V 沿切面作用(本例中每一个剪力 V 等于 $P/2$). 该剪力产生沿螺栓横截面积分布的剪应力 τ. 这种剪应力的确切分布是不容易确定的，我们藉其作用面的面积去除总剪力 V 可以得到它的平均值：

$$\tau_{平均}=\frac{V}{A} \tag{1-13}$$

在图 1-22 的例子中，用于方程(1-13)中的面积 A 为螺栓的横截面积.

在设计螺栓、钉子、铆钉、键以及其它承受直接剪切的部件时，通常应用方程 (1-13)，根据其平均容许剪应力 τ_w 确定部件的大小. 通常容许剪应力位于 $0.5\,\sigma_w$ 至 $0.6\,\sigma_w$ 范围之间，这里 σ_w 为同一种材料的容许拉应力. 在后面章节中会看到，当杆受拉和受弯时，也会按非直接方式发生剪应力.

在本章前面诸节中，我们讨论到按法向作用于面上的拉应力和压应力，这些应力通常称为法向应力. 反之，剪应力总是与其面相切而作用，因此有时称它为切向应力. 在这两种情况中，应力均代表力的强度，亦即单位面积上的力，因此我们看出法向应力与剪应力之间的主要区别在于它们方向上的不同.

为了使剪应力所产生的变形形象化，让我们研究一块很小的材料立方体单元(图 1-23 a)，假设它承受沿顶面分布的剪应力 τ. 如果没有法向应力作用于该单元上，那么在其底面上必须还作用有相等而方向相反的剪应力，以使该单元在水平方向处于平衡. 此外，单元顶面和底面上的剪应力会产

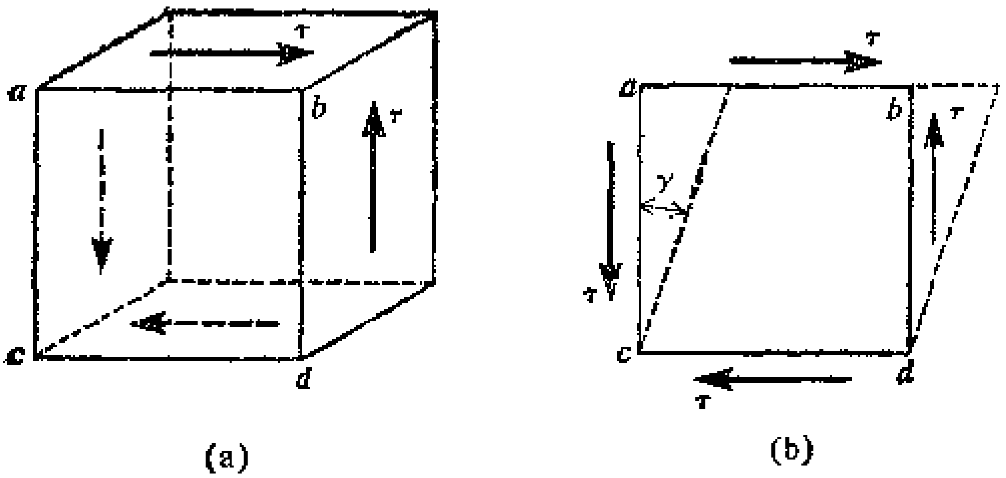


图 1-23 剪应力和剪切应变

生力矩，此力矩必须由作用于单元两竖直边上剪应力的力矩来平衡。如果该单元处于静力平衡，那么这些竖向剪应力也必须等于 τ。因此，我们一般看到：(a)作用于材料单元上的剪应力总是以相等而相反成对地产生；(b)剪应力总是存在于二相互垂直平面上。该二垂直平面上的剪应力总是大小相等，但剪应力的方向指向二平面的交线或背离二平面的交线。仅承受剪应力的单元称为**纯剪**，如图 1-23 a 所示。纯剪将在第 2.3 节中作较详细的讨论。

纯剪时材料单元的变形绘于图 1-23 b 中。该图表示立方体单元的正面 $abcd$。因为单元上没有法向应力作用，所以 ab、cd，ac 和 bd 边的长度不会改变。然而，剪应力将使正方形 $abcd$ 变成斜方形，如图中虚线所示。c 点的角在变形之前为 $\pi/2$，现在减小为 $\pi/2-\gamma$，这里 γ 为图中所示的微小角。同时，a 点的角增大到 $\pi/2+\gamma$。γ 角是剪切使单元变形的一个度量标准，该角称为**剪切应变**。我们从图中看出，剪切应变 γ 等于该单元顶边对于底边的水平滑动量除以单元高度。

藉材料的纯剪试验，量测作为剪应力之函数的剪切应变，我们可以得到材料的**剪切应力-应变图**。这种图与相同材料

的拉伸试验图在形状上非常相似；根据这种图我们可以确定剪切时的比例极限、屈服应力和极限应力。试验表明：包括结构钢在内的延性材料在剪切时的屈服应力 τ_y 为 σ_y 的 0.5 至 0.6 倍。

如果材料具有线性弹性区段，那么剪切应力-应变图将为一直线，而且剪应力与剪切应变成正比。因此，我们得到下列剪切时的虎克定律方程：

$$\tau = G\gamma \tag{1-14}$$

式中 G 称为材料的**弹性剪切模量**。有关几种材料的典型的 G 值已列于表 1-1 中．产生纯剪的最简单方式是用圆管扭转．这将在扭转一章中去阐述（见第三章）。根据这种扭转试验，通常可以得到 G 的值。另外，要注意受拉时和受剪时的弹性模量（E 和 G）彼此不是没有关系的，它们之间具有一定的关系，正如后面第 2.3 节所指出的那样。

1.10 应变能

当简单受拉杆在力 P 按静力加载下（即很慢地加载），杆将伸长（图 1-24 a）。如果材料服从虎克定律，其荷载-变位图将为一直线，如图 1-24 b 所示。在杆加载期间，力 P 对杆作功，此功转变为势能，或**应变能**，储存于杆内．如果随后将力 P 慢慢地移去，杆将回到其原来的长度；在此卸载过程中，储存于杆中的应变能可以功的形式来恢复。因此，杆如同弹性弹簧那样，当荷载作用或移去时它可储存和释放能量。

加载期间储存于杆中的应变能可以根据荷载-变位图来求得。让我们假设 P_1 代表荷载中的某一个值，δ_1 代表其相应伸长量。于是荷载的增量 dP_1 将使伸长量产生增量 $d\delta_1$。在伸长量产生此增量期间，P_1 所做的功为 $P_1 d\delta_1$，图中以阴影线的面积来表示。加载过程中所做的总功为这种单元面积

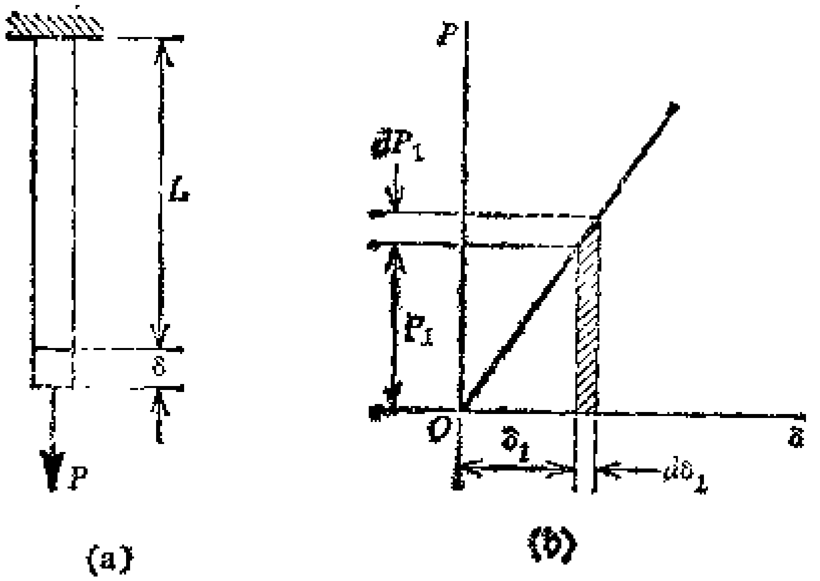


图 1-24 杆受拉时的荷载-变位图

之总和，亦即等于荷载-变位图的下部面积．因此，由于荷载 P 所做的总功等于储存于杆中的应变能 U，即

$$U=\frac{P\delta}{2} \tag{1-15}$$

此方程仅当材料服从虎克定律时才能成立，在这种情况下，我们知道 P 藉方程 $\delta=PL/EA$ 与 δ 联系起来．将此关系代入方程(1-15)，我们可以用下面任一形式来表达杆中的应变能：

$$U=\frac{P^2L}{2EA} \quad 或 \quad U=\frac{EA\delta^2}{2L} \tag{1-16a, b}$$

其中第一个式子表示应变能为荷载 P 的函数，第二个式子表示应变能为变位 δ 的函数．

有时要研究单位体积内的应变能 u．对于承受均匀拉力的杆，我们可用杆的体积去除总应变能 U 得到 u；于是 $u=U/AL$，所以

$$u=\frac{\sigma^2}{2E} \quad 或 \quad u=\frac{E\epsilon^2}{2} \tag{1-17a, b}$$

式中 $\sigma=P/A$ 为拉应力，而 $\epsilon=\delta/L$ 为其应变．

未超过比例极限时，杆中所能储存的单位体积应变能的

最大量，称为回弹模数. 此模数藉比例极限代替 σ 代入方程(1-17a)来求得.举一个例子，比例极限为30,000磅/吋^{2}和 $E=30\times10^6$磅/吋^{2}的结构钢所具有的回弹模数 u 等于15.

上面关于杆件处于拉伸时应变能的讨论也适用于压缩时的杆件。因为应变能等于当杆受载时 P 力所做的功，因此应变能总是正值.

例题 1 比较图 1-25 所示三根杆中所储存的应变能. 注意所有杆具有相同长度，而且还承受相同的荷载 P. 第一根杆具有均匀的直径 d，但其它各杆在部分长度上具有较大的直径.

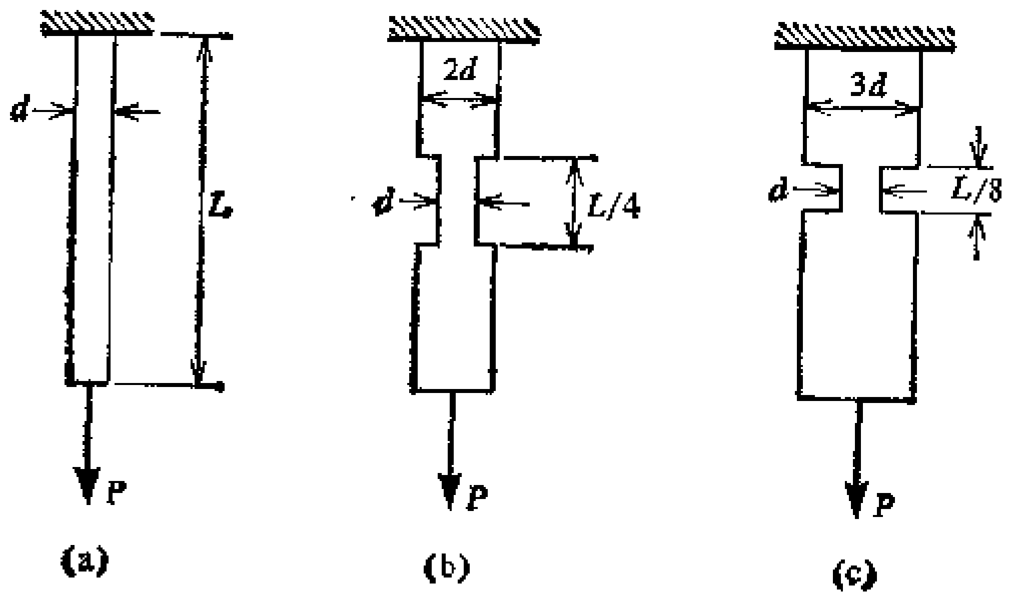


图 1-25 例题1

第一根杆的应变能(根据方程 1-15a)为

$$U_1=\frac{P^2L}{2EA}$$

式中 $A=\pi d^2/4$. 对于第二根杆，如果我们假设每一截面上的应力分布是均匀的，我们求出其应变能为:

$$U_2=\frac{P^2(L/4)}{2EA}+\frac{P^2(3L/4)}{2E(4A)}=\frac{7P^2L}{16(2EA)}=\frac{7U_1}{16}$$

对于第三根杆，我们求出：

$$U_3=\frac{P^2(L/8)}{2EA}+\frac{P^2(7L/8)}{2E(9A)}=\frac{2U_1}{9}$$

比较这些结果说明当杆的体积增大时，其应变能减小。因此，在具有狭槽的杆中，只要用很小的功就使其产生较高的拉应力。当荷载属于动力特性时，吸收能量的能力是重要的，狭槽的存在是非常有害的，正如下面所述。自然、对于静载，最大应力在设计中是重要的，而吸收能量的能力不是重要的。

作用于杆上的冲击荷载　当讨论动力特性荷载时，应变能的概念是有用的。这种荷载具有一定的能量，它必定转变为杆中的应变能或因杆的塑性变形而耗散。以讨论图 1-26 所示的简单装置作为冲击荷载的例子。起初处于静止状态的荷重W，从高度 h 处落到长度为 L 的杆的底端 B 的翼缘上。计算由于冲击产生的杆的最大伸长量和最大拉应力。

我们可藉忽略冲击过程中损失的能量，并假设落下荷重所做的全部功都转变为杆的应变能来得到近似解。这个假定是保守的，因为实际上一部分能量将耗散掉，杆的实际伸长量将小于下面的计算值。

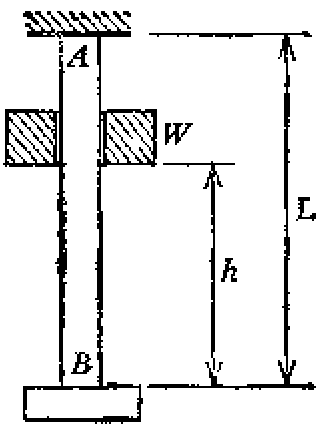


图 1-26　杆上的冲击荷载

在打击翼缘之后，荷重 W 继续向下运动，使杆伸长。由于杆子给以的阻力，荷重减速，并且很快就停止了，这时杆子的伸长量为 δ。在此瞬间，杆的伸长量和其相应的拉应力均为最大值。马上杆子随即缩短，接着杆子和荷重 W 将发生纵向振动。然而，我们可藉使落下荷重所做的功[此功为$W(h+\delta)$]等于杆的应变能来计算杆的最大伸长量 δ：

$$W(h+\delta)=\frac{EA\delta^2}{2L} \tag{a}$$

引进符号 $\delta_{st}=WL/EA$，它为荷载 W 使杆产生的静力伸长量。解方程(a)，我们求出

$$\delta=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+2h\delta_{st})^{\frac{1}{2}} \tag{1-18a}$$

$$=\delta_{st}+(\delta_{st}^2+v^2\delta_{st}/g)^{\frac{1}{2}} \tag{1-18b}$$

式中 $v=\sqrt{2gh}$ 为荷重 W 在打击翼缘这一瞬间的速度。这些方程表示：如果 W 和 L 都增大，或者冲击速度增大，那么伸长量就增加；它们还表示：如果杆的轴向刚度 EA 增大，伸长量则减小。

如果高度 h 与 δ_{st} 相比是很大的话，则可得到简化，因而这时方程(1-18)简化为

$$\delta\approx(2h\delta_{st})^{\frac{1}{2}}=(v^2\delta_{st}/g)^{\frac{1}{2}} \tag{1-19}$$

假设在产生最大伸长量的一瞬间杆中拉应力的分布是均匀的，我们得到下列最大拉应力的近似表达式：

$$\sigma=\frac{E\delta}{L}=\frac{E}{L}(v^2\delta_{st}/g)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{Wv^2}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2E}{AL}\right)^{\frac{1}{2}}$$

根据这个结果，我们看出：落下荷重的动能或模量 E 增加，将引起应力的增大，反之，棱柱杆体积 AL 增加，将减小应力。这种情况与杆的静力拉伸是完全不同的，在后一种情况中，其应力与长度 L 和弹性模量 E 无关。

突然作用的荷载　现在让我们研究冲击的特定情况：其 h 等于零，亦即荷重 W 突然作用于杆 B 端处的翼缘上（图1-26），没有初速度。虽然在此情况下，杆开始伸长时没有动能，但问题是与杆承受静力加载完全不同。对于静力拉伸，我们假设荷载是逐渐作用的，因而作用的荷载与杆的阻力之间总是平衡的。在这种条件下完全不考虑荷载的动能问

题．在荷载突然作用时，杆的伸长量和杆中的应力在开始瞬间均为零，然后突然作用的荷载在其自身重量作用下开始下落．在此运动中，杆的阻力逐渐增加，直到荷重的竖直位移为δ_{st}，阻力正好等于W．但是现在荷载在达到位移δ_{st}时获得了一定的动能，因此，它继续向下运动直到它的速度由于杆中阻力而降为零的时候为止．根据方程(1-18 a)，令$h=0$，我们可以得到这种情况下的最大伸长量，因此

$$\delta=2\,\delta_{st} \tag{1-20}$$

亦即，由于动力条件，突然作用的荷载引起的变位等于静力荷载作用时的二倍[1]．

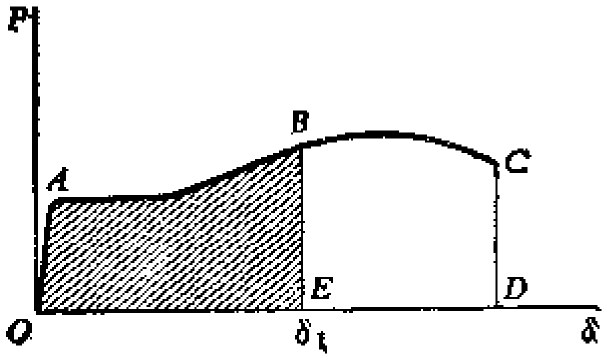


图 1-27　杆受拉时的荷载-变位图

上面关于冲击的讨论是基于这样的假设之上的，即应力保持在比例极限之内．超出此极限，问题变得较复杂，因为杆的伸长量不再与拉力成正比．假设拉伸试验图与拉伸该杆子的速率无关，冲击中超过弹性极限的伸长量可根据如图 1-27 所示的静力荷载-变位图来确定．对于任一假设的最大伸长量δ_1，其相应面积$OABE$给出产生此伸长量所需要的功．此功必须等于荷重W所产生的功$W(h+\delta)$．当$W(h+\delta)$等于或大于拉伸试验图的总面积$OABCD$时，落下的物体将使杆子折断．在某些材料中，包括延性的钢，当拉伸杆子的速率很大时，屈服点升高，因此产生破坏所需要的功要比静力试验高一些．

1）此结果是由 Poncelet 得到的(参考文献 1-15)．

根据这里的讨论得出结论：杆的形式的任一改变，若引起荷载-变位图的 $OABCD$ 面积减小，也必减少杆对冲击的抗力．譬如，在图 1-25b 和 c 内所有刻槽杆件中，金属的塑性流将集中于槽处，总的伸长量和产生折断所需要的功将比同一图中所示圆柱杆要小得多．这种刻槽的杆件在受冲击方面是很弱的．轻微的冲击就可能产生折断，尽管材料本身可能有延性．带有铆钉孔或有任何急剧变化截面的杆件，对抵抗冲击都同样是很弱的．根据这一讨论我们还看出，为什么延性材料比脆性材料在受冲击方面具有大得多的抗力．即使延性材料和脆性材料的极限强度可能大致相同，但对于脆性材料，其荷载-变位曲线下面的面积要比延性材料曲线下的小得多．

例题 2　有一荷重 W 附于竖直钢缆索的下端，钢缆索以等速度 v 向下移动．试问当钢缆索上端突然停止时，其中产生的最大应力是多大？（略去缆索的自重不计．）

我们首先注意，对于图 1-26 所示体系导得的方程(1-18)在本例题中是不能应用的．其理由是前面例子中的杆子在冲击前是未受应力的，反之，本例题中，在冲击前缆索是承受了拉力 W 的．让我们假设在冲击当中没有能量损失，因而冲击之前该体系的总能量（动能加位能）等于冲击后当缆索的最大伸长量为 δ 时的总能量．

冲击前运动荷重的动能为 $Wv^2/2g$，而相对于它的最低位置的位能为 $W(\delta-\delta_{st})$，这里 δ_{st} 为荷重使缆索产生的静力伸长量．注意 $\delta_{st}=WL/EA$，式中 L 为缆索的长度，EA 为其轴向刚度．冲击前缆索中的应变能为 $AE\delta^2_{st}/2L$．冲击后，在缆索具有最大伸长量的时刻，缆索的应变能为 $EA\delta^2/2L$．令冲击前和冲击后的能量相等，我们得到

$$\frac{Wv^2}{2g}+W(\delta-\delta_{st})+\frac{EA\delta^2_{st}}{2L}=\frac{EA\delta^2}{2L}$$

根据它，引进关系式 $W=EA\delta_{st}/L$ 后，我们得到

$$\frac{Wv^2}{2g}=\frac{EA}{2L}(\delta-\delta_{st})^2$$

最后，总伸长量的解为

$$\delta=\delta_{st}+\sqrt{\frac{Wv^2L}{gEA}}$$

缆索中的最大应力为

$$\sigma=\frac{E\delta}{L}=\frac{W}{A}\left[1+\sqrt{\frac{v^2EA}{gWL}}\right] \tag{b}$$

此表达式中的最后一项，与缆索的性能和初速度有关，它可能比 1 大许多倍. 因此，缆索中的动力应力可能比静力应力 W/A 大很多.

在上述弹性冲击的讨论中，竖直杆的质量或缆索的质量，与下落体 W 的质量相比被忽略不计，并假设杆的整个长度内拉应力总是均匀的. 更普遍的解应考虑杆的质量和纵向应力波的影响（见参考文献 1-16 和 1-17）.

纯剪中的应变能　在四边作用有剪力 V 的材料立方体中（图 1-28），所储存的应变能可藉简单拉伸情况所用的方法来计算. 在材料变形过程中，当剪力从零逐渐增大到它的最终值 V 时，顶面 ab 对底面 cd 的水平移动距离为 δ. 假设材料服从虎克定律，剪切应变 $\gamma=\delta/L$ 与剪应力 $\tau=V/A$ 成正比，这里 A 为块体的顶面面积. 其荷载-变位图（V 对 δ）与图 1-24 b 中所示受拉杆的图形相类似. 由于剪力 V 所做的、并以弹性应变能的形式储存的功为：

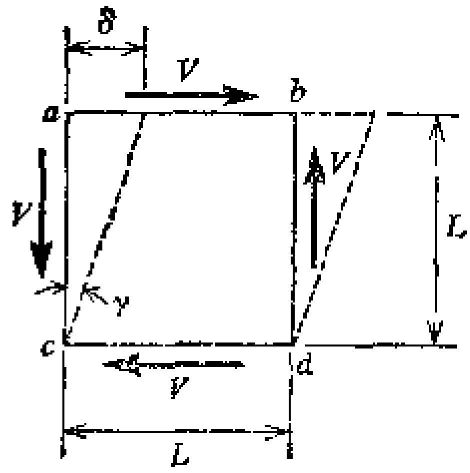


图 1-28　纯剪时的应变能

$$U=\frac{V\delta}{2} \tag{1-21}$$

回忆 $\gamma=\delta/L$，$\tau=V/A$，并应用剪切的虎克定律（$\tau=G\gamma$），我们看到 $\delta=VL/GA$. 将这些结果併入方程(1-21)，我们得到下列应变能的两个方程：

$$U=\frac{V^2L}{2GA} \quad 或 \quad U=\frac{GA\delta^2}{2L} \tag{1-22 a, b}$$

我们用块体的体积 AL 去除这两个方程得到两个单位体积剪切应变能的表达式：

$$u=\frac{\tau^2}{2G} \quad 或 \quad u=\frac{G\gamma^2}{2} \qquad (1\text{-}23\,a, b)$$

这些表达式在第三章将用来得出扭转时杆中的应变能。

习　题

1.2-1　用静力学证明：棱柱形杆在受拉时(图 1-1 a)，如果整个横截面上应力为均匀分布， 那么其横截面上的合力作用线将通过横截面的形心。(提示：假设该杆的横截面为任意形状，在横截面的平面内选择一组轴线，然后得出合力作用时所通过点的坐标表达式。)

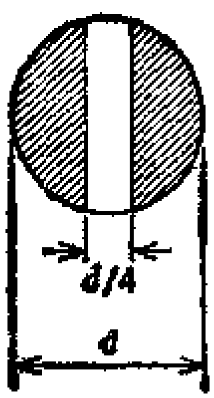
1.2-2　有一截面为矩形(1 吋 × 2 吋)、长度 $L=12$ 呎的棱柱形杆，承受 20 千磅的轴向拉力。观察出该杆伸长了 0.048 吋。试求算该杆的拉应力和应变。

1.3-1　有一根长线，在其自重作用下铅直悬挂着。试问如果在下列情况下，不会使它拉断的最大长度是多少：(a)该线为具有极限应力为 300,000 磅/吋^{2}的钢线；(b)该线为具有极限应力为 50,000 磅/吋^{2}的铝线(注意：钢的单位重量为 490 磅/呎^3，铝为 170 磅/呎^3。)

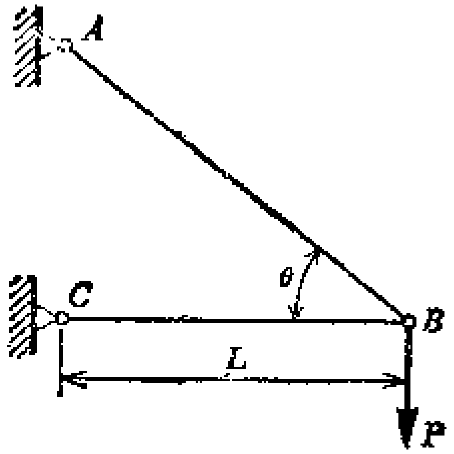
1.3-2　有一钢管短段($\sigma_y=40,000$ 磅/吋^2)，承受压缩荷载 250 千磅，此时抵抗屈服的安全系数为 1.8，如果管的厚度为其外径的八分之一，试求所需的最小外径 d。

1.3-3　有一圆形截面的实心杆(直径 $=d=1.5$ 吋)，带有通过杆中心顺侧向钻成的小孔，孔的直径为 $d/4$。假设在该孔处杆的净横截面上(见图)的容许拉应力 $\sigma_w=10,000$ 磅/吋^2，试求杆在受拉时所能承受的容许荷载 P。

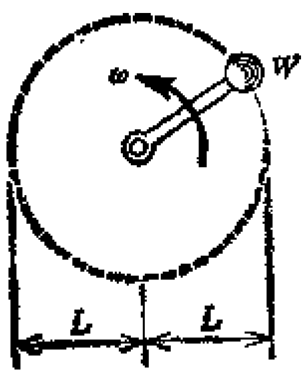
1.3-4　有 AB 和 BC 两杆(见图)支承竖直荷载 P。这两杆由同一种材料构成，水平杆 BC 的长度 L 保持常数。可是，θ 角随 A 点沿竖直方向移动而变化，AB 的长度随 A 的新的位置而定。假设受拉时的容许应力与受压时相同，还假设这两根杆受力均完全达到容许应力值，试求该结构具有最小重量时的θ 角。



习题 1.3-3



习题 1.3-4 和 1.5-14



习题 1.3-5，1.3-6 和 1.5-7

1.3-5　有一荷重 W 附于细长臂（长度为 L）上，此臂在光滑面上于水平面内绕竖直轴旋转(见图)。臂和重量以等角速度 ω 旋转。臂的重量略去不计。如果容许应力为 σ_w，试导出该臂所需要的横截面积的公式。

1.3-6　如果考虑臂的重量，试解上一习题(假设 γ 为臂的材料的单位体积重量)。

1.4-1　有一直径为 2 吋的钢螺栓($E=30\times10^6$ 磅/吋^2) 必须承受 60，000 磅拉伸荷载。如果螺栓受力部分的初始长度为 21.75 吋，试问它的最后长度为多少？

1.4-2　有一圆钢杆($E=30\times10^6$ 磅/吋^2)，长 20 呎，必须承受 1600 磅拉伸荷载。如果杆的容许应力为 18,000 磅/吋^2，且其端点容许变位为 0.1 吋，试问该杆所需最小直径为多少？

1.4-3　有一钢管构成的拉杆($E=30\times10^6$磅/吋^2，$\nu=0.30$)，其外径为 3.5 吋，横截面积为 2.228 吋^2。试问多大的轴向力 P 将使其直径减小 0.000471 吋？

1.4-4　有一直径为 2.25 吋的实心圆杆，受到 45,000 磅轴向力的压缩。(a)假设 $E=12.5\times10^6$磅/吋^2，$\nu=0.30$，试求该杆直径的增大值 Δd。(b)如果其长度为 15 吋，试求该杆体积的增大值。

1.5-1　图 1-7 所示承受荷载的杆，具有均匀的横截面积 A，其弹性模量为 E。试求该杆下端变位 δ 的公式。该杆是伸长还是缩短？

1.5-2　图 1-8 所示的轴架承受荷载 $P_1=130$ 千磅，$P_2=150$ 千磅。其上面部分的长度 $a=2$ 呎，截面为方形，其边长为 3 吋。下面部分的长度 $b=2.5$ 呎，截面也为方形，边长为 5 吋。假设 $E=29\times10^6$ 磅/吋^2，试求：(a)轴架顶面的变位，(b)上面部分轴向应变与下面部分轴向应变之比值。

1.5-3　有一长度为 10 呎的钢杆，具有圆形截面，在一半长度上直径 $d_1=0.75$ 吋，另一半长度上直径 $d_2=0.5$ 吋。(a)试问此杆在拉伸荷载 $P=5000$ 磅作用下将有多大的伸长量？(b)如果同样体积的材料锻成长度为 10 呎、直径 d 为常数的杆件，试问在同样荷载下，将伸长多少？(假设 $E=30\times10^6$磅/吋^2)

1.5-4　试导出长度为 L、横截面积为 A 的棱柱形杆在竖直悬挂时由于自重作用下总伸长量的公式(假设 W=杆的总重量)。

1.5-5　有一均匀钢杆置于水平面上时长度为 200 吋，试确定当将其一端竖直悬挂时它的伸长值(假设 $E=30\times10^6$磅/吋^2，单位体积的重量 $\gamma=0.283$ 磅/吋^3)。

1.5-6　试确定棱柱形杆在竖直悬挂时由于自重使体积增大的量 ΔV (假设 W=杆的总重量，L=杆的长度，ν=泊松比，E=弹性模量)。

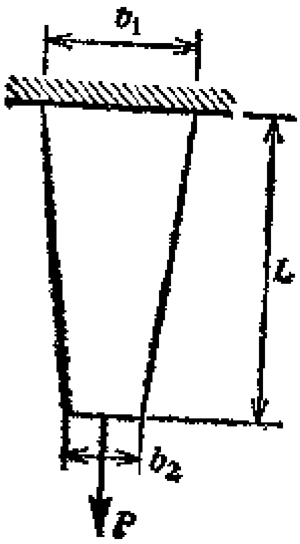
1.5-7　有一杆长L，以角速度ω绕竖直轴(见习题 1.3-5 中的图)在水平面内转动。杆的横截面积为 A，重量为 W_1。有一重量 W 附于杆的端头。试求由于离心效应使杆产生的伸长量 δ。

1.5-8　有一截面为矩形且厚度 t 为不变的锥形杆，承受力 P，如图所示。杆的宽度在支点处为 b_1，按直线变至自由端处为 b_2。试导出由于力 P 使杆产生的伸长量 δ 的公式。

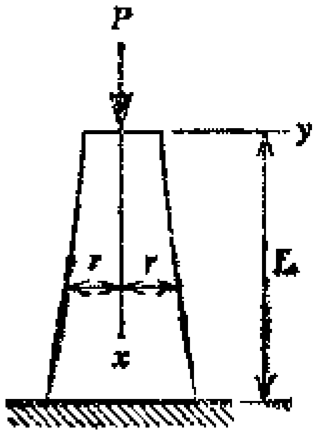
1.5-9　试导出上一习题中杆的体积增量 ΔV 的公式。

1.5-10　有一长度 $L=10$ 呎的圆截面锥形钢杆($E=30\times10^6$磅/吋^2)，承受拉力 $P=10,000$ 磅。杆的较大端直径 $d_1=2$ 吋，较小端 $d_2=1$ 吋。试问由于力 P 作用使该杆产生的伸长量为多少？

1.5-11　试导出圆墩的体积为最小时决定其半径 r 的方程(见



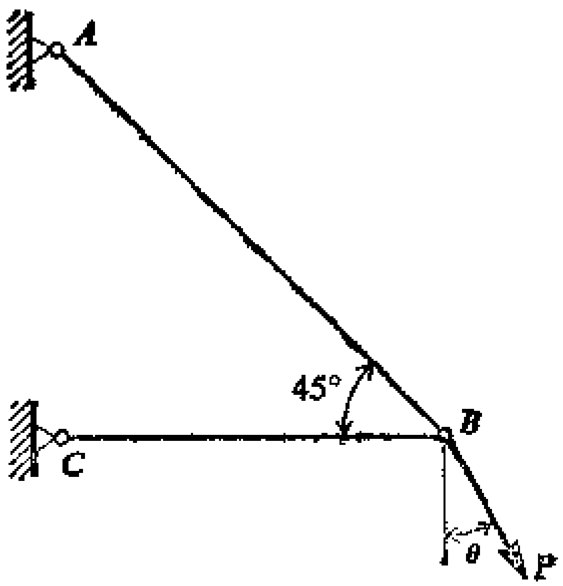
习题 1.5-8和1.5-9



习题 1.5-11

图)。墩承受加在顶面上的力 P，再加上墩身的自重。墩身材料的单位重量为 γ、容许压应力为 σ_w。还要确定墩的顶面和底面横截面积以及墩身的体积.(提示，考虑长度为 dx 的微元. 因为所有横截面上的应力必须相同，且等于 σ_w，该微元的顶面和底面截面面积之差 dA 必须补偿其压力差，此压力差等于微元自身的重量。因此 $\sigma_w dA=\gamma A dx$ 或 $dA/A=\gamma dx/\sigma_w$。将此方程的两边进行积分得出其解。)

1.5-12　如果图 1-10 a 内桁架中的 AB 杆为长度等于 3 呎、直径等于 0.125 吋的钢线 ($E_s=30\times10^6$ 磅/吋^2)，BC 杆为长度等于 5 呎，具有边宽等于 1 吋的方形截面的木撑 ($E_w=1.5\times10^6$ 磅/吋^2)，$P=400$ 磅，试确定节点 B 处位移的水平分量和竖直分量.



习题 1.5-13

1.5-13　图中所示桁架 ABC 在节点 B 处承受力 P 作用，该力与竖直线成 θ 角。AB 和 BC 杆的横

截面积分别为 A_1 和 A_2。试求使节点 B 的挠度与力 P 的方向相同时的 θ 角。

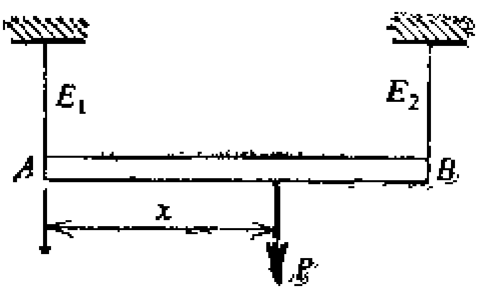
1.5-14　习题 1.3-4 中图示桁架 ABC 由长度为 L、截面积为 4.0 吋^{2}的水平钢杆和面积为 0.5 吋^{2}的钢连接杆所构成。其角度 θ 可藉改变连接杆的长度和支点 A 的竖向位置(长度 L 不变)调到所需要的值。试确定在荷载 P 作用下使节点 B 的竖直变位为最小时的 θ 角。

1.6-1　以图 1-11 a 中的 R_b 作为赘余力，试求该静不定杆的反力 R_a 和 R_b。

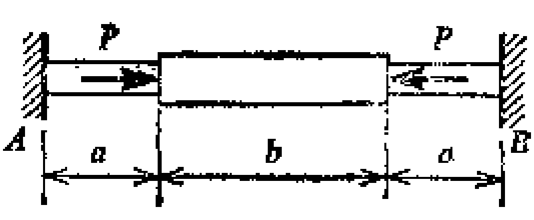
1.6-2　有一钢筋混凝土方形柱，受到轴向力 P 的压缩。如果钢筋的截面积为混凝土截面积的 1/10，而钢的弹性模量为混凝土的 10 倍，试问混凝土将承担多少荷载？

1.6-3　有一长度为 L 的杆 AB，藉连在其端头处的两根竖直吊线水平地悬挂着(见图)。这两根线具有同样的长度和同样的横截面积，但 A 端的吊线是由弹性模量为 E_1 的材料制成，而 B 端的吊线的弹性模量为 E_2。杆 AB 的自重略去不计。试导出竖直荷载 P 作用下使该杆保持水平时的距离 x 的公式(x 自 A 端度量)。

1.6-4　有一 AB 杆，其每端部分的横截面积缩小如图所示。该杆的端头为刚性固定连结，承受相等而相反的轴向力 P。假设 A_1＝靠近端头部分的横截面积，A_2＝杆的中间部分的横截面积，试确定该杆中央处的应力(应用下列数据：$P=4800$ 磅，$A_1=0.8$ 吋^2，$A_2=1.2$ 吋^2，$b=3a=15$ 吋)。



习题 1.6-3

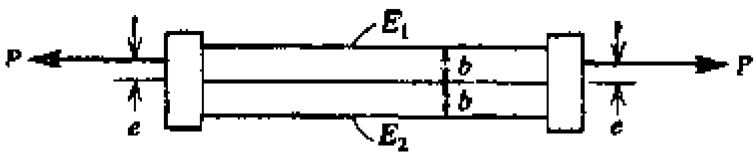


习题 1.6-4

1.6-5　有一根由 1 吋厚的金属箱所构成的方形柱，箱的外面尺寸为 10 吋×10 吋，内面尺寸为 8 吋×8 吋，其中填充混凝土。该箱的弹

性模量 $E_1=12\times10^6$磅/吋²，混凝土心的弹性模量 $E_2=2\times10^6$磅/吋²。如果金属的容许应力和混凝土的容许应力分别为 6000 磅/吋² 和 800 磅/吋²，试求柱的最大荷载 P。

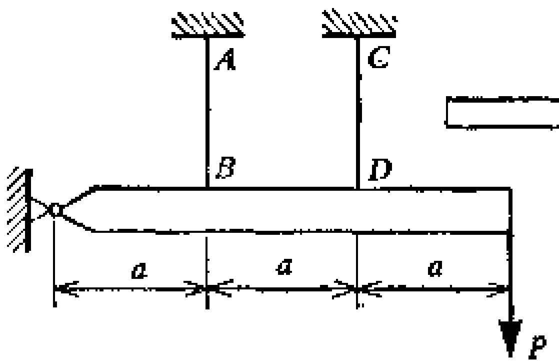
1.6-6　有一方形截面的杆，由两根不同材料的杆所构成，其弹性模量各为 E_1 和 E_2(见图)。这两根杆具有同样的横截面尺寸。假设其端板为刚性的，试导出使两杆都为均匀受拉时荷载 P 的偏心距 e 的公式(注意：假设 $E_1>E_2$)。



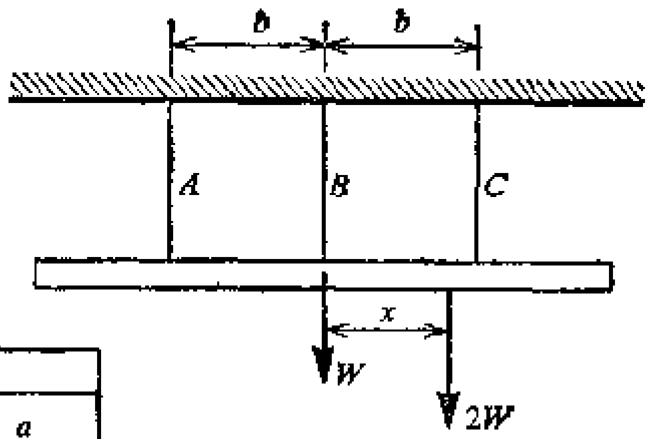
习题 1.6-6

1.6-7　如果有两根横截面积为 A 的等长吊线 AB 和 CD，以及一根刚性的水平杆(见图)，试求出吊线 AB 和线 CD 中的应力 (假设 $P=50,000$ 磅，$A=3$ 吋²)。

1.6-8　有三根相同的吊线 A、B 和 C 挂住一块刚性块体(重量 $=W$)，该块体上距其中央为 x 处作用着荷载 2 W，如图所示。试绘一图解表明三根吊线中的力 F_a、F_b 和 F_c 是怎样按 x 的函数而变(假设 x 总是为正，且可从零变到大于 b 的值)。

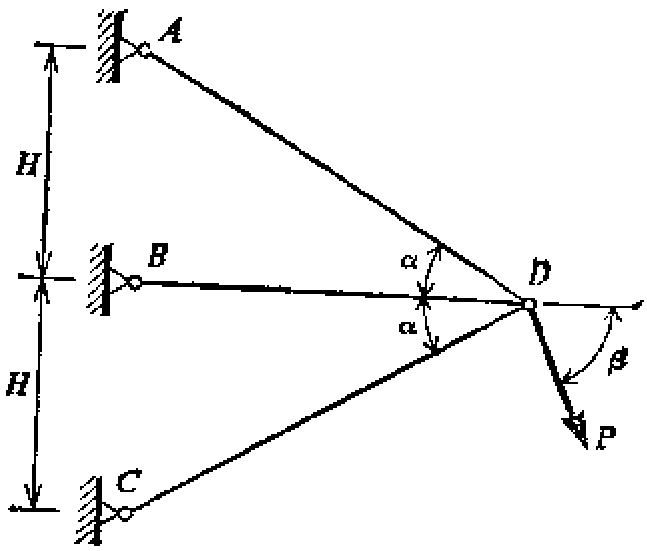


习题 1.6-7



习题 1.6-8

1.6-9 有三根具有相同轴向刚度 EA 的杆 AD、BD 和 CD，形成图中所示的桁架。如果 $\beta=90°$，试确定由于荷载 P 使这三根杆中所产生的力和节点 D 的挠度之水平分量和竖向分量。



习题 1.6-9 和 1.6-10

1.6-10 如果 $\beta=\alpha=45°$，求解上一习题。

1.7-1 有一铝管，处于温度 70°F 下，长度为 120 吋。其相邻钢管在同样温度下比铝管长 1/4 吋。试问在什么温度下，这两根管的长度将相差 1/2 吋？（假设：对于铝 $\alpha=12\times10^{-6}/°F$，对于钢 $\alpha=6.5\times10^{-6}/°F$。）

1.7-2 铁路轨道的钢轨在温度为 50°F 时焊接起来。试问如果 $\alpha=6.5\times10^{-6}/°F$ $E=30\times10^{-6}$磅/吋²，由于太阳加热至 120°F 时，钢轨中将产生多大的应力。

1.7-3 如果图 1-17a 中的嵌固杆用初始长度 $L+\Delta L$ 去替换 L，以代替温度的变化 ΔT，试问该嵌固杆的反力 R 将为多大？（假设其支承间的距离为 L。）

1.7-4 试问习题 1.6-4 中的杆降低多少温度 ΔT 才使该杆中央处的应力为零？（假设 $\alpha=14.5\times10^{-6}/°F$，$E=6\times10^{6}$磅/吋²。）

1.7-5 参阅图 1-15a 所示体系，试导出使全部荷载 P 由铜管承受时所需增加温度 ΔT 的公式（令 α_s、α_c、E_s、E_c 和 A_s、A_c 分别代表钢和铜的热膨胀系数、弹性模量和横截面积）。

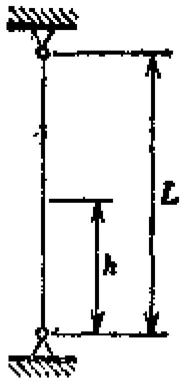
1.7-6　试求习题 1.6-7 中图示 AB 和 CD 两吊线的应力，如果 $P=50,000$ 磅，$A=3$ 吋^2，$E=30\times10^6$ 磅/吋^2，$\alpha=6.5\times10^{-6}/°F$，且两吊线均增加温度 60°F。

1.7-7　有三根相邻平行的钢杆($E=30\times10^6$ 磅/吋^2) 共同承受拉伸荷载 $P=250$ 千磅。每一杆的横截面积为 6 吋^2，长度为 20 呎。如果中间的杆意外地较另两杆要短 0.03 吋，试问当荷载作用时中间杆的应力 σ 为多少？(假设当荷载作用时，诸杆的杆端均拉伸对齐。)

1.7-8　有一竖直缆索(见图)初加应力的拉力为 1000 磅。接着，有一荷载 1500 磅悬挂于缆索上高出基面 h 处。研究当 h 从 0 变至 L 时，缆索中的力。假设缆索不能承受压力。

1.7-9　如果图 1-13 a 中所示桁架的温度均匀地增高 ΔT，试求该桁架杆中的力 F_1 和 F_2 (假设所有杆的轴向刚度均为 EA. $P=0$)。

1.7-10　图示杆 B 的长度为 L，弹性模量为 E，横截面积为 A。有两根带有紧线器的缆索附于穿过杆头的粗钉上。每根缆索的长度为 L，弹性模量为 E_c，横截面积为 A_c。双作用紧线器的螺纹距为 p。试导出使杆 B 预加应力至均匀应力 σ_0 时每一紧线器旋转数 n 的公式。

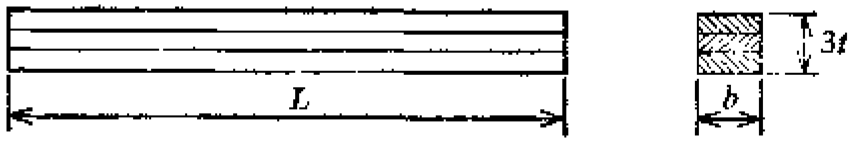


习题 1.7-8



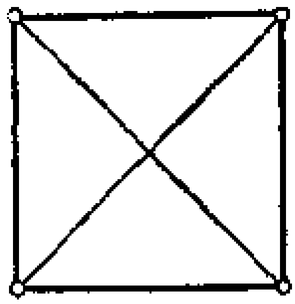
习题 1.7-10

1.7-11　有一根由铜心夹以两块钢窄条组成的双金属杆(见图)，均匀加热 T 度。假设杆的宽度为 b，长度为 L，每一层的厚度为 t，试确定钢和铜中的应力。还要绘出三层中每一层的自由体图解(注意：钢和铜的热膨胀系数分别为 α_s 和 α_c，而且 $\alpha_c>\alpha_s$。其弹性模量为 E_s 和 E_c)。



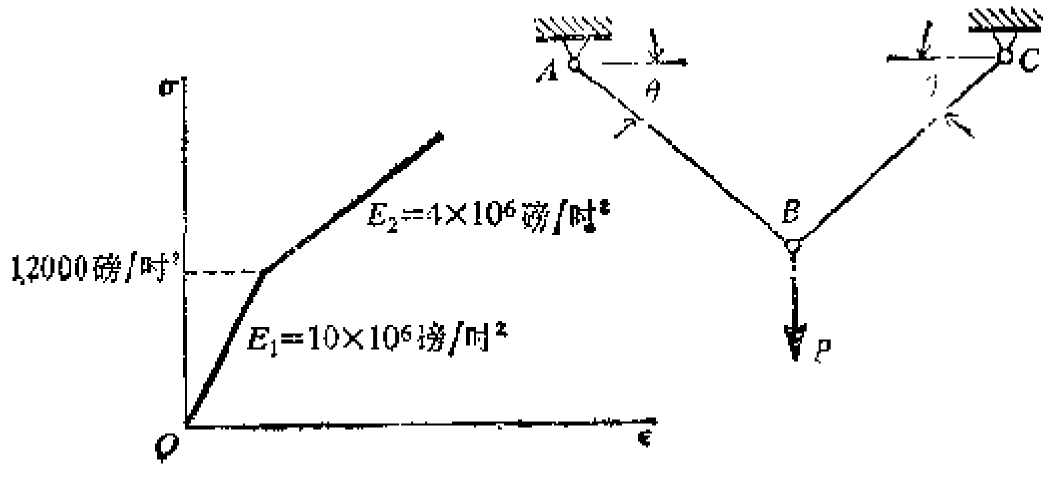
习题 1.7-11

1.7-12　图中所示方形框架的外侧杆由铝制成 ($E_a = 10\times10^6$ 磅/吋^2, $\alpha_a = 12\times10^{-6}/°F$)，其对角线为钢线 ($E_s = 30\times10^6$ 磅/吋^2, $\alpha = 6.5\times10^{-6}/°F$)。铝杆与钢线横截面积之比为 20:1。如果框架温度升高 80 °F，试求钢线中的应力。



习题 1.7-12

1.8-1　有两根相同的杆 AB 和 BC（见图），支承着竖直荷载 P。杆的材料的应力-应变曲线见图中第二部分，它可近似地以两根直线表示。每一根杆的横截面积 $A=2.0$ 吋^2，每一根杆的长度 $L=150$ 吋。角度 θ 为 30°。试求在下列每一荷载作用时节点 B 的竖直挠度 δ_b：$P=8$ 千磅，16 千磅，24 千磅，32 千磅，40 千磅。根据这些结果绘出表示 P 和 δ_b 的关系图。



习题 1.8-1

1.8-2　假设上一习题中图内所示桁架 ABC 由这样一种材料构成，这种材料的应力-应变关系用方程 $\sigma^n = B\epsilon$ 来表示，其中 B 和 n 均为

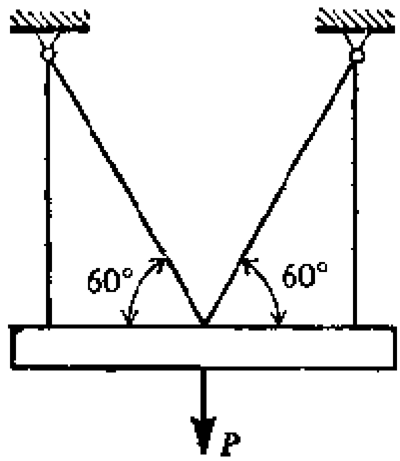
常数。试导出用参数 P A, L, θ, B 和 n 表示节点 B 的挠度 δ_b 的方程。

1.8-3　有一简单桁架 ABC(见图1-10a) 承受荷载 $P=28$ 千磅．假设杆子材料的应力-应变图已给于习题 1.8-1 中 (同一图解可用于拉伸和压缩)。杆 AB 和 BC 的横截面积分别为 1.5 吋^2 和 3.5 吋^2，它们的长度分别为 36 吋和 60 吋．试确定桁架节点 B 的挠度的水平分量和竖直分量。

1.8-4　试求上端悬挂着的竖直杆由于自重产生的伸长量 δ，如果材料的应力-应变关系为 $\sigma^n=B\epsilon$,式中 B 和 n 均为常数。(将 δ 表达为杆长 L、材料单位重量 γ, 以及 B 和 n 的函数。)

1.8-5　有一上端悬挂着的竖直长杆，其下端承受荷载 P 的作用。杆的材料具有习题 1.8-1 所给的应力-应变曲线．试求杆由于自重和力 P 共同作用所产生的伸长量。假设 $\gamma=380$ 磅/呎^3, $A=1.5$ 吋^2, $L=1200$ 呎, $P=14,000$ 磅。

1.8-6　有一荷载 P,为刚性块件所承受,该块件由四根对称排列的吊线悬挂着，如图所示．每一根吊线的横截面积为 A，它由弹-塑性材料制成。试求极限荷载 P_u。



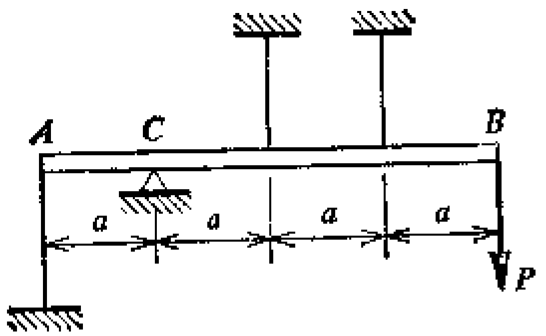
习题 1.8-6

1.8-7　试求图 1-19a 中所示桁架的根限荷载 P_u，假设材料是弹-塑性的，竖直线的横截面为斜线的两倍。假设 $\sigma_y=36,000$ 磅/吋^2, $\beta=60°$, 竖直线的横截面积为 1.8 吋^2。

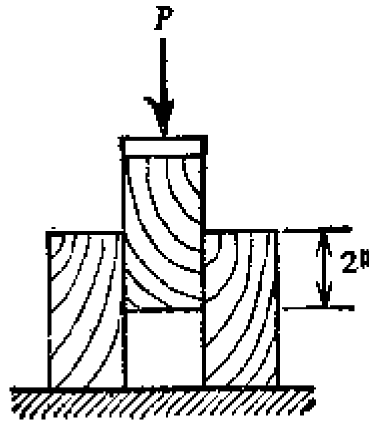
1.8-8　参照图 1-10a 中所示的桁架 ABC，假设它是设计用来承受极限荷载 $P_u=20,000$ 磅的。如果材料是弹-塑性者，其屈服应力为 33,000 磅/吋^2(假设 $\theta=30°$)。试求杆 AB 和 BC 所需要的最小截面积。

1.8-9　有一刚杆 AB 支于 C 处的支点上，并由三根弹-塑性材料制成的相同吊线所拉住,而在 B 端承受荷载 P(见图)。试求屈服荷载 P_y 和极限荷载 P_u。假设所有吊线的横截面积均为 A。

1.9-1　有三个木块象图所示那样排列胶合起来．每一木块具有



习题 1.8-9



习题 1.9-1

相同的横截面积(见图)，其垂直图面方向的长度为 8 吋。如果荷载 P 等于 20,000 磅，试问在胶合连接处的平均剪应力有多大?

1.9-2 试求图 1-22 a 所示联结件中螺栓所需要的直径，如果 $P=8000$ 磅，螺栓的容许剪应力 $\tau_w=13,000$ 磅/吋²。

1.9-3 有一直径为 0.75 吋的冲孔机在 1/4 吋厚钢板上以 26,000 磅的力冲一孔。试求板中的直接剪应力和冲孔机中的平均压应力。

1.9-4 有两根轴(直径为 1 吋)在同一直线上，它们的端头对在一起借套筒连接起来，套筒正好通过连接点。套筒分别借一个直径为 1/4 吋的钉子固定于每一杆上，钉子穿过套筒和轴并与轴的轴线形成直角。如果借轴传送的扭矩为 300 吋-磅，试问钉中的剪应力有多大?

1.9-5 有一实心圆形铝杆装于长度相同的铜管内。铜管的外径为 2 吋，内径为 1.8 吋，铝杆的直径为 1.75 吋。在组件的每一端处，有一直径为 1/4 吋的金属钉穿过杆与管并与其轴线相垂直。如果温度升高 40°F，试求钉中的平均剪应力(对于铝，$E=10\times10^6$ 磅/吋², $\alpha=12\times10^{-6}/°F$；对于铜 $E=15\times10^6$ 磅/吋², $\alpha=9.3\times10^{-6}/°F$)。

1.10-1 有一长度为 10 吋的棱柱形钢杆，受到力 $P=6000$ 磅的压缩，假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋²，如果杆的横截面积 $A=4$ 吋²，和 $A=2$ 吋²时，试计算杆中所储存的应变能量。

1.10-2 如果图 1-7 中杆子的横截面积为 A，弹性模量为 E，试确定杆中的应变能。

1.10-3　假设有一竖直悬挂的棱柱形杆，长度为 L，横截面积为 A，弹性模量为 E，杆的单位体积重量为 γ，试确定该杆在自重作用下的应变能。

1.10-4　如果上一习题中除了杆的重量外，其下端还承受轴向荷重 P，试确定杆中的应变能。

1.10-5　试求习题 1.5-7 中所述旋转杆在 $W=0$ 时所储存的应变能。

1.10-6　借使锥形杆中储存的应变能 U 等于荷载 P 所做的功 $P\delta/2$，来求解习题 1.5-8。

1.10-7　有一重量 W 置于长度为 L、横截面积为 A 的柔性线的一端处。线的另一端挂于固定支承上。然后该重量自支承水平面往下掉，在线的整个长度上自由降落。试导出线中最大应力 σ 的公式。假设当下落的重量停止时线为弹性伸长，并假设线的长度与其伸长量相比要长得多。

1.10-8　有一重量 $W=1000$ 磅从高度 $h=3$ 呎处落到长度为 20 呎、直径为 12 吋的竖直木杆上，假设杆的下端固定。如果 $E=1.5\times10^6$ 磅/吋^2，试确定杆中的最大压应力。（杆的重量和冲击中能量的损失均略去不计，还假设 δ_{st} 与 h 相比是很小的。）

1.10-9　对于图 1-26 所示体系，试确定当重量 W 下落使杆中产生最大应力 $\sigma=30{,}000$ 磅/吋^{2}时所经过的高度 h。假设 $W=25$ 磅，$L=6$ 呎，$A=0.5$ 吋^2，$E=30\times10^6$磅/吋^2。

1.10-10　参照第 1.10 节中的例题 2，假设有一弹簧常数为 k（力/单位距离）的弹簧安装于缆索端头与重量 W 之间。试导出缆索在此新条件下最大应力的公式，并与方程(b)进行比较。试问由于弹簧的缘故应力是增加还是减小？

第二章　应力和应变的分析

2.1　斜平面上的应力

当棱柱形杆承受单纯拉力时(图2-1 a)，在垂直于杆轴线的横截面 mn 上，应力为均匀分布，且等于 P/A，如第 1.2 节所述．现在让我们研究切开杆而与横截面 mn 成 θ 角的斜平

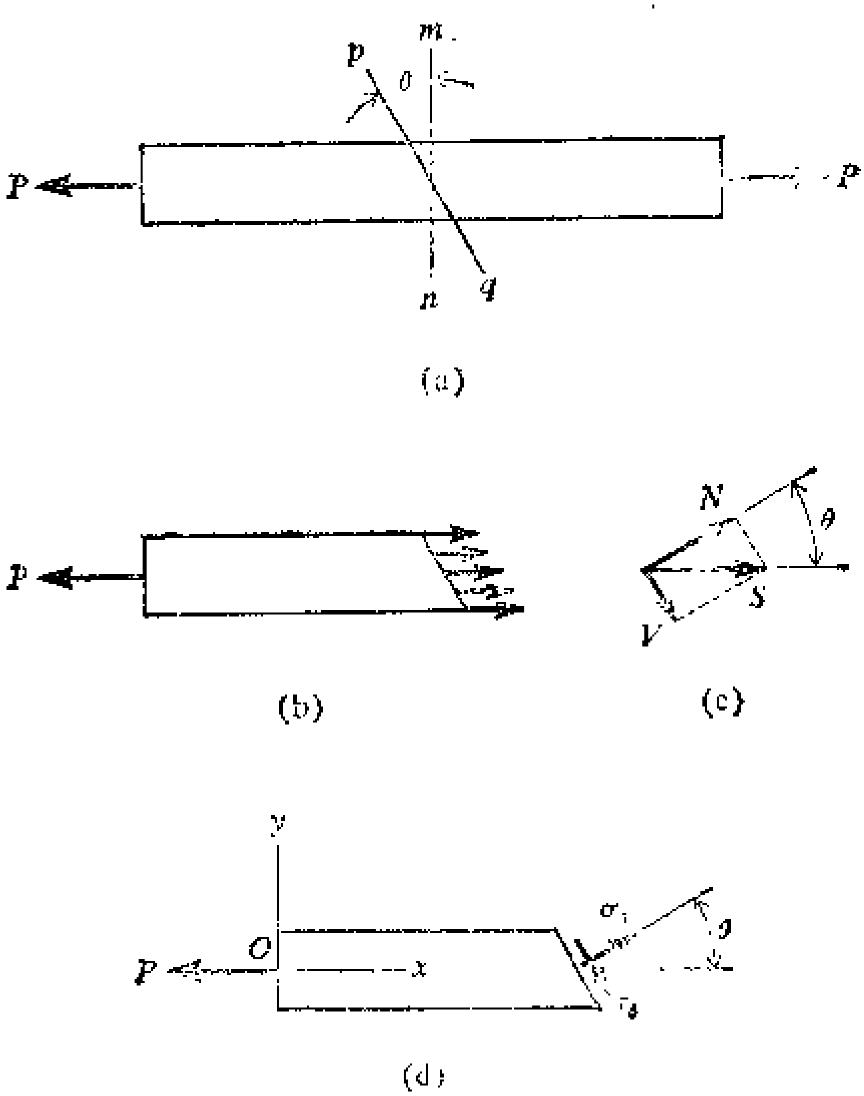


图 2-1　受拉杆斜平面上的应力

面 pq 上的应力．由于所有纵向纤维具有相同的轴向应变，所以代表杆的右边部分对左边部分所作用的力，必须沿整个斜截面 pq 成均匀分布．杆的左边部分在这些力和外荷载 P 的作用下处于平衡(图 2-1 b)．因此，分布于整个斜截面上诸力的合力 S 等于 P．此力 S 可再分解为分别垂直和平行于斜平面的两个分力N和 V(图 2-1 c)．这些分力为：

$$N = P\cos\theta \qquad V = P\sin\theta$$

因为斜截面的面积 A' 等于 $A/\cos\theta$，所以相应于 N 和V 的应力分别为

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A'} = \frac{P}{A}\cos^2\theta = \sigma_x\cos^2\theta \qquad (2\text{-}1\ \text{a})$$

$$\tau_\theta = \frac{V}{A'} = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta = \sigma_x\sin\theta\cos\theta \qquad (2\text{-}1\ \text{b})$$

式中 $\sigma_x = P/A$ 为垂直于杆轴的横截面上顺 x 方向的应力．斜平面 pq(见图 2-1 d)上的法向应力 σ_θ 和切向应力 τ_θ 在整个截面上为均匀分布．注意：斜平面的方向由 θ 角来确定，θ 角从 x 轴到该平面的法线来度量．

方程(2-1 a)说明当斜截面按各种角度切开时，其法向应力 σ_θ 是怎样变化的．当 $\theta=0$ 时，平面 pq 与横截面 mn 相吻合．我们得 $\sigma_\theta=\sigma_x$，这是预想得到的．而当 θ 增大时，应力 σ_θ 减小，待 $\theta=\pi/2$ 时，它变为零，这表示杆的纵向纤维之间没有法向应力．因此，我们看出：法向应力的最大值发生在 $\theta=0$ 的时候，它为

$$\sigma_{max} = \sigma_x \qquad (2\text{-}2)$$

从方程(2-1 b)，我们看出：当 $\theta=0$ 和$\theta=\pi/2$ 时，剪应力 τ_θ 为零，而当 $\theta=\pi/4$ 时，剪应力达到最大值．这个最大值为

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2} \qquad (2\text{-}3)$$

虽然最大剪应力为最大法向应力的一半，但如果材料抗剪比抗拉弱得多，有时它会成为承受轴向荷载的杆的控制应力。例如，表面磨光的低碳钢平直杆件在拉伸试验时，其杆件平直边上出现与其轴线形成近于45°的明显滑动带（图2-2a）。这些滑动带表明材料已在剪应力最大的面上被切剪破坏。这种滑动带是G.皮阿伯特(G. Piobert)于1842年和W.卢德斯(W. Lüders)于1860年首先观察到的（见参考文献2-1至2-4），现在它们被称为卢德斯带或皮阿伯特带。当杆到达屈服应力时(图1-2a中的B点）它们开始出现。剪切破坏的另一个例子见于图2-2b中，

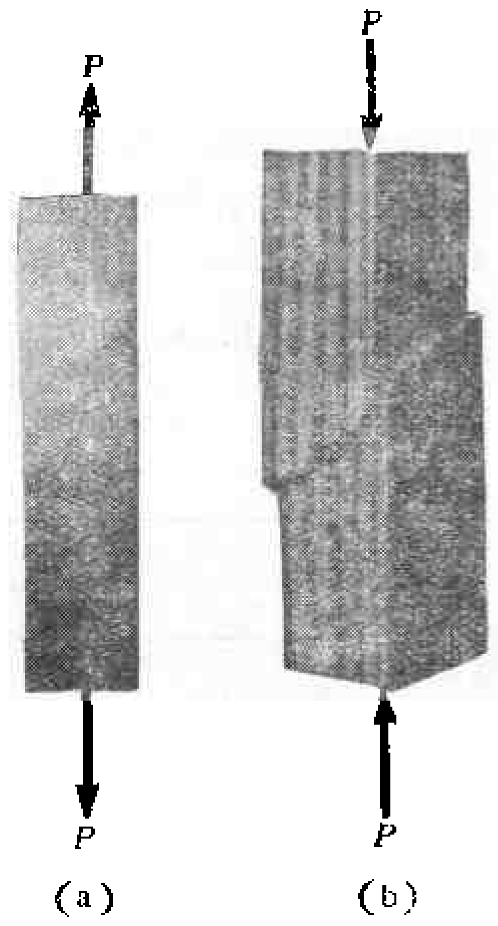


图 2-2 (a) 轴向受拉下钢杆中的滑动带；(b) 受压下木块的破坏

该图表示承受轴向压缩的短木块沿45°平面剪切破坏。

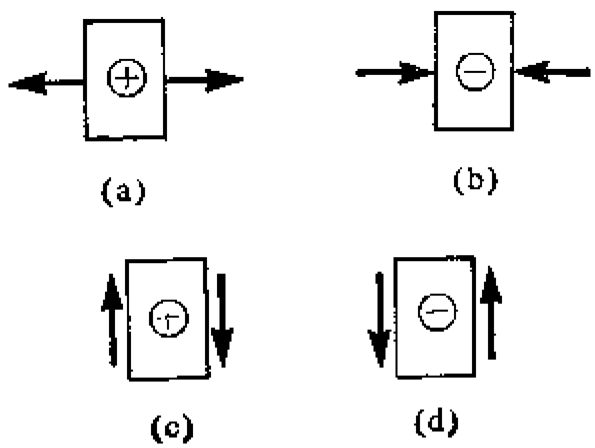


图 2-3 法向应力σ_θ和剪应力τ_θ的正负号规则

对于受拉杆所导出的方程(2-1)，若给σ_x加一个负号，就还可以用于轴向压缩情况。于是我们得知，θ值位于0和$\pi/2$之间时σ_θ和τ_θ均为负值。对于σ_θ，其

负号意味着法向应力是压应力，而对于 τ_θ，负号意味着它所作用的方向与图 2-1d 所示的方向相反。图 2-3 表示法向应力和剪应力的正负号规则。无论材料截面的方位如何，背离材料面的方向作用的法向应力为正，朝着材料面作用的法向应力为负。对材料截面成顺时针方向作用的剪应力 τ_θ 为正，反时针方向作用的 τ_θ 为负。

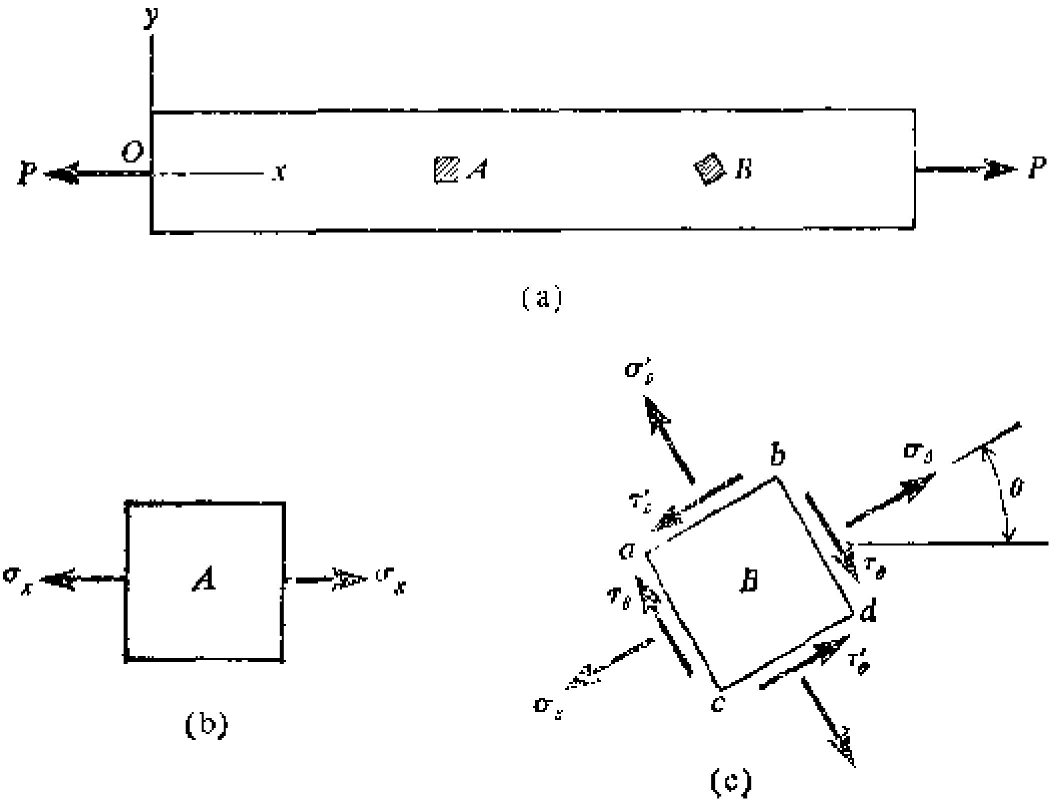


图 2-4 作用于从拉杆中切出的单元 A 和 B 上的应力

用来表示杆中某一点应力的便利方法，是取材料的微小单元作为自由体，然后画出该单元所有边上的应力。例如，从受拉杆中切出两个单元 A 和 B，如图 2-4 所示。A 处的单元按 $\theta=0$ 确定其方位，因此作用于该单元上仅有的应力为 $\sigma_x=P/A$。第二个单元转过了 θ 角，所以在此单元 bd 边上的应力为 σ_θ 和 τ_θ，可按方程(2-1)算出。该单元 ab 边的法线方位按与 x 轴成 $\theta+\pi/2$ 的角来确定，所以，我们将 $\theta+\pi/2$ 代入

方程(2-1)中的 θ 可以求出此平面上的应力：

$$\sigma_\theta' = \sigma_x \cos^2(\theta + \pi/2) = \sigma_x \sin^2\theta \tag{2-4 a}$$

$$\tau_\theta' = \sigma_x \sin(\theta + \pi/2)\cos(\theta + \pi/2) = -\sigma_x \sin\theta\cos\theta \tag{2-4 b}$$

因为本例中 σ_x 为正，我们看出法向应力 σ_θ' 也为正，如图2-4c所示. 在单元的 ab 边上，其剪应力 τ_θ' 为负，意味着它对单元表面成反时针方向作用，如图所示。

从比较方程(2-1)和(2-4)，可以观察出在彼此成直角的平面上其应力之间的两个有趣关系. 根据这些方程，我们看到

$$\sigma_\theta + \sigma_\theta' = \sigma_x \tag{2-5}$$

$$\tau_\theta' = -\tau_\theta \tag{2-6}$$

这些关系式中的第一个关系式表明：对于受拉杆，两个互相垂直平面上的法向应力之和保持不变，且等于 σ_x；第二个关系式表明：在两个互相垂直平面上的剪应力数值相等但符号相反. 这后一个结论在前面第1.9节中已经观察到.

继续采用这样的方式，我们可以得到图2-4c中该单元剩下两个边 ac 和 cd 上的应力. 对于 ac 边，其法线角为 $\theta+\pi$，对于 cd 边，其角为 $\theta+3\pi/2$. 因此，我们发现 ac 边上的法向应力和剪应力与 bd 边相同，cd 边上的应力与 ab 边相同.

当对一个边上的应力，如 cd 边，进行数字计算时，有时藉用负方向度量 θ 角(即从 x 轴顺时针方向度量)来定义该平面的位置，要比用270°与360°之间的正角较为方便. 例如，假设图2-4c中的 θ 角等于30°，可取30°+270°=300°或取−60°作为定义 cd 平面的角，用于方程(2-1)。

2.2 双轴应力

现在，让我们讨论单元上作用有顺 x 和 y 两个方向的应

力这样一种较为普遍的应力状况(图 2-5 a)．这种应力状况称为**双轴应力**，以区别于上节中所讨论的一维应力或单轴应力状况．双轴应力出现于受压力的容器、梁、轴以及许多其它结构部件的分析中，其中有一些将会在后面讨论中碰到．现在，我们对弄清作用于法线与 x 轴成 θ 角的斜面 pq 上的法向应力和剪应力感到兴趣(图 2-5 a)．作用于该斜面上的应力有法向应力 σ_θ 和剪应力 τ_θ，如图 2-5 b 所示．这些应力连同应力 σ_x 和 σ_y 一起，可以看作作用于从原来矩形单元所切出的微小三角形单元边上的．

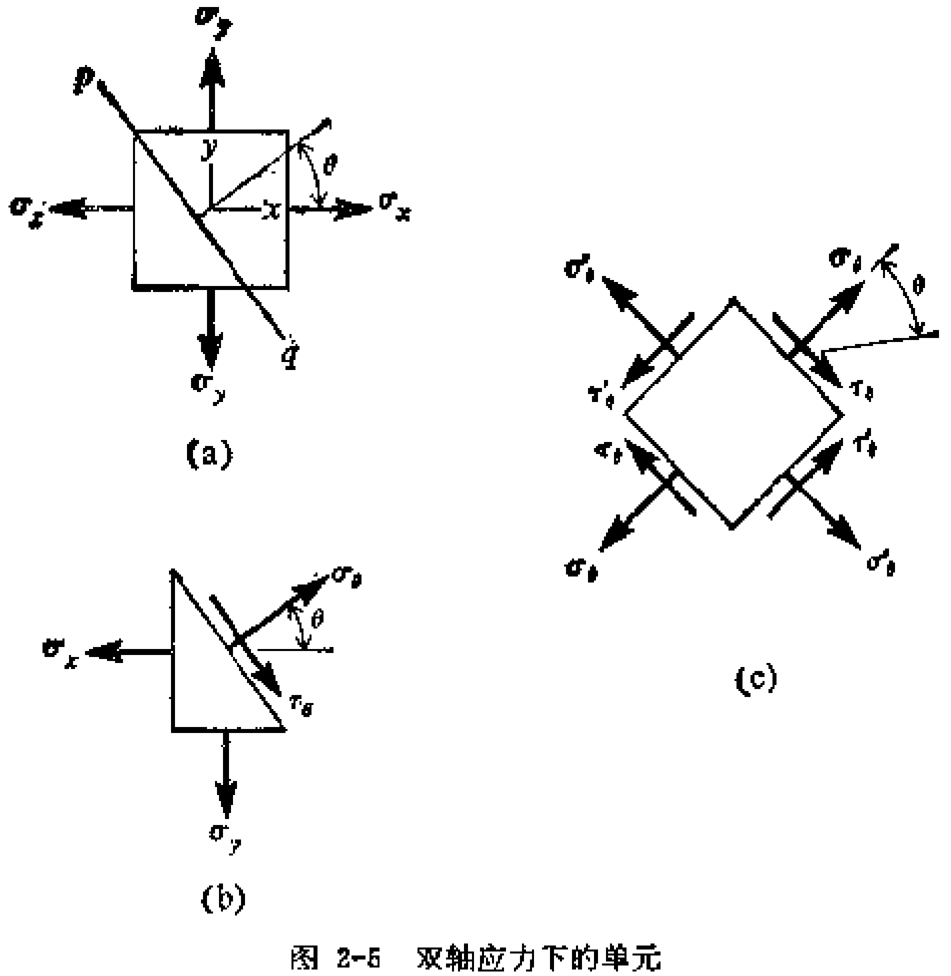


图 2-5　双轴应力下的单元

为了确定作用于斜平面上的应力 σ_θ 和 τ_θ，我们将讨论三角形单元的平衡．如果我们用 A 代表单元的 x 面(亦即 σ_x 所作用的面)的面积，那么，单元 y 面的面积为 $A\operatorname{tg}\theta$，斜面的

面积为 $A\sec\theta$. 因此，x 面上的总力为 $\sigma_x A$, y 面上的总力为 $\sigma_y A\operatorname{tg}\theta$. 这些力中的每一个力均可以分解为两个成正交的分力，其中一个分力顺斜平面的法线方向作用，另一个平行斜平面作用. 于是我们可顺这些方向将诸力加起来，得到三角形单元的两个平衡方程. 顺 σ_θ 方向将诸力加起所得的第一个方程为：

$$\sigma_\theta A\sec\theta=\sigma_x A\cos\theta+\sigma_y A\operatorname{tg}\theta\sin\theta$$

从它得到

$$\sigma_\theta=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta \qquad (2\text{-}7a)$$

用同样方式，我们可将顺剪应力 τ_θ 方向的诸力加起来：

$$\tau_\theta A\sec\theta=\sigma_x A\sin\theta-\sigma_y A\operatorname{tg}\theta\cos\theta$$

或

$$\tau_\theta=(\sigma_x-\sigma_y)\sin\theta\cos\theta \qquad (2\text{-}7b)$$

按方程(2-7)可分别得出以 x 方向法向应力 σ_x 和 y 方向法向应力 σ_y 表示的任一斜平面上的法向应力和剪应力的代数值。采用下列三角关系：

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \qquad \sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

我们可以写成另一种形式的方程：

$$\sigma_\theta=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta \qquad (2\text{-}8a)$$

$$\tau_\theta=\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta \qquad (2\text{-}8b)$$

注意：方程(2-7)和(2-8)中 σ_θ 和 τ_θ 所采用的正负号规则与上节相同(见图 2-3)。

如果我们用 $\theta+\pi/2$ 代替方程(2-8)中的 θ，我们得到在与 σ_θ 和 τ_θ 所作用斜面成直角的平面上的应力 σ_θ 和 τ_θ 之表

达式(见图 2-5 c),其方程如下:

$$\sigma'_\theta=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)-\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta \qquad (2\text{-}9a)$$

$$\tau'_\theta=-\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta \qquad (2\text{-}9b)$$

将这些方程中的第一个方程与方程(2-8 a)结合起来,我们看出:

$$\sigma_\theta+\sigma'_\theta=\sigma_x+\sigma_y \qquad (2\text{-}10)$$

上式再次表明:任意两个互相垂直平面上的法向应力之和为一常数。此外,比较方程(2-8 b)和(2-9 b),再次表明:在两互相垂直面上的剪应力大小相等,但符号相反(见方程 2-6)。

当图 2-5 c所示的单元从$\theta=0$旋转到$\theta=\frac{\pi}{2}$时,其法向应力σ_θ从σ_x变到σ_y(见方程 2-8 a),从而,这两个应力中的一个是σ_θ的最大值,而另一个是最小值。这种最大法向应力和最小法向应力称为主应力,而主应力所作用的两个互相垂直的平面称为主平面。从图 2-5 a 我们看到主平面上是没有剪应力的。

当$\theta=0$时,剪应力τ_θ为零;当$\theta=\frac{\pi}{4}$时,τ_θ则增大到最大值(见方程 2-8 b)。其最大剪应力为:

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \qquad (2\text{-}11)$$

亦即,最大剪应力等于主应力差之半。如果σ_x和σ_y相等,那么任一斜平面上都将没有剪应力。

上面最大剪应力的讨论仅涉及平行于 z 轴的斜平面(例如图 2-5 a 中的平面 pq)上的剪应力。我们一定不要忽视这样一个事实,就是图 2-5 a 中的单元实际上是三维的,而顺 z 方向的应力 σ_z 等于零。平行于 x 轴或 y 轴的斜平面也可以切过单元,且可能在一个或多个这样的面上

存在大于方程(2-11)所得出的剪应力。这种三维情况下最大剪应力的确定在后面三轴应力一节中(第2.7节)加以叙述。

上面有关双轴应力的所有方程，不论σ_x和σ_y是拉力还是压力，都是能成立的。为了应用这些方程，只需要将所有应力根据已经讨论过的正负号规则按代数量处理就可以了。此外，将注意到，当令σ_y等于零时，双轴应力的方程便简化成单轴应力的方程。

双轴应力下的应变 在双轴应力下，单元顺x方向的应变(图2-5a)不仅与x方向的应力σ_x有关，而且还与y方向的应力有关(由于第1.4节所述的泊松效应的缘故)。假设材料服从虎克定律，我们看出顺x方向由于σ_x所产生的应变为σ_x/E，而由于σ_y产生的应变为$-\nu\sigma_y/E$。因此，如果应力σ_x和σ_y同时作用，那么顺x方向的应变为

$$\epsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y) \tag{2-12a}$$

类似地，我们得出顺y方向的应变为：

$$\epsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x) \tag{2-12b}$$

此外，顺z方向的应变为：

$$\epsilon_z=-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \tag{2-12c}$$

根据方程(2-12a和b)，应力σ_x和σ_y可作为应变ϵ_x和ϵ_y的函数求得如下：

$$\sigma_x=\frac{(\epsilon_x+\nu\epsilon_y)E}{1-\nu^2} \qquad \sigma_y=\frac{(\epsilon_y+\nu\epsilon_x)E}{1-\nu^2} \tag{2-13a, b}$$

这些方程可用于应变ϵ_x和ϵ_y为已知的情况下(例如，根据应变测量仪测得)去求出应力σ_x和σ_y。

双轴应力下，弹性材料单位体积的改变，可藉考虑该单元

顺 x、y 和 z 方向的尺寸分别按比值 $(1+\epsilon_x):1$，$(1+\epsilon_y):1$ 和 $(1+\epsilon_z):1$ 增大来求得。因此，杆的体积所增大的比值为：

$$(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z):1$$

若略去高阶微量，得：

$$(1+\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z):1$$

从这个表达式看出，单位体积的变化为：

$$\frac{\Delta V}{V}=\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z \tag{2-14}$$

将方程(2-12)代人此方程中，我们得到双轴应力下单位体积变化的下列表达式：

$$\frac{\Delta V}{V}=(\sigma_x+\sigma_y)(1-2\nu)/E \tag{2-15}$$

如果 $\sigma_y=0$，此方程则简化为单轴应力下单位体积变化的方程(1-7)。

2.3 纯剪

现在让我们讨论双轴应力的一种特定情况，在这种情况下，应力 σ_x 为拉应力，而应力 σ_y 为压应力，二者的大小相同，因此

$$\sigma_x=-\sigma_y=\sigma_0 \tag{2-16}$$

如图 2-6a 所示。单元中最大剪应力发生于 $\theta=45°$ 的斜面上，正如上节所说明的那样，其值如下(见方程 2-11)：

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}=\sigma_0 \tag{2-17}$$

此剪应力示于图 2-6b 中。作用于此单元边上的法向应力可用 $\theta=45°$ 代人方程(2-8a)和(2-9a)求得为 $\sigma_\theta=\sigma_{\theta'}=0$。这样，我们发现：图 2-6b 中的单元只承受剪应力，所以，它处于纯剪状态(见第 1.9 节)。我们还看到纯剪相当于一个方向

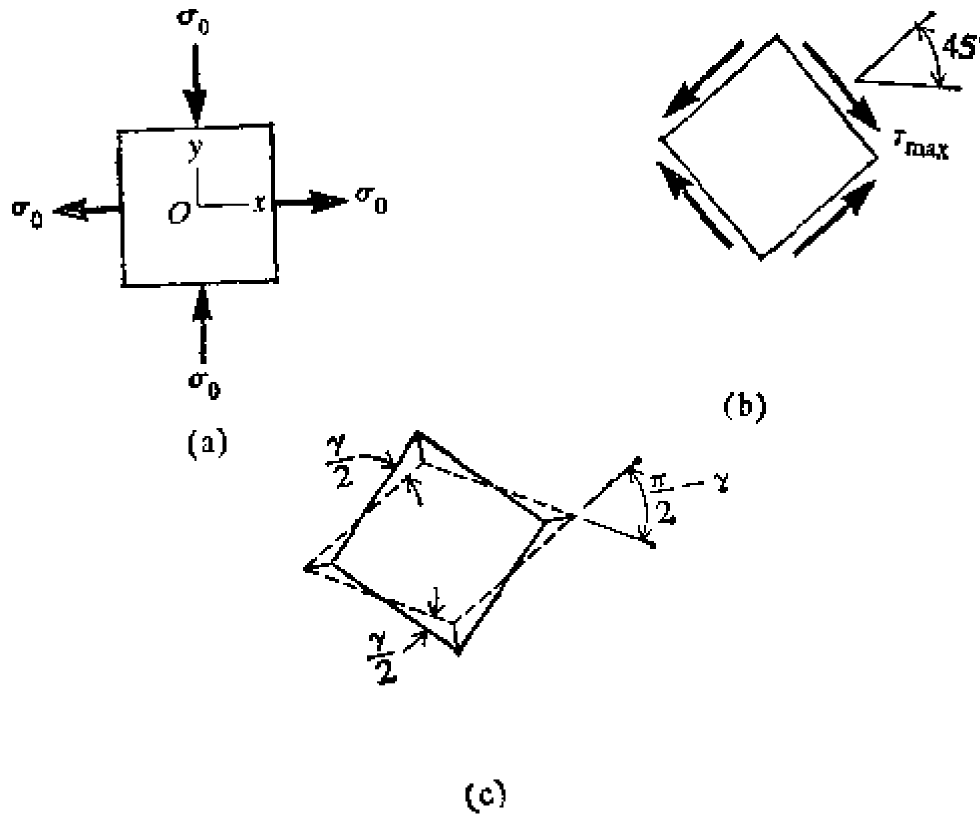


图 2-6　纯剪下的单元

为拉应力另一垂直方向为相等压应力所形成的应力状态。当然，如果我们讨论旋转角 θ 不是 45°的单元，那么在单元各边上将产生法向应力和剪应力，这些应力仍可按方程(2-8)和(2-9)来求得。

纯剪时单元的变形示于图 2-6 c 中。单元的边长不变，因为顺 45° 方向上没有法向应力，但是单元的水平对角线伸长，而竖直对角线缩短。因为水平对角线线端处的直角减小或竖向对角线线端处的直角增大，图中呈现等于 τ_{max}/G 的剪切应变 γ。该单元任一边的原来位置与其最后位置之间的夹角等于$\frac{\gamma}{2}$。

图 2-6 c 中单元的对角线长度的变化藉应变 ϵ_x 和 ϵ_y 来确定，这些应变可以用上节中的方程(2-12)来计算。同时，我

们从图中看到这些长度的变化与剪切应变 γ 形成几何关系。所以，可以得出结论：剪切模量 G 是与弹性模量 E 和泊松比 ν 有关。

为了建立这种重要的关系，我们首先观察出水平对角线长度的增长量 Δd 为：

$$\Delta d=\epsilon_x d \tag{a}$$

式中 d 为对角线的原来长度。假设该单元为正方形，我们根据图 2-6c 的几何图形看出：水平对角线长度的增长还等于：

$$\Delta d=\frac{\gamma d}{2} \tag{b}$$

亦即，Δd 等于单元顶面(或底面)处直角的增大值 γ 乘以竖向对角线长度的一半。于是，根据方程(a)和(b)，我们得到纯剪时单元的应变

$$\epsilon_x=\frac{\gamma}{2} \tag{c}$$

根据方程(2-12a)和(2-16)，我们得到 ϵ_x 的下列表达式：

$$\epsilon_x=\frac{\sigma_0}{E}(1+\nu)$$

将 ϵ_x 的这个结果代入方程(c)，还将 τ_{max}/G(等于 σ_0/G)代进去替代 γ，我们得到：

$$\frac{\sigma_0}{E}(1+\nu)=\frac{\sigma_0}{2G}$$

或

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2-18}$$

此关系表明 E、G 和 ν 不是独立的材料特性。例如，对于钢，如果我们假设 $\nu=0.30$，$E=30\times10^6$磅/吋^2，那么由方程

(2-18)得出 $G=11.5\times10^6$磅/吋²。[1]

2.4 双轴应力的莫尔圆

当材料承受双轴向应力时（见图 2-5），作用于斜平面上的应力 σ_θ 和 τ_θ 的方程可用图解方式方便地表示出来。为了说明图解的作图，我们先引进下面符号：

$$\sigma_{aver}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \tag{2-19}$$

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \tag{2-20}$$

式中 σ_{aver} 为作用于单元边上法向应力的平均值，τ_{max} 为最大剪应力。用这些符号，我们可将 σ_θ 和 τ_θ 的方程(2-8) 重新写成如下形式：

$$\sigma_\theta-\sigma_{aver}=\tau_{max}\cos2\theta$$

$$\tau_\theta=\tau_{max}\sin2\theta$$

这两个方程是用 2θ 角作为参数时以参数形式表示的圆的方程。将这些方程的两边进行平方，然后将它们加起来，消去参数，从而：

$$(\sigma_\theta-\sigma_{aver})^2+\tau_\theta^2=\tau^2_{max} \tag{2-21}$$

这是以 σ_θ 和 τ_θ 作为独立变数而半径等于 τ_{max} 的圆的方程。以 σ_θ 为横坐标，以 τ_θ 为纵坐标，将此圆绘于图2-7 中。圆心 C 的坐标为：$\sigma_\theta=\sigma_{aver}$，$\tau_\theta=0$，这可从方程 (2-21) 看出来。此图解的绘制是德国

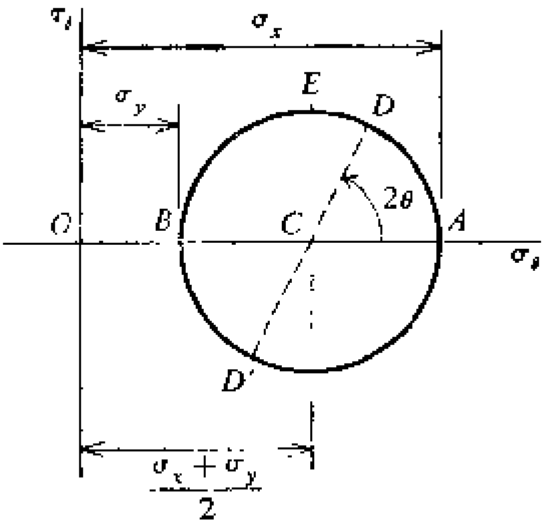


图 2-7 双轴应力的莫尔圆

1) 方程(2-18)是泊松导出的，他采用 ν 值为 $\frac{1}{4}$(参考文献 2-5)。

工程师奥托·莫尔 (Otto Mohr)于 1882 年首先提出来的(参考文献 2-6)，所以称为**莫尔圆**.

我们先观察莫尔圆上 A 点的坐标：

$$\sigma_\theta=\sigma_{aver}+\tau_{max}=\sigma_x \text{ 和 } \tau_\theta=0$$

它们代表单元 x 面上的应力 ($\theta=0$)。 类似地， 圆上 B 点的坐标为 $\sigma_\theta=\sigma_y$ 和 $\tau_\theta=0$，它们代表单元 y 面上的 应 力 ($\theta=90°$)。

现在让我们讨论圆上任意选择的 D 点，该 点 按 照 从 A 点 (此处 $\theta=0$) 度量的 2θ 角来确定。 D 点的坐标 σ_θ 和 τ_θ 可根据圆的几何图形求得如下：

$$\sigma_\theta=OC+CD\cos 2\theta=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta$$

$$\tau_\theta=CD\sin 2\theta=\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta$$

将这些表达式与方程(2-8)比较，显然 D 点的坐标表示图 2-5 中以 θ 角所定义的斜平面上的应力 σ_θ 和 τ_θ。 然而，要注意：当确定**D 点**位置时，在莫尔圆上采用该角的两倍，即 2θ。 当 θ 角从 0 变 到$\frac{\pi}{2}$时，D 点沿圆从 A 点移动到 B 点，因而圆的上半部描述出$\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{2}$之间的该单元 所 有 方 位 (图 2-5 c) 的应力 σ_θ 和 τ_θ。 例如，倘若 $\theta=\frac{\pi}{4}$，那么 $2\theta=\frac{\pi}{2}$，D 点将位于圆的顶点(E 点)，在该点，我们得到：

$$\sigma_\theta=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \qquad \tau_\theta=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$$

因此，E 点代表最大正剪应力的平面，此结果是可能发生的，因为圆的半径等于 τ_{max}。

如果我们所取的 θ 为大于$\frac{\pi}{2}$的角， 那么在莫尔圆上的相

应点将位于圆的下半部．例如，D' 点与 D 点为径向相反，因此它藉 $2\theta+\pi$ 角来确定，这意味着 D' 点所代表的应力是作用于与 σ_θ 和 τ_θ 作用面成直角的平面上之应力．从图 2-7 看出 D' 点的坐标等于 σ'_θ 和 τ'_θ（见图 2-5 c 和方程 2-9）．因此，令莫尔圆上的 2θ从 0°变至 360°，我们得到图 2-5 c 中从$\theta=$ 0°至 $\theta=180°$ 时该单元所有边上的应力．自然，剩余面上的应力(θ 从 180°至 360°)等于其相对面上的应力．

作莫尔圆的通常程序是：在 σ_θ 轴上确定 A 点和 B 点的位置（用适当的比例尺），然后通过这两点绘一圆．于是用 θ 所定义的任一斜面上的应力藉度量 2θ 角确定 D 点来求得．这点的坐标可按比例直接从图上量得，或采取三角计算求出，此坐标将给出所要求的应力 σ_θ 和 τ_θ．如果应力 σ_x 和 σ_y 之一为压力，或二者均为压力，仍可采用同样的程序，只是圆的一部分或全部可在原点的左边．此外，必须记住：虽然代表 x 平面上的应力的 A 点，可能在水平直径的左端，但 2θ 角要从 A 点按反时针方向度量，只要 σ_x 的代数值小于 σ_y，就会出现 A 点位于水平直径的左端(见下面的例题)．

如果需要，还可能以相反的方式来应用莫尔圆，亦即如果承双轴应力时作用于旋转单元上的应力 σ_θ，τ_θ，σ'_θ 和 τ'_θ（图 2-5 c）均已知，莫尔圆可用来求出应力 σ_x 和 σ_y．其程序是根据已知的应力值确定 D 点和 D' 点，然后用 DD' 线作为直径绘一圆．于是根据圆与 σ_θ 轴的交点来确定 A 点和 B 点．这样，不仅可确定应力 σ_x 和 σ_y，而且还可确定旋转单元的 θ 角．

例题　试作双轴应力情况下的莫尔圆（图 2-8 a），其 $\sigma_x=-12,000$ 磅/吋^2，$\sigma_y=4000$ 磅/吋^2．此外，确定 $\theta=20°$ 的单元边上的应力 σ_θ，τ_θ，σ'_θ 和 τ'_θ．

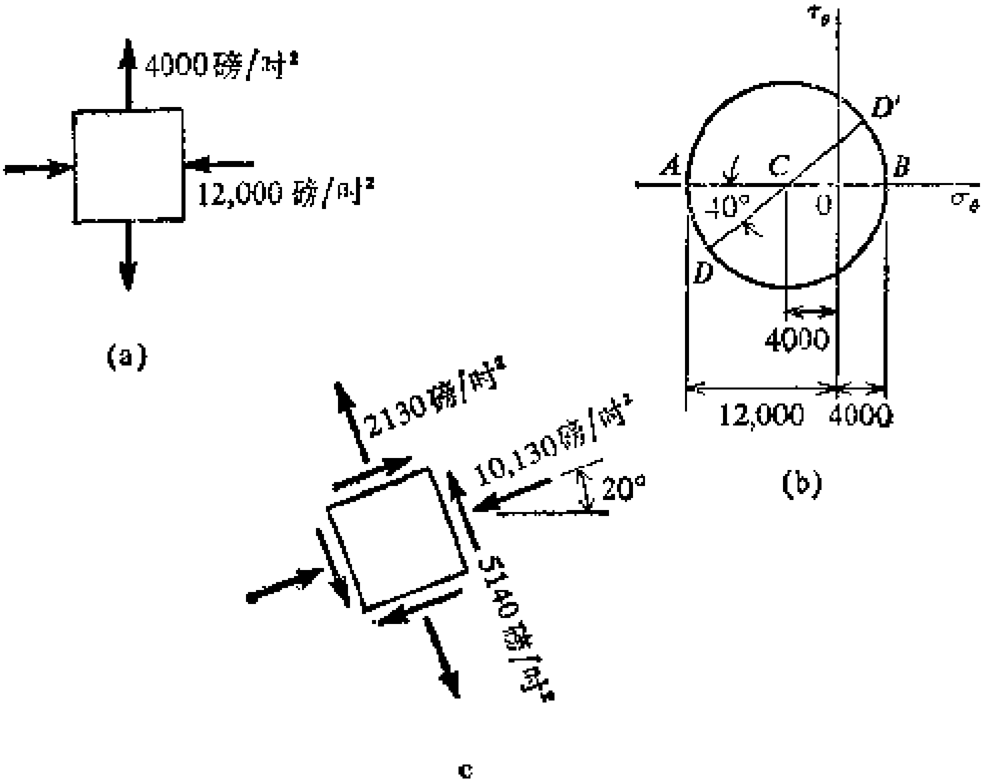


图 2-8 数字例题

我们从确定分别代表$\theta=0$和$\theta=90°$的平面上应力的A点和B点来开始，如图 2-8 b 所示。圆心C位于$\sigma_{aver}=-4000$磅/吋²处，半径为8000磅/吋²。

D点藉从A点反时针方向量取角$2\theta=40°$来确定。D点的坐标用计算(或按比例)得到如下：

$$\sigma_\theta=-10130\ 磅/吋^2 \qquad \tau_\theta=-5140\ 磅/吋^2$$

这些应力示于图 2-8 c 中旋转单元的草图上。D'点给出$2\theta=220°$或$\theta=110°$的平面上的应力。这些应力为：

$$\sigma'_\theta=2130\ 磅/吋^2 \qquad \tau'_\theta=5140\ 磅/吋^2$$

也示于图 2-8 c 中。于是，用莫尔图我们能够确定旋转单元上的所有应力。

2.5 平面应力

单轴应力和双轴应力都属于更为普遍的应力状态——平

面应力中的特殊情况．平面应力下的单元可具有作用于 x 面和 y 面上的法向应力和剪应力，如图 2-9 a 所示，但是单元的 z 面上没有应力．单元的 x 面上的剪应力用 τ_{xy} 来表示，其中

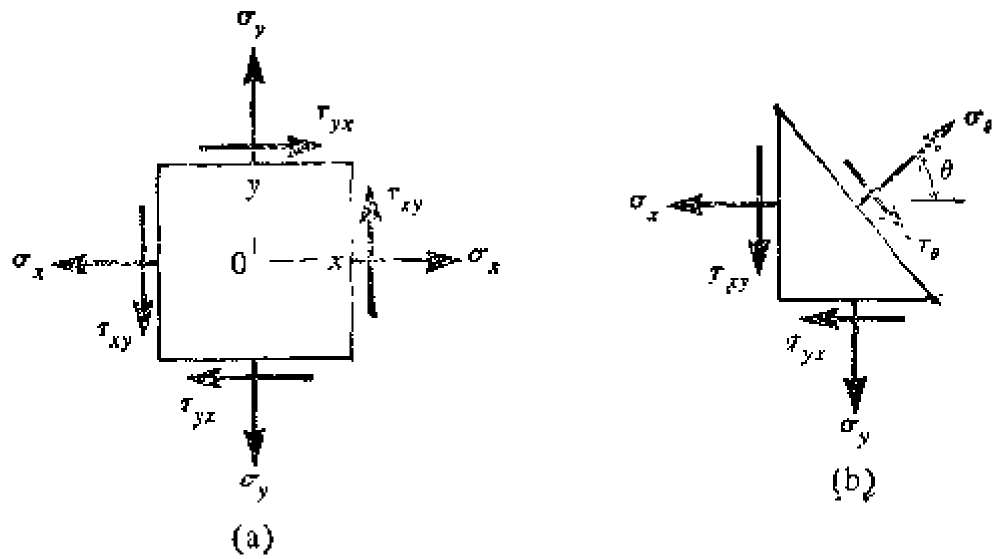


图 2-9　平面应力下的单元

第一个脚注代表应力作用的面，第二个脚注代表剪应力的方向．当采用这些符号辨别剪应力时，习惯上假设：当剪应力沿 y 轴正方向作用时，该剪应力为正．因此，τ_{xy} 顺图示方向为正．类似地，单元顶面上的剪应力用 τ_{yx} 来表示，它代表应力作用于单元的 y 面上，顺 x 方向为正．这里采用这种剪应力 τ_{xy} 和 τ_{yx} 的正负号规则，是因为它是弹性理论中广泛应用的规则．

然而，在我们前面的讨论中，我们所用剪应力 τ_θ 的正负号规则是建立在剪应力是顺时针方向还是反时针方向作用于单元之上的．我们将继续把 τ_θ 的这个规则应用于平面应力讨论中，因此，我们看出在 $\theta=0°$ 的平面上（单元的 x 面上）我们得到 $\tau_\theta=-\tau_{xy}$，而在 $\theta=90°$ 面上，我们得 $\tau_\theta=\tau_{yx}$．并且，根据两互相垂直平面上剪应力相等，显然得出

$$\tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{2-22}$$

现在，让我们讨论法线与 x 轴成 θ 角的斜面(图 2-9 b)。作用于此截面上的法向应力 σ_θ 和剪应力 τ_θ 可根据三角形单元的平衡条件来求出. 在写平衡条件时，必须记住，单元各面的面积不都是相等的，每一项应力要乘以它所作用面的面积以得出总的力. 这种同样的程序，在前面推导双轴应力方程(2-7)时已经采用过. 按顺 σ_θ 方向力的平衡(图 2-9 b)得出：

$$\sigma_\theta=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta+2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \quad (2\text{-}23\text{ a})$$

而按顺 τ_θ 方向力的平衡得出：

$$\tau_\theta=(\sigma_x-\sigma_y)\sin\theta\cos\theta+\tau_{xy}(\sin^2\theta-\cos^2\theta) \quad (2\text{-}23\text{ b})$$

再引进适当的三角关系，我们可用下面的另一种形式来表达方程(2-23)：

$$\sigma_\theta=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta \quad (2\text{-}24\text{ a})$$

$$\tau_\theta=\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta-\tau_{xy}\cos 2\theta \quad (2\text{-}24\text{ b})$$

这些方程通过应力 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 给出作用于任一斜面上的法向应力和剪应力. 注意：当 $\theta=0$ 时，方程得出 $\sigma_\theta=\sigma_x$ 和 $\tau_\theta=-\tau_{xy}$；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，方程得出 $\sigma_\theta=\sigma_y$ 和 $\tau_\theta=\tau_{xy}$. 此外，可以看到当 $\tau_{xy}=0$ 时，方程(2-23)和(2-24)分别化为双轴应力的方程(2-7)和(2-8).

当应用上述 σ_θ 和 τ_θ 的方程时，必须注意遵守应力的正负号规则：(a) 当受拉时，所有法向应力为正；(b) 当剪应力 τ_{xy} 顺 x 轴方向时(图 2-9 a)，τ_{xy} 为正；(c) 当剪应力 τ_θ 按顺时针方向作用于材料上时，τ_θ 为正(图 2-9 b). 选择这种 τ_θ 的正负号规则的理由是：当为正时，这样引起在莫尔圆中按反

时针方向度量其角 2θ，这种度量法与用于度量 θ 的正方向相同.

在与 x 轴成 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 角的平面上的应力 σ_θ' 和 τ_θ' 可藉 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 代替方程(2-24)中的 θ 来求得. 如果这样做，我们将发现：

$$\sigma_\theta+\sigma_\theta'=\sigma_x+\sigma_y \quad 和 \quad \tau_\theta=-\tau_\theta'$$

如同前面对于双轴应力所示那样. 因此，我们再次看到互相垂直的平面上法向应力之和保持为常数，而互相垂直平面上的剪应力大小相等但方向相反.

主应力　当图 2-9 b 中所示的角 θ 从 0° 变到 360° 时，其应力 σ_θ 和 τ_θ 也随之改变. σ_θ 的最大值和最小值是为主应力. 发生主应力的主平面位置可藉取导数 $d\sigma_\theta/d\theta$ 等于零，然后求解 θ 来确定. 因而，根据方程(2-24 a)我们求出：

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta}=-(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta+2\tau_{xy}\cos 2\theta=0$$

或

$$\operatorname{tg} 2\theta_p=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{2-25}$$

式中 θ_p 用以代替 θ，表示确定主平面的角. 从方程(2-25)所得到的 $2\theta_p$ 有两个相差 180° 的值，其中第一个值位于 0° 和 180° 之间，另一个位于 180° 和 360° 之间. 因而，θ_p 的两个值可以求出来；一个值位于 0° 和 90° 之间，另一个位于 90° 和 180° 之间. 对于这些 θ_p 中的一个值，其法向应力 σ_θ 为最大，而对另一个值，法向应力则为最小. 这两个主应力发生在互相垂直的平面上.

根据方程(2-25)求出 θ_p 的两个值之后，我们可将这些值代入方程(2-24 a)，得到任一特定情况下的两个主应力. 我们藉代数方式进行这种运算还可能得到主应力的一般公式. 为

了这样做，根据方程(2-25)观察到：

$$\cos 2\theta_p = \pm\frac{\sigma_x-\sigma_y}{s} \qquad \sin 2\theta_p = \pm\frac{2\tau_{xy}}{s}$$

其中$s=\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau^2_{xy}}$。将这些表达式代入方程(2-24 a)，得

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \qquad (2\text{-}26)$$

式中σ_1和σ_2分别表示主应力的代数最大值和最小值。我们可从方程(2-26)看到$\sigma_1+\sigma_2=\sigma_x+\sigma_y$，这是可以预料到的。

根据方程(2-24 b)可以进行有关主平面的重要观察。如果我们在此方程中令$\tau_\theta=0$，并对2θ求解，我们就将再次得到方程(2-25)。此结果表明主平面上没有剪应力。[1]

最大剪应力　现在让我们确定最大剪应力和最大剪应力所作用的平面。求导数$d\tau_\theta/d\theta$(见方程2-24 b)，并令它等于零，我们求出：

$$\mathrm{ctg}\, 2\theta_s = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \qquad (2\text{-}27)$$

式中θ_s表示最大剪应力平面的角，将上述表达式与方程(2-25)进行比较，我们看出$\mathrm{ctg}\,2\theta_s=-\mathrm{tg}\,2\theta_p$，所以，我们得出结论：$2\theta_s$和$2\theta_p$必定相差$90°$。因此，最大剪应力平面与主平面成$45°$，正如早已对双轴应力所指出(见第2.2节)。将由方程(2-27)所确定的$2\theta_s$值代入方程(2-24 b)，我们求得最大剪应力为：

$$\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \qquad (2\text{-}28\text{ a})$$

---

1) 主应力是A. L. Cauchy引入的(参考文献2-9)，而从一轴系转换到另一轴系的方程首先由W. J. M. Rankine和Barre de Saint-Venant导出(参考文献2-10)。

它也等于

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \qquad (2\text{-}28\ b)$$

最大剪应力平面上的法向应力为：

$$\sigma_\theta=\sigma_\theta'=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \qquad (2\text{-}29)$$

例题 有一承受平面应力的单元，其应力 $\sigma_x=16,000$ 磅/吋²，$\sigma_y=6000$ 磅/吋²，$\tau_{xy}=4000$ 磅/吋²，如图 2-10 a 所示。试确定 (a)主应力和主平面；(b)在旋转 45°角的单元上的应力；(c) 最大剪应力。将每一结果表示于旋转单元的草图上。

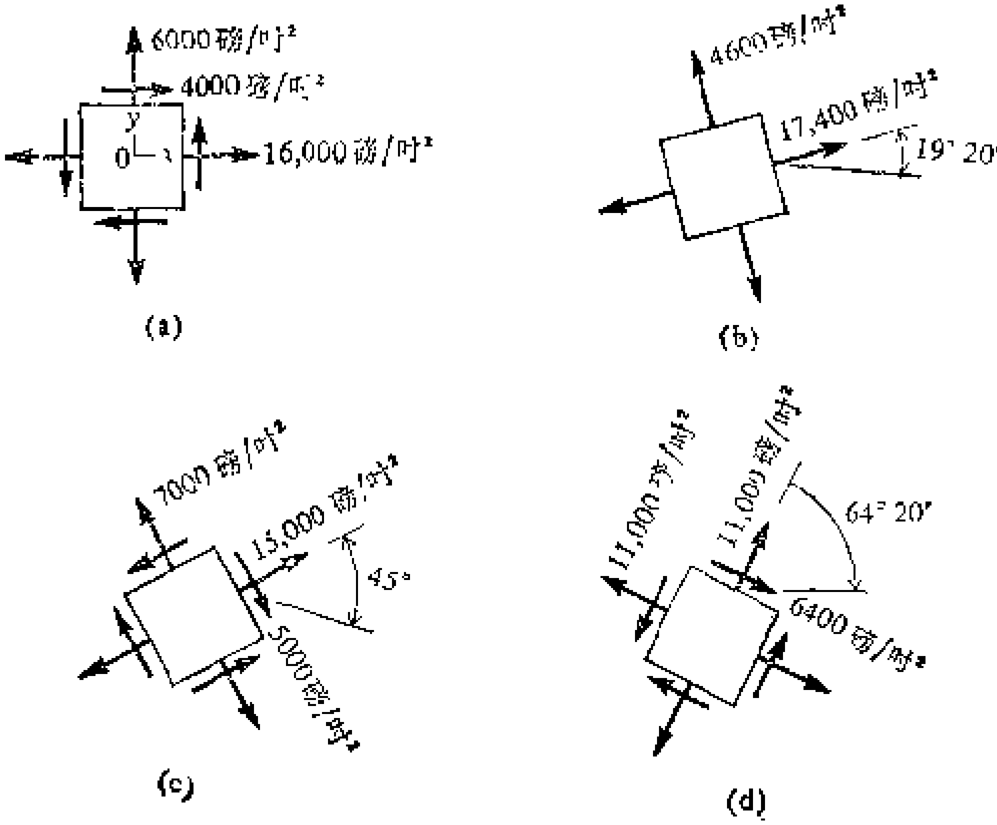


图 2-10 数字例题

(a) 为了确定主平面，我们应用方程 (2-25)，从它得出 $\tan 2\theta_p=0.8$，因此，$2\theta_p=38°40'$ 和 $218°40'$；$\theta_p=19°20'$ 和 $109°20'$。将 $2\theta=38°40'$ 代入方程 (2-24 a)，得出 $\sigma_\theta=17,400$ 磅/吋²；将 $2\theta=218°40'$ 代

入方程(2-24 a)，得出 $\sigma_\theta=4600$ 磅/吋²。因此，最大主应力 $\sigma_1=17,400$ 磅/吋²，最小主应力 $\sigma_2=4600$ 磅/吋²。这些应力示于图 2-10 b 中。还可根据方程(2-26)确定主应力，作为校核。

(b) 在旋转 45°角的单元上的应力，可根据方程 (2-24) 求出。将 $\theta=45°$ 代入这些方程，得到 $\sigma_\theta=15000$ 磅/吋²，$\tau_\theta=5000$ 磅/吋²。这些应力示于图 2-10 c 中。在 $\theta=135°$ 平面上，法向应力和剪应力(根据方程 2-24)为 $\sigma'_\theta=7000$ 磅/吋²和 $\tau'_\theta=-5000$ 磅/吋²。

(c) 根据方程(2-27)求得最大剪应力平面的角：$\mathrm{ctg}\,2\theta_s=-0.8$，$2\theta_s=128°40'$ 和 $308°40'$；$\theta_s=64°20'$ 和 $154°20'$。应用方程 (2-24)，代入 $2\theta=128°40'$，我们求出 $\sigma_\theta=11,000$ 磅/吋²，$\tau_\theta=6400$ 磅/吋²。同样，对于 $2\theta=308°40'$，我们求出 $\sigma'_\theta=11,000$ 磅/吋²，$\tau'_\theta=-6400$ 磅/吋²。所有这些应力示于图 2-10 d 中的单元上。也可用方程(2-28)和(2-29)计算应力，进行校核。

2.6 平面应力的莫尔圆

平面应力的一般情况(见方程 2-24)，其 σ_θ 和 τ_θ 的方程也可藉莫尔圆用作图来表示。按照用于双轴应力的相同方式(见第 2.4 节)来进行，我们可将方程 (2-24) 组合成一个方程：

$$(\sigma_\theta-\sigma_{aver})^2+\tau_\theta^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2 \qquad (2\text{-}30)$$

式中 $\sigma_{aver}=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$。这又是圆心位于 $\sigma_\theta=\sigma_{aver}$ 和 $\tau_\theta=0$ 处的圆的方程。该圆的半径等于方程(2-30)右边的平方根，这个半径的表达式比我们在第 2.4 节中对于双轴应力所遇到的要复杂些。然而，注意到如果 $\tau_{xy}=0$，那么方程(2-30)简化为方程(2-21)，是为一种特殊情况。

莫尔圆的绘制在图 2-11 中作了说明。我们首先用坐标为 $\sigma_\theta=\sigma_{aver}$ 和 $\tau_\theta=0$ 的点确定圆心位置 C。然后，我们在圆上确定代表单元 x 面上 $(\theta=0)$ 应力情况的 A 点。对于这个

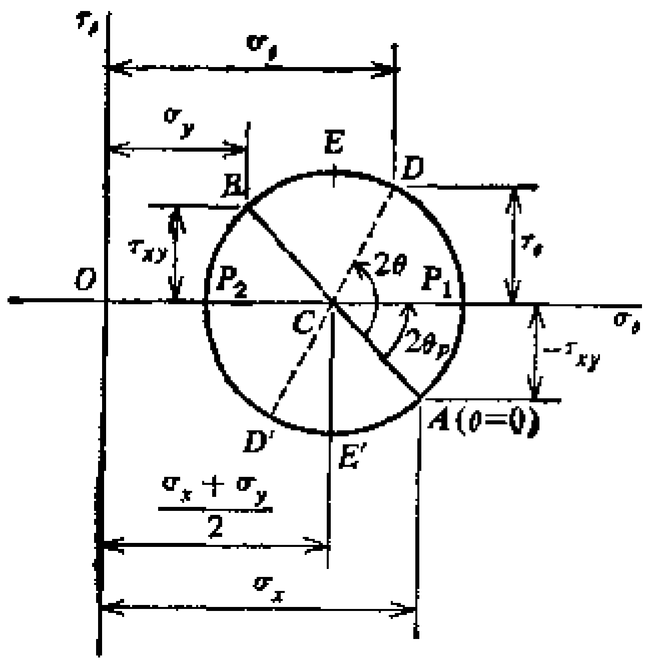


图 2-11 平面应力的莫尔圆

点，我们有 $\sigma_\theta=\sigma_x$ 和 $\tau_\theta=-\tau_{xy}$(回忆图 2-9 中所示 τ_θ 和 τ_{xy} 的正负号规则)。y 平面上的应力（见图 2-9a）为 $\sigma_\theta=\sigma_y$ 和 $\tau_\theta=\tau_{xy}$，在莫尔圆上用 B 点来代表. 注意：代表作用于互成 90°的平面上之应力的 A 点和 B 点，位于直径的相反端点处，亦即，它们在莫尔圆上相隔 180°。

以 C 为圆心，通过 A 点和 B 点绘出莫尔圆后，现在我们能确定与 x 轴成 θ 角的任一斜面上的应力. 只需要从 A 点反时针方向划出 2θ角，从而在圆上确定 D 点，其坐标 σ_θ 和 τ_θ 即等于相应平面上的应力. 关于用方程 (2-24) 得出 D 点坐标的证明，留下当作练习(见习题 2.6-8)。

与 D 点在直径的相反端点处的 D'点，它的坐标代表与 D 点所代表平面相隔 90°的平面上之应力. E 点位于圆的顶上，它代表最大正剪应力平面上的应力；E'点位于圆的底面，它给出最大负剪应力平面上的应力. 在这些平面上，法向应力等于平均应力，如同第 2.5 节所述。

莫尔圆的重要用途之一是确定主应力. 这些最大和最小

的法向应力莫尔圆上 P_1 点和 P_2 点来表示（图 2-11）。用 P_1点所代表的代数上较大的主应力 σ_1，可看出等于平均应力（C点）加上圆的半径，而代数上较小的主应力 σ_2（P_2 点）等于平均应力减去圆的半径。这些观察结果与前面对主应力所导得的方程(2-26)是一致的。用以确定第一主平面的角 $2\theta_p$（见图）之正切等于 τ_{xy} 除以 C 点和 A 点之间的水平距离，C 点和 A 点的水平距离等于 $\sigma_x-(\sigma_x+\sigma_y)/2$ 或 $(\sigma_x-\sigma_y)/2$。因此，我们看到

$$\operatorname{tg} 2\theta_p=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

它与方程(2-25)相一致．第二主平面（P_2点）用同一个方程来确定，因为按第 2.5 节指出的，方程(2-25) 得出两个 $2\theta_p$ 值，它们相差 180°。

根据这里的讨论，我们看出：莫尔圆可用作求任一斜平面上的应力以及求主应力和求最大剪应力的图解方法。

例题　有一单元，承受平面应力，其应力 $\sigma_x=16,000$ 磅/吋^2，$\sigma_y=6000$ 磅/吋^2，$\tau_{xy}=4000$ 磅/吋^2，如图 2-12 所示。试用莫尔圆确定：(a)主应力和主平面；(b)旋转 45° 单元体上的应力；(c)最大剪应力（注意：这同一问题已在第 2.5 节求解过）。

圆心 C 位于 σ_θ 轴上 $\sigma_\theta=\sigma_{aver}=11,000$ 磅/吋^2 的地方。其次以坐标 $\sigma_\theta=16,000$ 磅/吋^2，$\tau_\theta=-4000$ 磅/吋^2 确定 A 点的位置。然后，用等于 6400 磅/吋^2 的半径绘一圆。B 点按与 A 点在直径相反端处来确定，其坐标为 $\sigma_\theta=6000$ 磅/吋^2，$\tau_\theta=4000$ 磅/吋^2。

(a) 根据圆的几何图形得出代数上较大主应力 σ_1 等于 11,000＋6400＝17,400 磅/吋^2，相应的主平面的 $2\theta_p$ 角等于 38°40′。于是，自 x 轴至主平面的夹角为 19°20′。另一主应力 σ_2（P_2 点）等于 11,000－6400＝4600 磅/吋^2，它作用于 $\theta=19°20'+90°=109°20'$ 的平面上。因此，主应力和主平面从莫尔圆上已求得，可在单元上把它们表示出来，

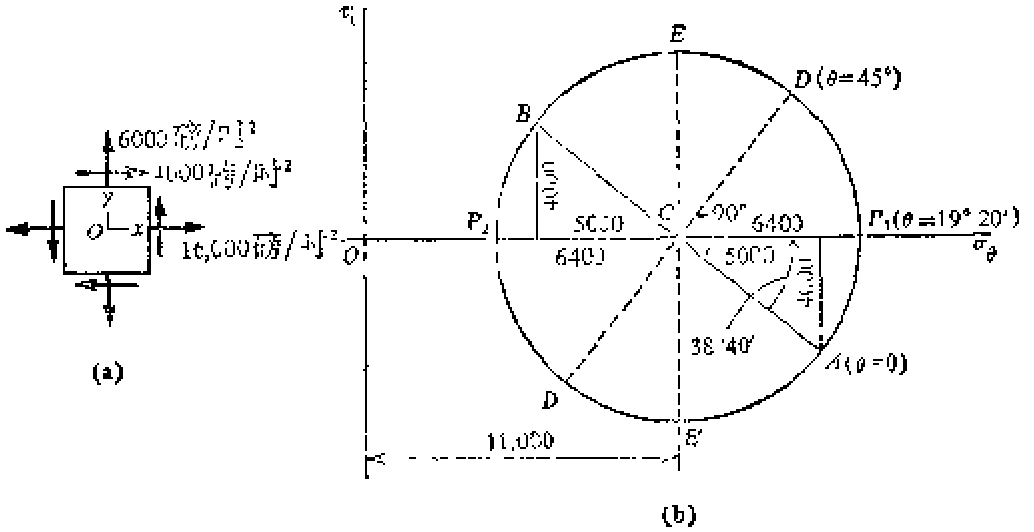


图 2-12 数字例题

如同前面图 2-10 b 所示那样。

(b) 在旋转 45°平面上的应力，可由 $2\theta=90°$ 即 $\theta=45°$ 的 D 点表示于莫尔圆上。线 CD 与 σ_θ 轴的夹角为 90°减 38°40′，即 51°20′，此角的余弦为 0.625，因此我们看出 D 点代表的法向应力为 $\sigma_\theta=11,000+6400(0.625)=15,000$ 磅/吋²。另外，剪应力 $\tau_\theta=6400\sin 51°20'=5000$ 磅/吋²。用 D' 点表示的应力可用类似方式来确定，然后可将这些结果绘于旋转 45°单元的草图上(见图 2-10 c)。

(c) 最大剪应力和它们的平面由莫尔圆上的 E 点和 E' 来代表。读者可以容易地证明用这两点所得的应力 σ_θ 和 τ_θ 与图 2-10 d 所示是一致的。

2.7 三轴应力

承受顺三个互相垂直方向的应力 σ_x, σ_y 和 σ_z 作用的材料单元(图 2-13 a)，称为处于**三轴应力状态**。如果有一平行于 z 轴的斜面切割单元(图 2-13 b)，斜面上仅有的应力为 σ_θ 和 τ_θ，与前面双轴应力所分析的应力相同。由于这些应力靠静力学应用 xy 平面内平衡方程来求得，它们与应力 σ_z 无关。因此，当确定应力 σ_θ 和 τ_θ 时，我们可以采用双轴应力的

方程和双轴应力的莫尔圆．这个一般性结论适用平行于 x 轴和 y 轴切割单元的斜面．

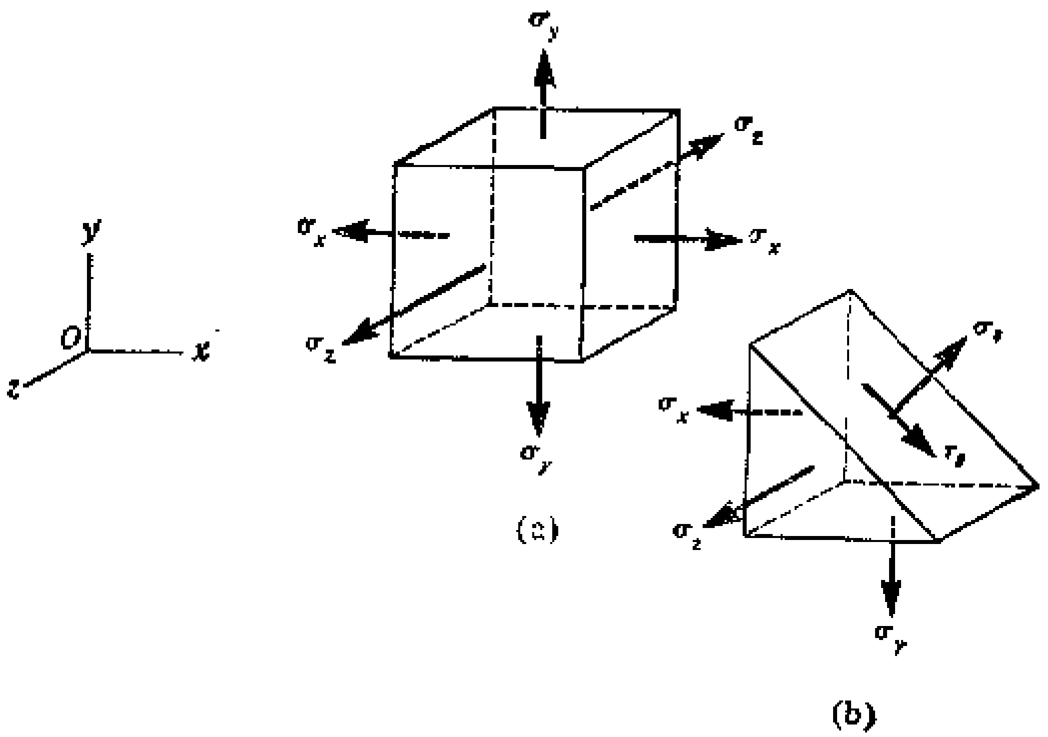


图 2-13　三轴应力下的单元

从上面的讨论，我们看出应力 σ_x, σ_y 和 σ_z 为单元上的主应力．并且，最大剪应力将在平行一根坐标轴且与单元切割成 45° 的平面上，它与 σ_x, σ_y 和 σ_z 的相对大小有关．例如，如果我们仅讨论平行于 z 轴的平面（图 2-13 b），则最大剪应力为

$$(\tau_{max})_z=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \qquad (2\text{-}31a)$$

此式系根据方程(2-11)求得．类似地，在平行于 x 和 y 轴的平面上的最大剪应力分别为：

$$(\tau_{max})_x=\frac{\sigma_y-\sigma_z}{2} \qquad (\tau_{max})_y=\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2} \qquad (2\text{-}31\ b,\ c)$$

根据 σ_x, σ_y 和 σ_z 的相对值，上述三个方程之一将给出单元上的剪应力最大值．

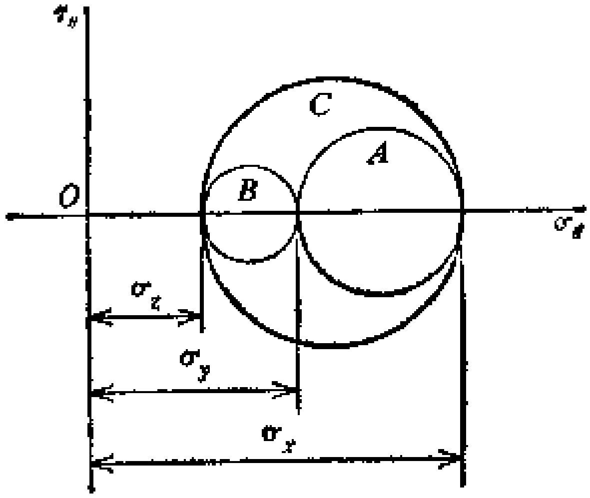


图 2-14　三轴应力的莫尔圆

藉助莫尔圆可以方便地看出相同的结果．对于平行 z 轴的平面，其圆将是图 2-14 中标明 A 的那个，假设 σ_x 和 σ_y 均为拉力，且 $\sigma_x>\sigma_y$．类似地，对于平行于 x 和 y 轴的平面，我们分别得到 B 圆和 C 圆．这三个圆的半径代表方程 (2-31)所得出的最大剪应力，而绝对最大剪应力等于最大圆的半径。

在图 2-13a 中沿斜向切割单元的斜面上，其剪应力和法向应力可藉较复杂的三维分析来求得(见参考文献 2-11)。斜向平面上的法向应力总是位于代数上最大和最小主应力值之间，而剪应力总是小于按方程(2-31)所得数值上最大的剪应力。

三轴应力下的应变　　如果材料服从虎克定律，那么三轴应力时，x, y 和 z 方向的应变可藉双轴应力所用的相同程序去求得．因此，我们容易地得下列方程：

$$\epsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\frac{\nu}{E}(\sigma_y+\sigma_z) \qquad (2\text{-}32\,a)$$

$$\epsilon_y=\frac{\sigma_y}{E}-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_z) \qquad (2\text{-}32\,b)$$

$$\epsilon_z=\frac{\sigma_z}{E}-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \qquad (2\text{-}32\ c)$$

单元的单位体积变化(见方程 2-14)为

$$\frac{\Delta V}{V}=\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z$$

ϵ_x, ϵ_y 和 ϵ_z 三个主应变之和有时称为**膨胀**。将应变方程 (2-32)代入上述方程,我们得到

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \qquad (2\text{-}33)$$

它用于三轴应力的一般情况。

在单元承受静水压力或全部三向均匀压缩的特定情况下,我们得到

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p \qquad (a)$$

式中 p 为压应力。于是,根据方程(2-33),我们得到

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{-3(1-2\nu)p}{E}=-\frac{p}{K} \qquad (b)$$

式中

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (2\text{-}34)$$

我们从方程(b)看出:单位体积的压缩正比于压力 p,而反比于 K 值,K 被称为**体积弹性模量**。

应变能　为了确定储存在承受三轴应力单元中的应变能(图 2-13 a),让我们首先讨论该单元为单位尺寸的立方体的情况。因而作用于单元 x 面上的应力 σ_x 数值上就等于该面上的总力。此力移动的距离等于 ϵ_x,因此它做的功等于 $\sigma_x\epsilon_x/2$。类似地,应力 σ_y 和 σ_z 做的功分别等于 $\sigma_y\epsilon_y/2$ 和 $\sigma_z\epsilon_z/2$。总的功等于单元中单位体积所储存的应变能,它为

$$u=\frac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x+\sigma_y\epsilon_y+\sigma_z\epsilon_z)$$

用方程(2-32)所得的应变值代入，我们得

$$u=\frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)-\frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z) \quad (2\text{-}35)$$

在应用此方程时，应力 σ_x, σ_y 和 σ_z 必须代入它们的正确的代数正负号，亦即，拉应力必须为正，而压应力为负。

2.8 平面应变

在材料和结构性能的试验研究中，最普通是使用应变计去度量应变。因此，求出顺各个方向的法向应变和剪切应变之间的理论关系(类似于第 2.5 节关于平面应力所得的关系)是有意义的。首先我们回想，在 xy 平面内可能存在三个应变分量：沿 x 方向的法向应变 ϵ_x(图 2-15 a)，沿 y 方向的法向应变 ϵ_y(图 2-15 b)和剪切应变 γ_{xy}(图 2-15 c)。当单元对 xy 轴按图 2-15 c 所示去定向时，单元中的剪切应变 γ_{xy} 定义为单元左下角的直角减小。正的剪切应变的定义与正的剪切应力 τ_{xy} 的定义是一致的(见图 2-9 a)。

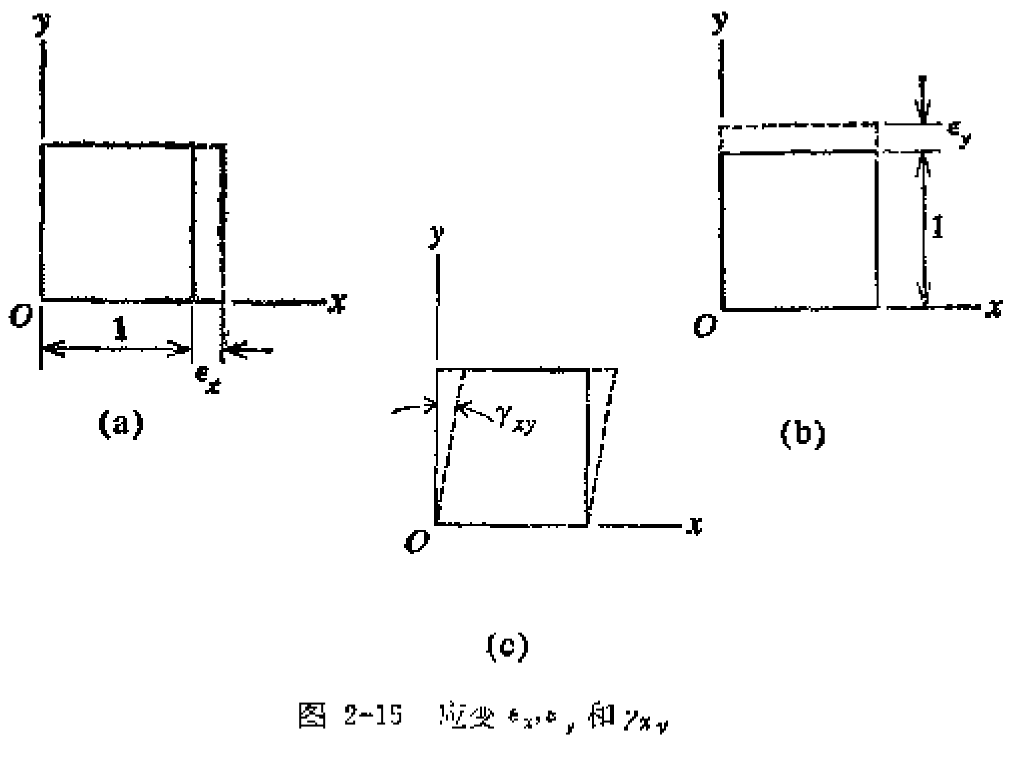


图 2-15 应变 ϵ_x, ϵ_y 和 γ_{xy}

仅发生应变ϵ_x, ϵ_y和γ_{xy}的材料单元被说成处于**平面应变**状态。这样的单元没有法向应变ϵ_z，xz和yz平面上也没有剪切应变γ_{xz}和γ_{yz}。我们看到：平面应变的一般情况用下面条件来定义：

$$\epsilon_x \neq 0 \quad \epsilon_y \neq 0 \quad \gamma_{xy} \neq 0 \tag{a}$$

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \tag{b}$$

上述平面应变的定义与平面应力的定义(第2.5节)相类似。对于平面应力，一般情况可表达如下

$$\sigma_x \neq 0 \quad \sigma_y \neq 0 \quad \tau_{xy} \neq 0 \tag{c}$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{d}$$

根据前面两个方程组的相似性，不能推断平面应力和平面应变发生在相同条件下。例如，我们知道，平面应力下的单元，通常产生z方向的应变，这就立即表明平面应力状态不一定就产生平面应变状态。同样，平面应变下的单元通常将有应力σ_z作用于它以保持$\epsilon_z=0$的状况，所以再次看出平面应力和平面应变通常是不同时发生的。

在第2.5节中所导得的应力变换方程，原来是对平面应力得来的；然面在后来的第2.7节中，我们看到它们还可用于三轴应力下的单元，只要单元绕坐标轴之一旋转。对于应变，我们的程序将按照相同的样式。应变转换方程是对平面应变导出来，但是这些方程对于三轴应变也是能成立的，只要绕坐标轴旋转到新的方向。因此，应变的转换方程（下面所推导的）也可用于平面应力情况下发生的应变，正如平面应力的方程(第2.5节)可用于平面应变情况下发生的应力。

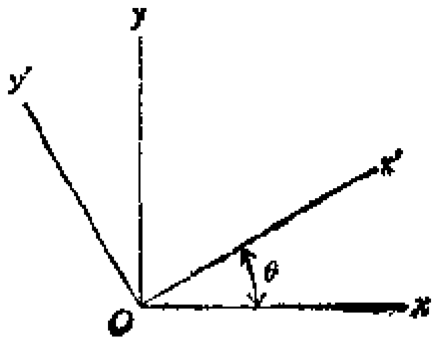


图 2-16 转轴x'和y'

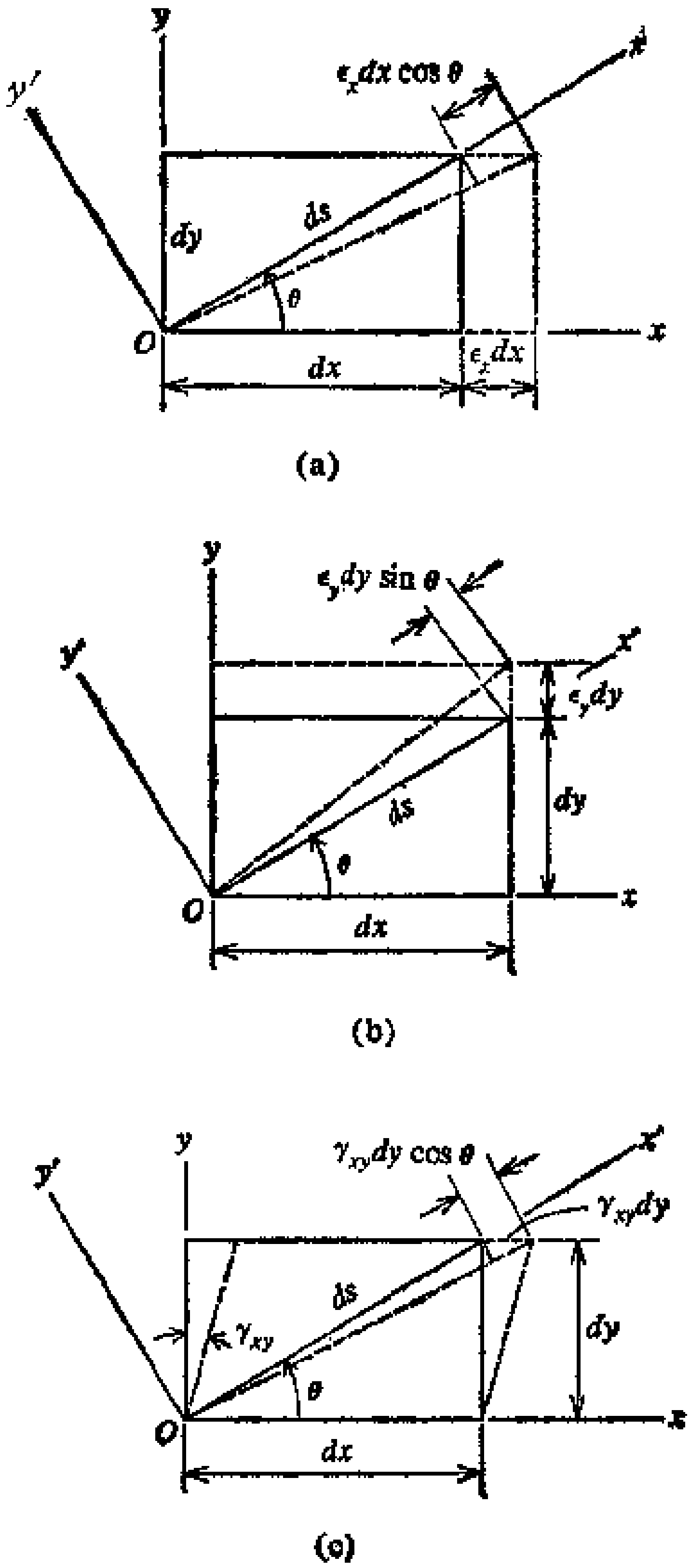


图 2-17　由于应变(a)ε_x,(b)ε_y 和(c)γ_{xy}所产生的单元变形

为了推导平面应变的转换方程，首先让我们讨论图 2-16 所示的坐标轴. 假设与 xy 轴有联系的法向应变 ϵ_x, ϵ_y 以及剪切应变 γ_{xy} 均为已知。分析的目的是确定与 $x'y'$ 轴有联系的法向应变和剪切应变，其 $x'y'$ 轴对 xy 轴转过 θ 角。沿 x' 轴方向的法向应变用 ϵ_θ 来代表，而与 $x'y'$ 轴有联系的剪切应变用 γ_θ 代表。当 $\theta=0$ 时，我们将得 $\epsilon_\theta=\epsilon_x$ 和 $\gamma_\theta=\gamma_{xy}$。

图 2-17 中表示边长为 dx 和 dy，而对角线为沿 x' 轴方向的矩形单元。由于应变 ϵ_x, ϵ_y 和 γ_{xy} 的结果，此单元将沿 x 方向伸长 $\epsilon_x dx$（图 2-17 a），沿 y 方向伸长 $\epsilon_y dy$（图 2-17 b），直角 xOy 将减小 γ_{xy}（图 2-17 c）。这三个变形中的每一变形都将引起其对角线长度改变。正如图中所示，对角线长度的相应增长为 $\epsilon_x dx\cos\theta$, $\epsilon_y dy\sin\theta$ 和 $\gamma_{xy}dy\cos\theta$。因此，对角线长度的总增长为这三个量之和，而沿 x' 方向的相应应变藉对角线长度 ds 去除此和来求得。考虑到 $dy/ds=\sin\theta$ 和 $dx/ds=\cos\theta$，我们得到

$$\epsilon_\theta=\epsilon_x\cos^2\theta+\epsilon_y\sin^2\theta+\gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (2\text{-}36\text{ a})$$

或

$$\epsilon_\theta=\frac{1}{2}(\epsilon_x+\epsilon_y)+\frac{1}{2}(\epsilon_x-\epsilon_y)\cos 2\theta+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta \qquad (2\text{-}36\text{b})$$

当 ϵ_x, ϵ_y 和 γ_{xy} 已知时，方程(2-36)的每一式可用来得到沿 x' 轴方向的法向应变 ϵ_θ。如果需要求沿 y' 方向的法向应变，只需要以 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 代替方程(2-36)中的 θ。

剪切应变 γ_θ 的一般表达式，也同样可根据图 2-17 中所绘变形的考虑求得，从应变 ϵ_x 的影响开始，我们根据图 2-17a 看出 x' 轴顺时针方向旋转 $\epsilon_x dx\sin\theta/ds$ 的微小角。类似地，在图 2-17 b 中 x' 轴反时针方向旋转 $\epsilon_y dy\cos\theta/ds$ 的角，

而图 2-17 c 中 x' 轴顺时针旋转量为 $\gamma_{xy} dy \sin\theta/ds$。因此，$x'$ 轴顺时针方向的净旋转角为：

$$\alpha = \epsilon_x \sin\theta\cos\theta - \epsilon_y \sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\sin^2\theta \qquad \text{(e)}$$

y' 轴顺时针方向的净旋转角可类似图 2-17 对于 x' 轴所示用几何作图来求得，或藉 $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ 代替方程(e)中的 θ 来求得。按照后一种方法，我们得到 y' 的旋转角 β 如下：

$$\beta = -\epsilon_x \sin\theta\cos\theta + \epsilon_y \sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\cos^2\theta \qquad \text{(f)}$$

$x'Oy'$ 角(等于剪切应变 γ_θ)的减小值为 $\beta-\alpha$，因此根据方程(e)和(f)我们得：

$$\gamma_\theta = -2\epsilon_x \sin\theta\cos\theta + 2\epsilon_y \sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

倘用 2 去除每一项，得

$$\frac{1}{2}\gamma_\theta = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\ \sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad \text{(2-37 a)}$$

再采用适当的三角置换，我们可将上述方程改写为另一种形式：

$$\frac{1}{2}\gamma_\theta = -\frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y)\sin 2\theta + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\theta \qquad \text{(2-37 b)}$$

方程(2-37)中的每一式可用来得出斜轴的剪切应变 γ_θ。作为两种特殊情况，我们观察到当 $\theta=0°$ 和 $\theta=90°$ 时，我们分别得 $\gamma_\theta=\gamma_{xy}$ 和 $\gamma_\theta=-\gamma_{xy}$。

将关于平面应变的方程(2-36)和(2-37)与关于平面应力(见第 2.5 节)的方程(2-23)和(2-24)相比较，表明 ϵ_θ 和 γ_θ 的表达式具有与 σ_θ 和 τ_θ 的表达式相同的一般形式。这些方程之间的相似性是：σ_x, σ_y 和 σ_θ 分别对应于 ϵ_x, ϵ_y 和 ϵ_θ，而 τ_{xy} 对应于 $\dfrac{1}{2}\gamma_{xy}$，τ_θ 对应于 $-\dfrac{1}{2}\gamma_\theta$(见表 2-1)。表 2-1 中第二行的负号是我们对剪应力 τ_θ 所采用的正负规则(见图 2-9)的

结果.

平面应力方程与平面应变方程之间的相似性表明：对于平面应力所得到的全部结果在平面应变中有它们的对应物.

例如，与一对旋转了$\theta+\frac{\pi}{2}$角的轴线有关的法向应变ϵ_θ'和剪切应变γ_θ'，可根据方程(2-36)和(2-37)用$\theta+\frac{\pi}{2}$代替θ来求出，得到方程

$$\epsilon_\theta+\epsilon_\theta'=\epsilon_x+\epsilon_y \qquad \gamma_\theta=-\gamma_\theta' \tag{2-38}$$

这些方程表明：法向应变之和保持为常数；而彼此成 90°方向的剪切应变，其大小相等，但符号相反．这完全相似于应力情况(见第 2.5 节).

表 2-1　平面应力变换方程(方程 2-23 和 2-24)与平面应变变换方程(方程 2-36 和 2-37)之间的相似性

应　　力	应　　变
σ_x	ϵ_x
σ_y	ϵ_y
τ_{xy}	$\frac{1}{2}\gamma_{xy}$
σ_θ	ϵ_θ
τ_θ	$-\frac{1}{2}\gamma_\theta$

此外，主应变将存在于按下面方程所求得的方向上(与方程 2-25 相比较)：

$$\operatorname{tg} 2\theta_p=\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x-\epsilon_y} \tag{2-39}$$

其主应变可按下面方程计算：

$$\epsilon_{1,2}=\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{2-40}$$

它对应于应力的方程(2-26)．主平面上的剪切应变为零．

最大剪切应变发生于与主平面成45°的平面上，按下列方程求得：

$$\frac{1}{2}\gamma_{max}=\sqrt{\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{2-41}$$

最大剪切应变平面上的法向应变为$(\epsilon_x+\epsilon_y)/2$．

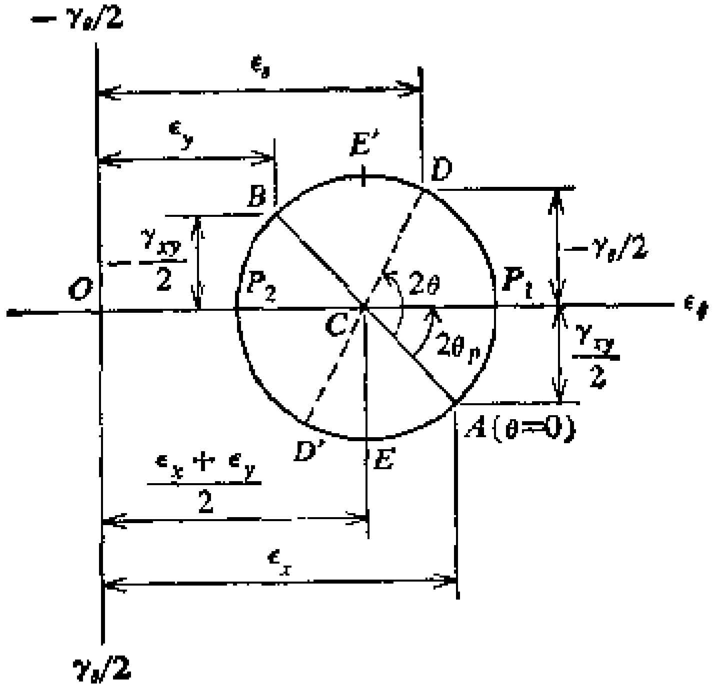


图 2-18　平面应变的莫尔圆

平面应变的莫尔圆按照与平面应力莫尔圆相同的一般方法进行作图，如图2-18所说明那样．法向应变ϵ_θ示于水平轴上，二分之一的剪切应变绘于竖直轴上(向下)(比较图2-18和图2-11)．其圆心横坐标为$\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2}$．代表相伴于$x$方向的$A$点的坐标为$\epsilon_x$和$\gamma_{xy}/2$．而位于与$A$点相反的直径端点处的$B$点，其坐标为$\epsilon_y$和$-\gamma_{xy}/2$，它表示相伴于旋转了$\theta=90°$的一对轴线的应变．与其它旋转轴有关的应变，用$D$点

求得；D 点藉从 A 点度量 2θ 角来确定。另外，主应变以 P_1 点和 P_2 点来代表，最大剪切应变用 E 和 E' 点来代表。所有这些量借助此圆可以容易地确定出来。

对于应变莫尔圆的应用以及按应变计的量测求出主应变，在参考文献 2-12 和 2-13 中作了叙述。

习　题

2.1-1　有一直径为 1 吋的圆杆，承受轴向拉伸荷载 $P=18{,}000$ 磅，试问杆中最大剪应力是多少？

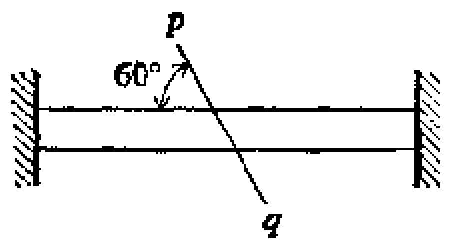
2.1-2　试求 2 吋×2 吋方形截面钢杆的最大容许拉伸荷载 P。如果容许法向拉应力为 20,000 磅/吋²，容许剪应力为 13,000 磅/吋²。

2.1-3　有一金属杆在室内温度(70°F)下装于两刚性支承之间，如图所示。计算当温度升高到 200°F 时，斜截面 pq 上的法向应力和剪应力。假设 $\alpha=6.5\times10^{-6}/°F$，$E=30\times10^6$ 磅/吋²。

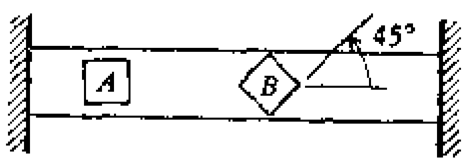
2.1-4　有一受拉杆(见图 2-1)，其斜平面 pq 上的应力 $\sigma_\theta=12{,}000$ 磅/吋²，$\tau_\theta=4000$ 磅/吋²。试求应力 σ_x 和角 θ。

2.1-5　有一受拉的棱柱形杆(见图 2-4a)，其横截面积 $A=2$ 吋²，承受荷载 $P=32{,}000$ 磅。试确定作用于 $\theta=30°$ 的单元(见图 2-4 c)边上的应力。

2.1-6　有一矩形截面的铜杆，支于两个刚性支承之间(见图)，然后杆的温度升高 100°F。试确定单元 A 和 B 所有边上的应力，并将结果表示于其单元草图上(假设 $\alpha=0.00001/°F$，$E=16\times10^6$ 磅/吋²)。



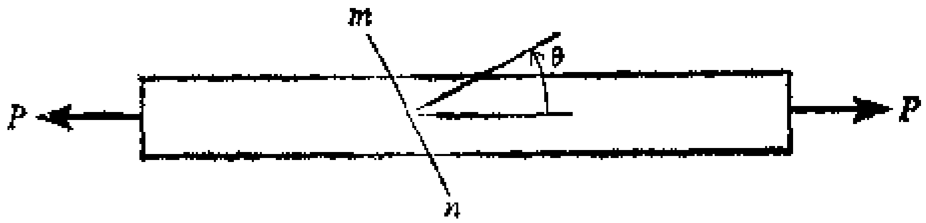
习题 2.1-3



习题 2.1-6

2.1-7　作用于图 2-4 c 中所示单元边上的法向应力 $\sigma_\theta=12{,}000$ 磅/吋²，$\sigma'_\theta=6000$ 磅/吋²。试求应力 τ_θ，τ'_θ，σ_x 和 τ_{max}。

2.1-8　有一拉杆，由两块材料沿 mn 线胶合组成。由于实用的原因，θ 角限于 0°至 60°范围内，胶合点上的容许应力：剪应力(τ_w)为容许拉应力(σ_w)的 3/4。试问为了使该杆能承受最大的荷载 P 时，θ 角的值应是多少？（假设胶合点的强度控制设计）。



习题 2.1-8 和 2.1-9

2.1-9　假设上一习题中 $\tau_w=1000$ 磅/吋^2，$\sigma_w=2000$ 磅/吋^2。试对上一习题进行求解。此外，假设杆的横截面积为 1.5 吋^2，试确定其最大容许荷载 P。

2.2-1　试求图 2-5 所示单元的应力 σ_θ、σ'_θ、τ_θ 和 τ'_θ，假设 $\sigma_x=12,000$ 磅/吋^2，$\sigma_y=-6000$ 磅/吋^2，$\theta=30°$。

2.2-2　如果按使 τ_θ 为最大值来选择 θ 角，求解上一习题。

2.2-3　假设主应力 σ_x 和 σ_y 相等($\sigma_x=\sigma_y=\sigma_0$)，研究图 2-5 c中旋转单元边上的法向应力和剪应力。另外，如果 $\nu=0.25$，$\sigma_0=15,000$ 磅/吋^2，$E=30\times10^6$磅/吋^2，确定该单元的单位体积变化。

2.2-4　有一 $\theta=45°$ 的旋转单元（见图 2-5 c），承受应力 $\sigma_\theta=\sigma'_\theta=2000$ 磅/吋^2，$\tau_\theta=4000$ 磅/吋^2。试求作用于主平面上的应力 σ_x 和 σ_y。

2.2-5　有一处于双轴应力下的单元(见图 2-5)，承受法向应力 $\sigma_x=18,000$ 磅/吋^2，$\sigma_y=-6000$ 磅/吋^2。(a) 试求 $\theta=30°$ 的旋转单元上之应力；(b) 确定最大剪应力的平面，并确定这些平面上的剪应力和法向应力；(c)确定法向应力为零的平面 ($\theta<90°$)，然后绘出以该平面作为一边的单元，并确定此单元所有边上的剪应力和法向应力。

2.2-6　如果 $\epsilon_x=0.001$，$\epsilon_y=-0.0007$，试确定双轴应力下单元的应力 σ_x 和 σ_y(假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2，$\nu=0.3$)。

2.2-7　有一双轴应力下的薄板（厚度$=t$），承受的应力 $\sigma_x=$

20,000 磅/吋^2，$\sigma_y=8000$ 磅/吋^2。假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2，$\nu=0.25$，如果 $t=0.25$ 吋，试求板厚度的减小值。

2.2-8 有一各边长为 4 吋的混凝土立方体，顺两个互相垂直方向受到力 $P=16,000$ 磅的挤压。如果 $\nu=0.1$，$E=4\times10^6$ 磅/吋^2，试求该立方体体积的变化。

2.2-9 有一双轴应力下的材料单元，其主应变 $\epsilon_x=0.00004$，$\epsilon_y=0.00017$，如果 $\nu=0.3$，试求应变 ϵ_z。

2.2-10 试求轴向拉伸下棱柱杆的泊松比 ν，假设单位体积的变化与横截面积变化之比值在数值上等于 0.75。

2.2-11 图 2-5 所示双轴应力下的单元沿 x 和 y 方向的应变[1]分别为 ϵ_x 和 ϵ_y。试导出用 ϵ_x，ϵ_y 和 θ 角表示顺 σ_θ 方向的应变 ϵ_θ 之表达式。将结果与方程(2-7 a)或方程(2-8 a)进行比较。

2.3-1 试导出纯剪时单元的单位体积变化的表达式。

2.3-2 有一处于纯剪的单元，承受剪切应力 $\tau_{max}=20,000$ 磅/吋^2(见图 2-6 b)。如果 $E=30\times10^6$磅/吋^2，$\nu=0.25$，试求最大剪切应变 γ。

2.3-3 有一处于双轴应力的单元，承受应力 $\sigma_x=-\sigma_y=10,000$ 磅/吋^2。如果 $E=10\times10^6$ 磅/吋^2，$\nu=0.25$，试求法向主应变 ϵ_x 和 ϵ_y 以及最大剪切应变 γ。

2.4-1 绘出纯剪情况下的莫尔圆(见图 2-6)，并根据圆的几何图形证明方程(2-17)。

2.4-2 绘出单轴应力情况下的莫尔圆 (图 2-4)，并根据圆的几何图形证明方程(2-1)，(2-2)和(2-3)。

2.4-3 绘出双轴应力情况下的莫尔圆(图 2-5)，其中 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_0$。

2.4-4 对图 2-8 中的例子，确定作用于旋转后剪应力 τ_θ 为最大值的单元上之应力(在单元草图上示出其结果)。

2.4-5 用莫尔圆求解习题 2.1-5。

2.4-6 有一处于单轴应力下的材料单元，承受应力 $\sigma_x=$

---

1) 原文为主应变。——译者注

$-53,000$ 磅/吋^2. 试用莫尔圆确定 $\theta=75°$ 的单元上之应力。

2.4-7　用莫尔圆求解习题 2.1-7。

2.4-8　用莫尔圆求解习题 2.2-1。

2.4-9　用莫尔圆求解习题 2.2-2。

2.4-10　有一处于双轴应力下的单元，其主应力 $\sigma_x=3000$ 磅/吋^2 和 $\sigma_y=4000$ 磅/吋^2. 试求最大剪应力平面上的应力。

2.4-11　用莫尔圆求解习题 2.2-4。

2.4-12　用莫尔圆求解习题 2.2-5。

2.5-1　有一处于平面应力下的单元(图 2-9 a)，受到下面应力的作用：$\sigma_x=5000$ 磅/吋^2，$\sigma_y=3000$ 磅/吋^2；$\tau_{xy}=-1000$ 磅/吋^2，确定其主应力和主平面，并在单元的草图上表示出其结果。

2.5-2　有一处于平面应力下的单元 (图 2-9 a)，受到下面应力的作用：$\sigma_x=-5000$ 磅/吋^2，$\sigma_y=3000$ 磅/吋^2；$\tau_{xy}=-1000$ 磅/吋^2。确定其主应力和主平面，并在单元的草图上表示出其结果。

2.5-3　确定上一习题中的最大剪应力和最大剪应力的作用平面，在单元草图上表示其结果。

2.5-4　有一处于平面应力下的单元 (图 2-9 a)，承受的应力 $\sigma_x=\sigma_y=0$，$\tau_{xy}=2000$ 磅/吋^2(纯剪)。试求旋转 15° 角的单元所有边上的应力，并在单元草图上表示其结果。

2.5-5　有一处于平面应力下的单元(图 2-9 a)，受到下面应力的作用：$\sigma_x=-500$ 磅/吋^2，$\sigma_y=1500$ 磅/吋^2；$\tau_{xy}=-1000$ 磅/吋^2。确定：(a)主应力和主平面；(b)最大剪应力和其作用面。在旋转单元草图上表示每一结果。

2.5-6　如果 $\sigma_x=0$，$\sigma_y=4000$ 磅/吋^2，$\tau_{xy}=2000$ 磅/吋^2，求解上一习题。

2.5-7　有一处于平面应力下的单元，旋转角 $\theta=30°$. 在 $\theta=30°$ 的平面上，其应力 $\sigma_\theta=-3750$ 磅/吋^2，$\tau_\theta=4330$ 磅/吋^2. 在 $\theta=120°$ 平面上，其应力 $\sigma_\theta=-3750$ 磅/吋^2，$\tau_\theta=-4330$ 磅/吋^2. 试求应力 σ_x，σ_y 和 τ_{xy}。

2.6-1　用莫尔圆求解习题 2.5-1。

2.6-2　用莫尔圆求解习题 2.5-2。

2.6-3　用莫尔圆求解习题 2.5-3。

2.6-4　用莫尔圆求解习题 2.5-4。

2.6-5　用莫尔圆求解习题 2.5-5。

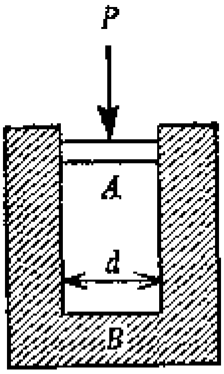
2.6-6　用莫尔圆求解习题 2.5-6。

2.6-7　用莫尔圆求解习题 2.5-7。

2.6-8　从图 2-11 的几何图形上说明 D 点的坐标如方程(2-24)所示。

2.7-1　有一薄板处于双轴应力下，承受的应力 $\sigma_x=10,000$ 磅/吋^2，$\sigma_y=20,000$ 磅/吋^2。z 方向的应力为零。试问材料中的最大法向应力和剪应力为多少？

2.7-2　有一直径为 d 的橡胶圆柱，置于钢圆柱 B 中，用力 P 加压(见图)。如果 $P=1000$ 磅，$d=2$ 吋，橡胶的泊松比为 0.45，确定橡胶与钢之间的压力 p。



习题 2.7-2

2.7-3　有一直径为 1 吋的实心钢球，承受的静水压力为 2000 磅/吋^2，试问其体积减小多少(假设 $E=30,000,000$ 磅/吋^2，$\nu=0.3$)。

2.8-1　应用第 2.8 节所导得的方程，求出主应变 ϵ_1 和 ϵ_2 以及它们的方向，如果 $\epsilon_x=500\times10^{-6}$，$\epsilon_y=140\times10^{-6}$，$\gamma_{xy}=-360\times10^{-6}$。用应变莫尔圆核对其结果。

2.8-2　如果 $\epsilon_x=-140\times10^{-6}$，$\epsilon_y=-500\times10^{-6}$，$\gamma_{xy}=-360\times10^{-6}$，求解上一习题。

2.8-3　如果 $\epsilon_x=500\times10^{-6}$，$\epsilon_y=300\times10^{-6}$，$\gamma_{xy}=1050\times10^{-6}$，求解习题 2.8-1。

第三章　扭　　转

3.1　圆杆的扭转

让我们讨论由作用于端点的力偶 T 而扭转的圆形截面杆(图 3-1 a)[1]. 按这种方式受力的杆称为处于**纯扭**状态下. 根据对称性的考虑，可以证明圆杆的横截面如同刚体一样绕纵轴旋转，而其半径保持直线，横截面保持圆形. 此外，如果

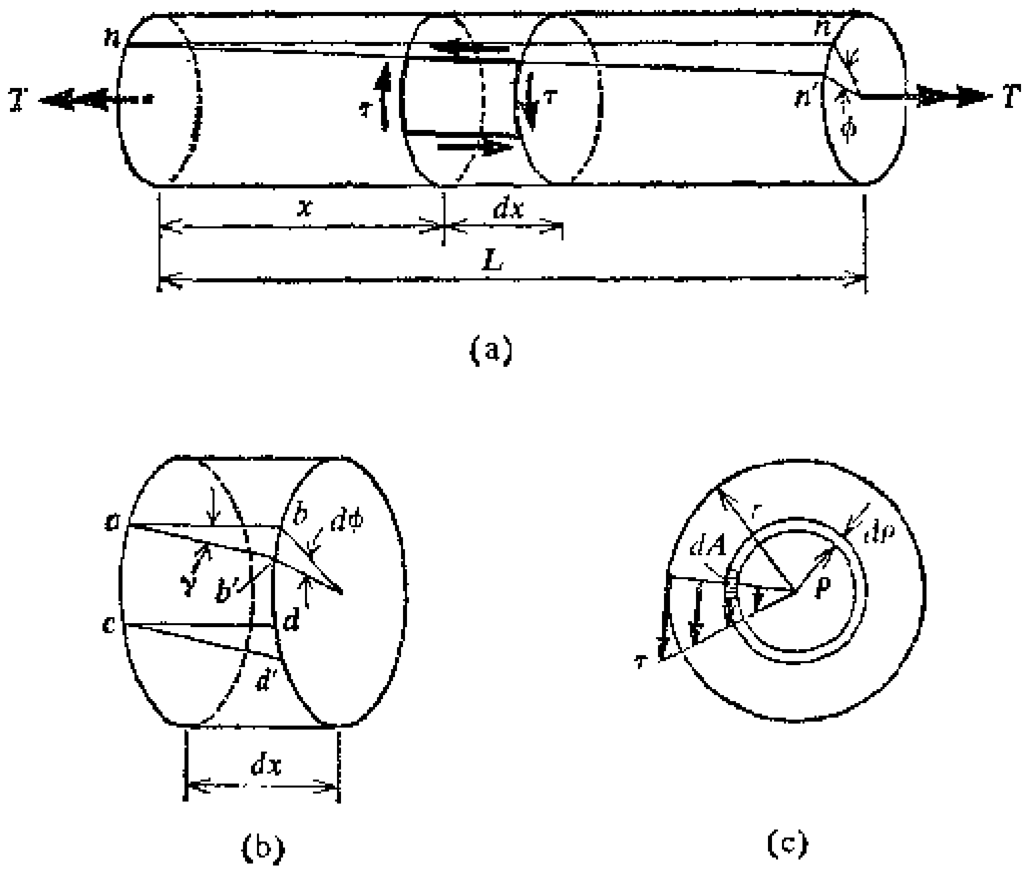


图 3-1　受纯扭的圆杆

1) 力偶在图中用双箭头向量表示，力偶的方向按向量的右手规则确定.

杆的总扭角很小，那么杆的长度和其半径均不改变。

扭转过程中，杆的一端将绕纵轴对另一端旋转。譬如，如果我们将杆的左端考虑为固定，那么右端将对左端旋转 ϕ 角（图 3-1 a）。同时，杆表面上的纵线，如线 nn，将转过很小的角变到 nn' 位置处。由于这种旋转，杆表面上的矩形单元，如图示位于相距 dx 两横截面之间的单元，变形成长菱形。此单元再示于图 3-1 b 中。图中圆盘形部分是从杆中切出来的。单元的原来轮廓标注为 $abdc$。旋转时，右边截面对另一面旋转，b 点和 d 点分别移动到 b' 点和 d' 点。在此旋转中，单元的边长不改变，但是其角点处的角度不再等于 90°。因此，我们看出，该单元处于纯剪状态（第 2.3 节），剪切应变 γ 的大小等于角 bac 的减小。此减小角为：

$$\gamma=\frac{bb'}{ab}$$

距离 bb' 为半径 r 所张 $d\phi$ 角的微小圆弧长度，其 $d\phi$ 为一截面对另一截面的旋转角。因此，我们求得 $bb'=rd\phi$。此外，距离 ab 等于单元的长度 dx。将这些表达式代入上述方程，我们得到：

$$\gamma=\frac{rd\phi}{dx} \tag{a}$$

当轴承受纯剪时，其扭转角的变化率 $d\phi/dx$ 沿杆的长度为一常数。此常数代表单位长度上的扭转角，用 θ 来代表。因此，我们看到 $\theta=\phi/L$，其中 L 为轴的长度。于是，根据方程(a)，我们得：

$$\gamma=r\theta=\frac{r\phi}{L} \tag{3-1}$$

作用于单元边上的剪应力 τ 的方向示于图 3-1 a 中。对于线性弹性材料，其剪应力值（根据方程 1-14 和方程 3-1）为

$$\tau=G\gamma=Gr\theta \tag{3-2}$$

方程（3-1）和（3-2）将轴表面上的应变和应力与单位长度扭转角联系起来。

轴的内部应力状态可按用于轴表面的相同方式来确定。由于杆横截面上的半径在扭转时保持直线且不发生歪曲，我们看出上面对于表面单元 $abcd$ 的讨论，也适用于半径为 ρ 的内部圆柱体表面上的相似单元(图 3-1 c)。所以，这样的内部单元也是处于纯剪状态，其相应剪切应变和剪应力用下列表达式求得：

$$\gamma=\rho\theta \qquad \tau=G\rho\theta \tag{3-3 a, b}$$

这些方程表明：其剪切应变和剪应力随距圆心的径向距离按直线变化，它们的最大值位于外表面上。其应力分布按三角形应力图示于图 3-1 c 中。

用方程(3-3 b)所得作用于横截面上的剪应力，附带有作用于该轴纵向平面上相等的剪应力(见图 3-2)。此结论是根据互相垂直平面上总是存在相等剪应力这一事实得来的，正如前面第 1.9 节所说明那样。如果材料纵向抗剪比横向抗剪较弱的话(例如木材)，那么受扭轴上的第一根裂纹将出现于表面的纵向。

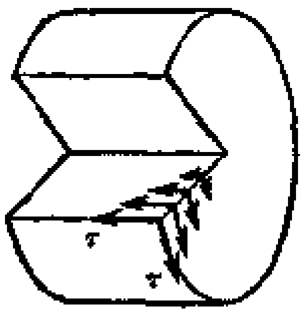


图 3-2 圆形杆中纵向剪应力

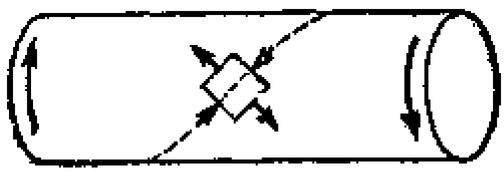


图 3-3 45°元素上的拉应力和压应力

轴表面上纯剪应力的状态（图 3-1 a）与第 2.3 节所述旋转 45°单元上作用相等的拉应力和压应力是等效的。因此，周

边与轴的轴线成 45° 的矩形单元，将出现图 3-3 所示的应力。如果有一种材料，其抗拉弱于抗剪，那么扭转时，顺着与轴线成 45° 的螺旋线发生拉伸破坏。这种破坏形式用一枝粉笔受扭便很容易得到证明。

现在可以建立作用的扭矩 T 和它所引起的扭转角之间的关系。图 3-1 c 中所示剪应力的合力必须与总扭矩 T 为静力等效。作用于面积 dA 单元上（图中以阴影表示）的剪力为 τdA，而此力对杆轴的力矩为 $\tau\rho dA$。应用方程(3-3 b)，我们看出：此力矩还等于 $G\theta\rho^2 dA$。总扭矩 T 为整个横截面上这种单元力矩之和，因此：

$$T=\int G\theta\rho^2 dA=G\theta\int\rho^2 dA=G\theta J \tag{3-4}$$

式中

$$J=\int\rho^2 dA \tag{3-5}$$

为圆形横截面的极惯性矩。对于半径为 r、直径为 d 的圆，其极惯性矩(见附录 B，第 6 种情况)为：

$$J=\frac{\pi r^4}{2}=\frac{\pi d^4}{32} \tag{3-6}$$

根据方程(3-4)，我们得：

$$\theta=\frac{T}{GJ} \tag{3-7}$$

它表明：单位长度扭转角 θ 与 T 成正比地变化，而与乘积 GJ 成反比地变化，GJ 称为轴的**扭转刚度**。总的扭转角 ϕ（等于 θL）为：

$$\phi=\frac{TL}{GJ} \tag{3-8}$$

此方程对于理论的试验验证是有用的，它已被许多试验所核对，证明在它推导中所作的假定是正确的。还应该注意：扭

转试验通常用于确定各种材料的剪切弹性模量 G. 如果某一轴上由于所给扭矩产生的扭转角已经测得的话，那么 G 的大小可以根据方程(3-8)容易地计算出来.

将方程(3-7)中的 θ 代入方程(3-2)，我们得到用于计算实心圆形轴受扭时最大剪应力的方程：

$$\tau_{max}=\frac{Tr}{J} \tag{3-9}$$

此方程表明，最大剪应力与作用的扭矩成正比，而与其横截面的极惯性矩成反比. 横截面上距离圆心为 ρ 的任一点处之剪应力为：

$$\tau=\frac{T\rho}{J} \tag{3-10}$$

此式是根据方程(3-3 b)[1]得来的.

在机械设计中，有时轴的直径必须根据它所需传动的马力来确定. 当轴旋转一圈时扭矩 T 所作的功为 $2\pi T$，因此，每分钟所作的功为 $2\pi nT$，其中 n 为轴的每分钟的旋转圈数. 回忆：一马力等于33,000呎·磅/分，我们看出马力 H 为：

$$H=\frac{2\pi nT}{12(33,000)}$$

只是其中 T 以吋·磅计. 如果马力 H 为已知，那么轴的扭矩 T 可根据下列方程确定：

$$T=\frac{396,000H}{2\pi n}\approx\frac{63,000H}{n} \tag{3-11}$$

式中 T 的单位为吋·磅. 如果扭矩 T 为已知，轴中的最大剪应力可根据方程(3-9)求得，而扭转角根据方程(3-8)求得.

---

1) 上面的方程是对实心圆形杆导出的. 非圆形实心杆的扭转将在《高等材料力学》一书中讨论. 这里所介绍的基本扭转理论起源于 C. A. Coulomb(1736-1806)和 Thomas Young(参考文献 3-1)的著作. 一般扭转理论是Saint-Veant提出的(参考文献 3-2).

例题 1　有一根不等直径的实心圆轴 AB，其两端固定。该杆承受扭矩 T_0，如图 3-4 a 所示。试确定两端处的反扭矩 T_a 和 T_b，以及 T_0 作用截面处的旋转角 ϕ_0。

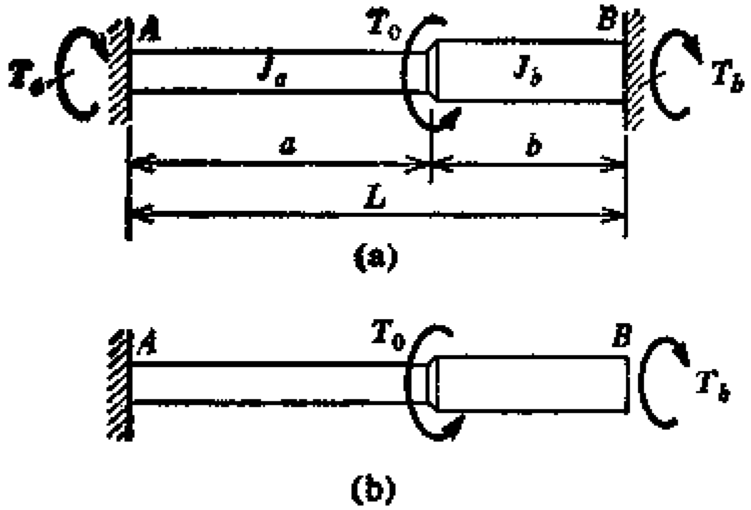


图 3-4　例题 1

该杆是静不定的，因为有两个未知扭矩 T_a 和 T_b，但只有一个静力平衡方程：

$$T_a+T_b=T_0 \tag{b}$$

如果我们选择反扭矩 T_b 作为赘余力，那么假想杆的 B 端与其支承载离开（图 3-4 b），我们看到 B 端的总旋转角 ϕ_b 为 T_0 和 T_b 所产生的旋转角之和。因而，我们得：

$$\phi_b=\frac{T_0a}{GJ_a}-\frac{T_ba}{GJ_a}-\frac{T_bb}{GJ_b}$$

由于 B 端处的旋转角必须等于零，其协调方程为 $\phi_b=0$。因此，对于扭矩 T_b 我们得到下列结果：

$$T_b=\frac{T_0}{1+\dfrac{bJ_a}{aJ_b}} \tag{c}$$

将此结果代入方程(b)，得到扭矩 T_a 的类似表达式：

$$T_a=\frac{T_0}{1+\dfrac{aJ_b}{bJ_a}}=\frac{bJ_a}{aJ_b}T_b \tag{d}$$

T_0所作用截面处的旋转角 ϕ_0，可根据杆的左边或右边部分求出如下：

$$\phi_0=\frac{T_a a}{GJ_a}=\frac{T_b b}{GJ_b}=\frac{T_0 ab}{G(bJ_a+aJ_b)} \tag{e}$$

例题 2　有一实心圆截面锥形杆 AB，其长度为 L(图 3-5)，因受扭矩 T 作用而扭转. 试求杆的扭转角 ϕ.

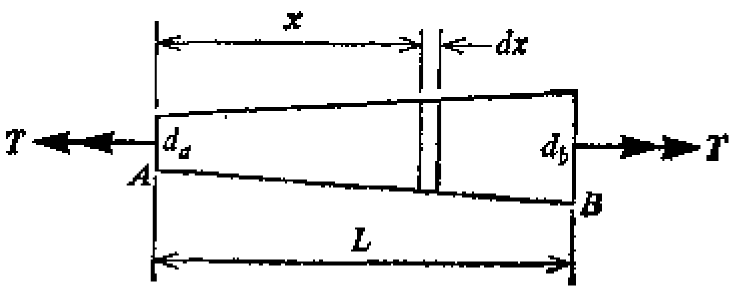


图 3-5　例题 2

如果杆的锥度很小，我们可以对长度为 dx 的单元(图 3-5)应用方程(3-8)求出相当精确的 ϕ 角. 此单元的扭转角为：

$$d\phi=\frac{Tdx}{GJ_x}$$

式中 J_x 代表距左端 x 处横截面的极惯性矩. A 和 B 端的直径分别以 d_a 和 d_b 表示，我们看出 J_x 的表达式为：

$$J_x=\frac{\pi}{32}\left(d_a+\frac{d_b-d_a}{L}x\right)^4 \tag{f}$$

总扭转角 ϕ 为：

$$\phi=\int_0^L d\phi=\int_0^L\frac{Tdx}{GJ_x} \tag{g}$$

将方程(f)代入方程(g)，并积分，我们求出：

$$\phi=\frac{32\,TL}{3\,\pi G}\left(\frac{1}{d_b-d_a}\right)\left(\frac{1}{d_a^3}-\frac{1}{d_b^3}\right) \tag{h}$$

此例题说明当 J 为 x 的函数时，方程(3-8)如何用来求旋转角 ϕ。当 T 沿杆轴变化时，也能应用同样的方法。

3.2　空心圆杆的扭转

实心圆杆产生扭转时的剪应力在外表面处为最大，而在

中心处等于零，正如前面所说明那样．因此，实心杆中相当大一部分材料实际受力低于容许剪应力．合理地采用空心杆对于减小重量和节省材料是有意义的．

空心圆轴的扭转分析是建立于与实心轴相同的假设之上的．因此，由于其横截面中的径向直线保持直线，上节中（方程 3-3）所导得的剪应力和剪切应变的表达式仍然可以应用．自然，这些方程中所出现的径向距离 ρ 限于 r_1 至 r_2 范围，其中 r_1 为圆管的内半径，r_2 为其外半径（图 3-6）．

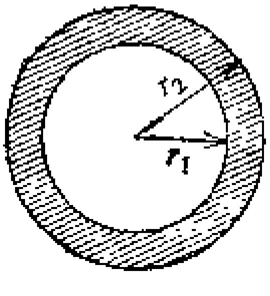


图 3-6　空心圆杆

所作用的扭矩 T 与单位长度扭转角 θ 之间的关系可根据方程(3-4)和(3-5)求得，只是其积分的界限为 $\rho=r_1$ 和 $\rho=r_2$。因此，关系式 $T=G\theta J$ 仍然能够成立，只是 J 为环形截面的极惯性矩：

$$J=\frac{\pi}{2}(r_2^4-r_1^4)=\frac{\pi}{32}(d_2^4-d_1^4) \tag{3-12}$$

上节中所给的 θ, ϕ 和 τ 的基本方程（方程 3-7 至 3-10）可用于圆管中，这些方程式中的 J 按上述表达式求算[1]．

例题 1　一根空心轴和一根实心轴，具有相同的外半径 r，空心轴的内半径为 $0.6r$．假设这两根杆承受相同的扭矩，试比较它们的重量和最大剪应力．

重量与横截面积成正比，因而，实心轴的重量与 πr^2 成正比，空心轴的重量与 $\pi r^2-\pi(0.6r)^2=0.64\pi r^2$ 成正比．所以，空心轴为实心轴重量的百分之六十四．

最大剪应力与 $1/J$ 成正比．对于实心轴，我们知道 $J=\pi r^4/2$，对于

1）任意截面形状薄壁管的扭转将在第 3.4 节中讨论，也在《高等材料力学》中讨论．

空心轴 $J=\pi r^4/2-\pi(0.6r)^4/2=0.8704\pi r^4/2$。所以，空心轴中最大剪应力与实心轴最大剪应力之比为 1.15。这些结果表明 $r_1/r_2=0.6$ 的空心轴，其最大剪应力(与实心轴相比)增大百分之十五，但其重量减少百分之三十六。

例题 2 有一圆杆是由空心管 B 和实心杆 A 坚固地结合到一起构成的一根实心杆(图 3-7)。里面材料的剪切弹性模量为 G_a，外面材料的剪切模量为 G_b。试分别导出当该组合杆承受扭矩 T 时里面材料和外面材料中最大剪应力 τ_a 和 τ_b 的公式。

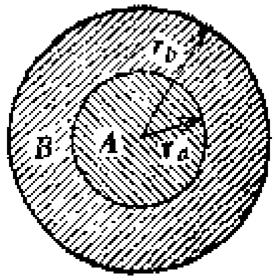


图 3-7 例题 2

管与心的单位长度扭转角 θ 必须相同。因此，根据方程(3-3 b)，我们得：

$$\theta=\frac{\tau_a}{G_a r_a}=\frac{\tau_b}{G_b r_b} \tag{a}$$

式中 τ_a 为里面材料在半径 r_a 处的剪应力，τ_b 为外面材料在半径 r_b 处的剪应力。此外，总扭矩由杆心上扭矩 T_a 加管的扭矩 T_b 所组成，按方程(3-4)确定：

$$T=T_a+T_b=G_a\theta J_a+G_b\theta J_b \tag{b}$$

式中极惯性矩 J_a 和 J_b 为

$$J_a=\frac{\pi r_a^4}{2} \qquad J_b=\frac{\pi}{2}(r_b^4-r_a^4)$$

从方程(b)求解 θ，得

$$\theta=\frac{T}{G_aJ_a+G_bJ_b}$$

将它与方程(a)组合，得

$$\tau_a=T\frac{G_ar_a}{G_aJ_a+G_bJ_b} \qquad \tau_b=T\frac{G_br_b}{G_aJ_a+G_bJ_b} \tag{c}$$

杆中两部分所承受的扭矩为：

$$T_a=T\frac{G_aJ_a}{G_aJ_a+G_bJ_b} \qquad T_b=T\frac{G_bJ_b}{G_aJ_a+G_bJ_b} \tag{d}$$

注意：此例题属于静不定体系的分析。

3.3 扭转应变能

实心圆杆中的应变能可根据前面关于纯剪时弹性材料单元所导得的方程(1-23 a)来计算,这里将它重复如下:

$$u=\frac{\tau^2}{2G} \tag{a}$$

在此方程中,u 为单位体积中的应变能,τ 为剪应力. 为了将此方程用于受扭的杆,我们必须得到 u 的一般表达式,然后对杆的整个体积进行积分.

如果 τ_{max} 为杆表面处的剪应力,那么距轴线 ρ 处的剪应力为 $\tau_{max}\rho/r$,式中 r 为其外半径. 在此径向距离处单位体积的应变能(按方程 a)为:

$$u=\frac{\tau_{max}^2\rho^2}{2r^2G}$$

面在长度为 L、半径为 ρ、厚度为 $d\rho$ 的单元管上,应变能为:

$$dU=udV=\frac{\pi\tau^2{}_{max}L\rho^3d\rho}{r^2G}$$

其总应变能藉对上述表达式,在 $\rho=0$ 至 $\rho=r$ 范围上进行积分求得,因此

$$U=\frac{\pi\tau_{max}^2 L}{r^2G}\int_0^r\rho^3d\rho=\frac{\pi\tau_{max}^2 Lr^2}{4G} \tag{3-13}$$

此方程可用于求实心轴的应变能,只要其最大剪应力为已知. 注意:$\tau_{max}=Tr/J$,其中 $J=\pi r^4/2$,我们可将方程(3--13)写为另一种形式:

$$U=\frac{T^2L}{2GJ} \tag{3-14}$$

它给出用扭矩 T 表示的应变能.

上面的推导也可用于空心圆轴,此时可再次得到方程(3--14),只是 J 应为相应的极惯性矩(方程 3-12).

求扭转时应变能的一个较为简单方法是根据荷载-变位曲线图(图3-8)求得。如果杆件的材料服从虎克定律，那么作用扭矩 T 与扭转角 ϕ 之间的关系将为直线关系，并用方程(3-8)求得。在杆件扭转过程中，扭矩 T 所做的功等于荷载-变位曲线图下面的面积，因此储存于杆中相应的应变能为：

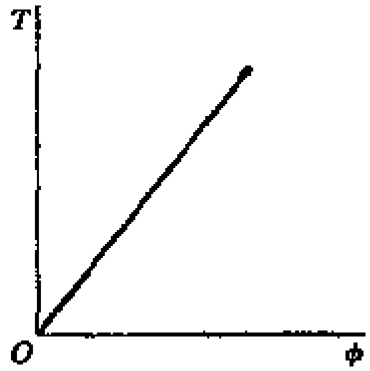


图 3-8　杆受扭时的荷载-位移图

$$U=\frac{T\phi}{2} \tag{3-15}$$

组合方程(3-8)和方程(3-15)，得出用下面任一形式表示应变能的表达式：

$$U=\frac{T^2L}{2GJ} \qquad U=\frac{GJ\phi^2}{2L} \tag{3-16a, b}$$

这两个方程中的第一个与方程(3-14)相同，它以扭矩 T 表示应变能；第二个方程以扭转角 ϕ 表示应变能。这些方程对于实心或空心圆轴都是成立的，只要对于 J 采用相当的表达式。注意方程(3-16)与前面受拉杆所导得的方程(方程1-16)之间的相似性。

如果受扭杆为一根半径变化的圆形截面杆(例如，象图 3-5 所示)或者扭矩沿杆身变化，为了求出杆中的应变能，我们必须考虑距杆一端 x 处长度为 dx 的单元圆盘。假设作用于此单元上的扭矩为 T_x，其横截面的极惯性矩为 J_x，我们根据方程(3-16a)看出：该单元的应变能为：

$$dU=\frac{T_x^2dx}{2GJ_x}$$

杆的总应变能现在可表达成下列形式：

$$U=\int_0^L\frac{T_x^2dx}{2GJ_x} \tag{3-17a}$$

另一种方法，我们可以从方程(3-16b)开始，并注意到长度为 dx 的单元的扭转角为 $d\phi$。于是，我们根据方程(3-16 b) 得到该单元中应变能的下列表达式：

$$dU=\frac{GJ_x(d\phi)^2}{2\,dx}=\frac{GJ_x}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx$$

根据它得：

$$U=\int_0^L\frac{GJ_x}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx \qquad (3\text{-}17\text{b})$$

只要扭矩 T_x 或单位长度的扭转角 θ(等于 $d\phi/dx$) 为已知，就可用方程(3-17)中的一个方程来求应变能。

3.4 薄壁管

图 3-9 a 表示任意横截面形状的薄壁管。管的厚度 t 可沿其横截面四周而变，但是假设厚度与横截面的总宽度相比是很小的。该管为柱体形，其两端承受扭矩 T，在这些扭矩作用下，该管的每一横截面中将产生剪应力(图 3-9 b)。这种剪应力可认为沿管的微小厚度上是为均匀的，虽然它们沿截面四周可能是变化的。

为了研究剪应力 τ 的大小，首先让我们讨论取两个纵向切面 ab 和 cd(图 3-9 b) 所得长度为 dx 的单元 $abcd$。在此单元的纵向边缘上将存在与作用于横截面上的剪应力大小相同的剪应力，因为在两个互相垂直平面上的剪应力大小相等(见第 1.9 节)。纵向平面上的剪应力的合力 F_1 和 F_2 (图 3-9 c)可表达如下：

$$F_1=\tau_1t_1dx \qquad F_2=\tau_2t_2dx$$

其中 τ_1 和 τ_2 分别代表 b 点和 c 点处的剪应力，而 t_1 和 t_2 为其相同位置处管的厚度。根据图 3-9 c所示单元的平衡，我们看出 $F_1=F_2$，或

$$\tau_1t_1=\tau_2t_2$$

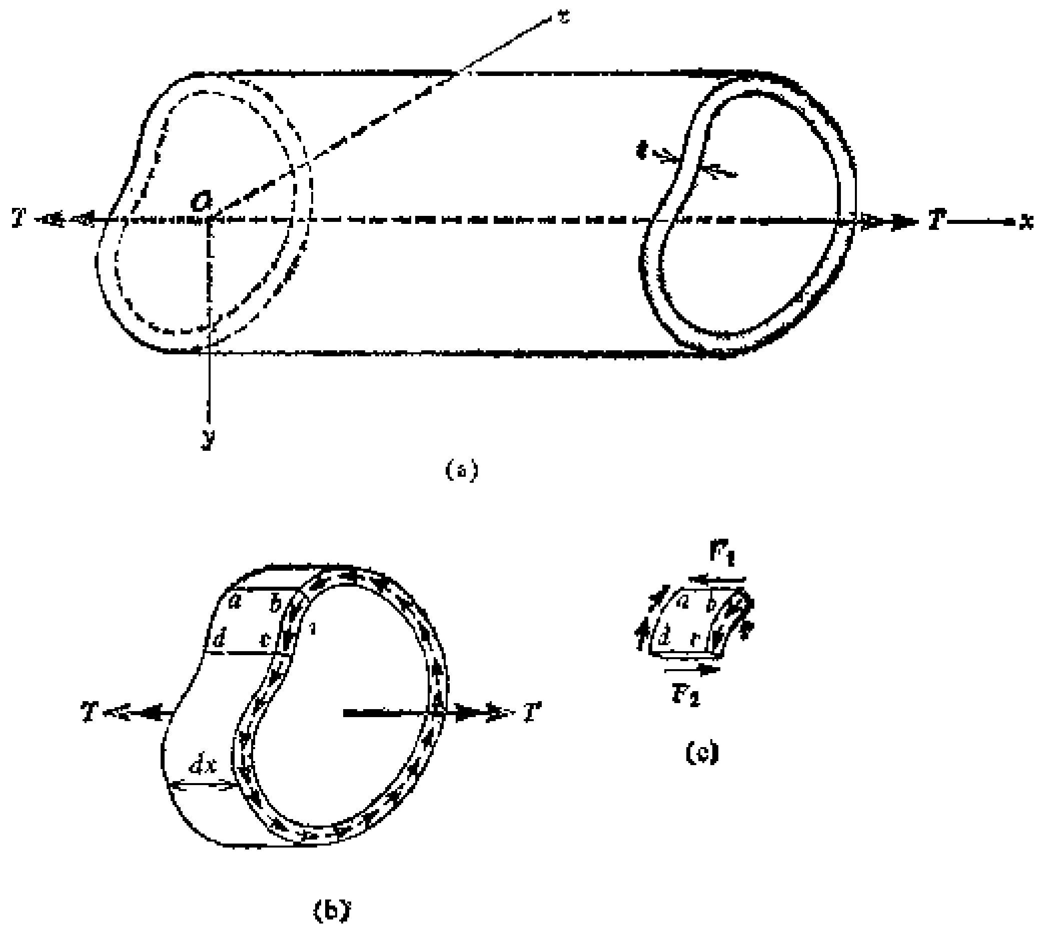


图 3-9 任意横截面形状的薄壁管

因为纵向切面 ab 和 cd 的位置是任意选择的，我们根据上面的方程看出：横截面中任何一点处的剪应力与其管壁厚度之乘积均相同．此乘积称为**剪力流**，以符号 f 表示：

$$f=\tau t=\text{常数} \qquad (3\text{-}18)$$

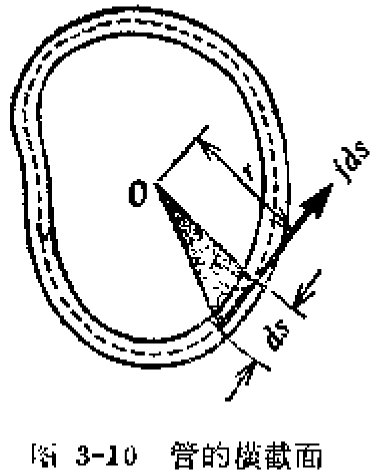


图 3-10 管的横截面

因此，最大剪应力发生于厚度最小的地方，反之，最小剪应力发生在厚度最大的地方．自然，如果管的厚度是均匀者，那么剪应力 τ 沿管的四周为一常数．

为了使剪力流 f 与作用于管上的扭矩 T 联系起来，现在讨论横

截面中长度为 ds 的单元(图3-10). 作用于阴影单元上的剪力为 fds,面此力对任一点 O 的力矩为:

$$dT=rfds$$

其中 r 为 O 点至管壁中线[1] 的切线处之距离. 其总扭矩 T 藉对横截面中线的整个长度 L_m 进行积分来求得:

$$T=f\int_0^{L_m} rds$$

对此表达式中的积分式可作一简单的几何说明. 其中 rds 这个量代表图 3-10 中所示微小三角形面积的两倍. 注意,该三角形的底边长度为 ds,高度等于 r. 所以,上述积分式代表管壁中线所包住的面积的两倍. 用 A_m 代表此面积,我们得

$$T=2fA_m$$

或

$$f=\tau t=\frac{T}{2A_m} \tag{3-19}$$

根据此方程, 可以计算任一薄壁管的剪力流和剪应力.

管的单位长度的扭转角 θ, 可藉考虑管的应变能计算出来. 单位体积的应变能为 $\tau^2/2G$,按方程(1-23 a)求得, 因此管的单位长度的应变能为:

$$U=\int_0^{L_m}\frac{\tau^2 t}{2G}ds=\frac{f^2}{2G}\int_0^{L_m}\frac{ds}{t}$$

将方程(3-19)的剪力流表达式代入此式,并令应变能等于扭矩 T 所做的功,我们得:

$$\frac{T^2}{8GA_m^2}\int_0^{L_m}\frac{ds}{t}=\frac{T\theta}{2}$$

所以, 单位长度的扭转角为:

$$\theta=\frac{T}{4GA_m^2}\int_0^{L_m}\frac{ds}{t} \tag{3-20}$$

1) 这里所说的"管壁中线"系指壁厚的等分线.——译者注

根据此方程，当横截面的尺寸为已知时，可以计算扭转角. 如果厚度 t 为常数，那么方程成为：

$$\theta=\frac{TL_m}{4\,GtA_m^2}=\frac{\tau L_m}{2\,GA_m} \tag{3-21}$$

其总扭转角 ϕ 藉 θ 与管的长度 L 相乘而求得[1].

如果我们对 J 采取下列表达式：

$$J=\frac{4\,A_m^2}{\int_0^{L_m}\frac{ds}{t}} \tag{3-22}$$

那么薄壁管单位长度扭转角的方程 (3-20)，与实心圆杆的方程(3-7)具有相同的形式. J 这个量一般称为横截面的扭转常数. 我们看出扭转常数在圆形截面杆情况下等于极惯性矩；对于薄壁管，则按方程(3-22)求得. 当管的厚度 t 为常数时，方程(3-22)简化为：

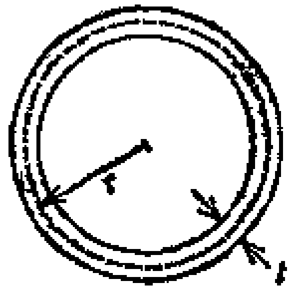


图 3-11 薄壁杆件

$$J=\frac{4\,tA_m^2}{L_m} \tag{3-23}$$

对于具有相等厚度 t、至中线的半径为 r 的薄壁圆管（图 3-11），其中线的长度 $L_m=2\,\pi r$，中线所包住的面积 $A_m=\pi r^2$. 因此，其剪力流和剪应力(根据方程 3-19)为

$$f=\frac{T}{2\,\pi r^2} \qquad \tau=\frac{T}{2\,\pi r^2 t} \tag{3-24 a, b}$$

根据方程(3-20)得到单位长度的扭转角为：

$$\theta=\frac{T}{2\,\pi Gr^3t} \tag{3-25}$$

而扭转常数为

$$J=2\,\pi r^3t \tag{3-26}$$

1) 方程(3-19)和(3-21)分别称为 Bredt 第一公式和第二公式（参考文献 3-3 和 3-4）

关于薄壁圆管的这些结果，也可根据前面对于空心管所导得的方程(见第 3.2 节)来求得。例如，扭转常数(在这种情况下，等于极惯性矩)为

$$J=\int\rho^2 dA\approx r^2\int dA\approx 2\pi r^3 t$$

这里假设整个管厚的半径 ρ 大致为常数，且等于 r。其最大剪应力(见方程 3-9)为

$$\tau=\frac{Tr}{J}\approx\frac{T}{2\pi r^2 t}$$

这里假设整个厚度上的剪应力 τ 为常数，且等于截面中线处之值。

如果受扭管的管壁很薄，那么管壁的屈曲可能性必须加以考虑。由低碳钢构成的长圆管，当 r/t(见图 3-11)大约为 60 时，在法向资用应力下便将产生屈曲(见参考文献 3-5)，这就是一个例证。

例题 1 试将近似方程(3-24 b)所求得薄壁圆管中的平均剪应力图 3-11 与按扭转公式计算所得的最大剪应力(方程 3-9)进行比较。

用剪应力的近似公式得出

$$\tau_1=\frac{T}{2\pi r^2 t}=\frac{T}{2\pi t^3\beta^2} \tag{a}$$

式中所引进的符号 $\beta=r/t$。管中实际最大剪应力用下列方程求得：

$$\tau_2=\frac{T(r+t/2)}{J} \tag{b}$$

其中

$$J=\frac{\pi}{2}\left[\left(r+\frac{t}{2}\right)^4-\left(r-\frac{t}{2}\right)^4\right]$$

系按方程(3-12)求得。展开之后，J 的表达式简化为：

$$J=\frac{\pi r t}{2}(4r^2+t^2)$$

因此，τ_2 的表达式(方程 b)成为

$$\tau_2=\frac{T(2r+t)}{\pi rt(4r^2+t^2)}=\frac{T(2\beta+1)}{\pi t^3\beta(4\beta^2+1)} \tag{c}$$

比值 τ_1/τ_2 为

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{4\beta^2+1}{2\beta(2\beta+1)} \tag{d}$$

它仅与 β 值有关，亦即仅与比值 r/t 有关。对于等于 5，10 和 20 的 β 值，我们根据方程(d)分别得到比值 $\tau_1/\tau_2=0.92$、0.96 和0.98。因此，方程(d)表明：按应力近似公式所得的结果略微小于由精确公式得到的结果，而且表明近似公式的精确度随比值 r/t 的增大而增大。

例题 2 有一圆管和一方管(图 3-12)，由相同的材料构成。这两根管具有相同的长度、厚度和横截面积，而且两根管承受相同的扭矩。试问这两根管剪应力之比值和扭转角之比值是多少？(方管角点处应力集中的影响略去不计)。

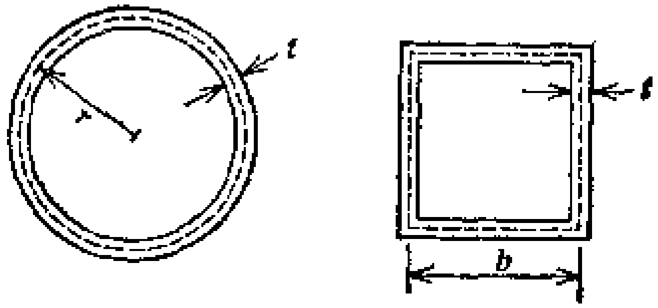


图 3-12 例题 2

对于圆管，横截面中线所包住的面积 $A_{m1}=\pi r^2$，其中 r 为中心线的半径。此外，圆管的横截面积为 $A_1=2\pi rt$。

对于方管，其横截面积 $A_2=4bt$，其中 b 为一边沿中线度量的长度。因为两根管的面积相同，我们得到 $b=\pi r/2$。此外，横截面中线所包住的面积 $A_{m2}=b^2$。

圆管中剪应力与方管中剪应力之比值 τ_1/τ_2(见方程 3-19)为：

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{A_{m2}}{A_{m1}}=\frac{b^2}{\pi r^2}=\frac{\pi}{4}=0.785 \tag{e}$$

扭转角之比值(见方程 3-21)为

$$\frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{\tau_1 A_{m2}}{\tau_2 A_{m1}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=0.617 \tag{f}$$

这些结果表明圆管不仅剪应力低于方管，而且具有较高的抗扭刚度.

3.5 圆杆的非弹性扭转

第3.1和3.2节中对圆杆扭转所推导的方程，仅在材料服从虎克定律时才适用. 现在让我们讨论当剪应力超过比例极限时杆的性能. 在这种情况下，我们仍然可以根据对称性的考虑假设圆截面保持为平面，其半径保持为直线. 因此与杆轴距离为ρ处(见图3-1 c) 的剪切应变γ按弹性扭转情况下的相同公式来求得，亦即

$$\gamma=\rho\theta \tag{3-27}$$

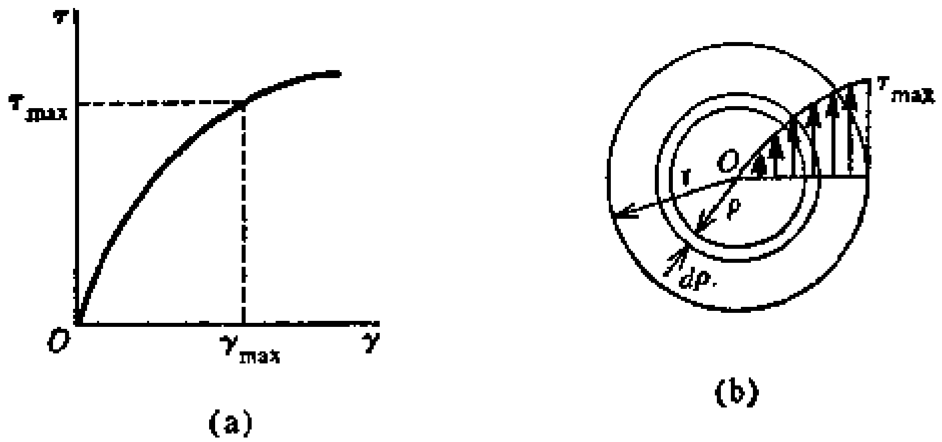


图 3-13 圆杆的非弹性扭转

横截面外缘处的最大剪切应变为：

$$\gamma_{max}=r\theta \tag{3-28}$$

式中r为杆的半径. 如果材料的剪切应力-应变图为已知(图3-13 a)，杆中任一点处的剪应力τ就可以确定. 位于横截面外缘处的应变为γ_{max}，其相应的应力τ_{max}可从应力-应变图求得. 对于杆中的中间点，可采用同样的方法. 因此，整个横截面上剪应力的分布(图3-13 b)与应力-应变图本身具有同样的形状.

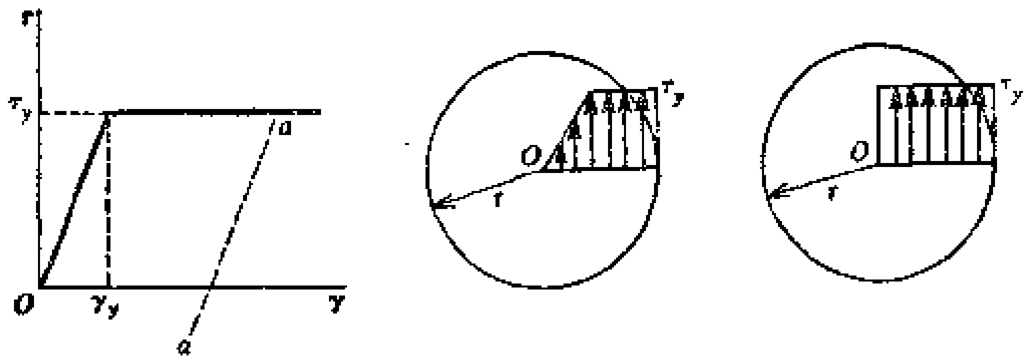
使杆上产生所假定的单位长度扭转角 θ 所必须作用的扭矩T，可根据静力学方程求得(见图 3-13 b)：

$$T=\int_0^r 2\pi\rho^2\tau d\rho \tag{3-29}$$

根据方程(3-27)，我们得到 $\rho=\gamma/\theta$ 和 $d\rho=d\gamma/\theta$。将这些关系式代入方程(3-29)，并将积分的上限改变为 $\gamma_{max}=r\theta$，我们得到

$$T=\frac{2\pi}{\theta^3}\int_0^{r\theta}\tau\gamma^2 d\gamma \tag{3-30}$$

此方程右边的积分具有简单的几何意义。它为应力-应变图下面坐标原点O与最大应变 γ_{max} 点之间面积对竖直轴(即 τ 轴)的惯性矩。因此，对于任一假定的 θ 值，我们可计算 γ_{max} 和相应的惯性矩。于是根据方程(3-30)，我们可得到扭矩 T 的值。藉对不同的 θ 值重复此方法，我们得到表示 T 与 θ 的关系曲线。有了这样的曲线，我们可以容易地确定对于给定 T 值的 θ 和 τ_{max}。



(a) (b) (c)

图 3-14 弹塑性材料杆的扭转

如果杆件的材料具有明显的屈服点 τ_y，那么可使应力-应变图理想化，如图 3-14 a 所示。该图由两根直线所组成：第一根直线代表弹性线性状态，第二根直线代表完全塑性状态。只要杆中最大应变小于 γ_y，杆就属于弹性的，从而第 3.1 节所

导得的公式可以被应用．当横截面外缘处的应变超过 γ_y 时，横截面上的应力分布将具有图 3-14 b 所示形式．该图说明屈服开始于外缘处，当应变增大时，屈服便向里发展．如果应变变得非常大，那么屈服区将伸展到杆的中部，其应力将接近均匀分布，如图 3-14 c 所示．其相应扭矩 T 为杆的极限扭矩，它的值(根据方程 3-29)为

$$T_u=\int_0^r 2\pi\rho^2\tau_y d\rho=\frac{2\pi r^3\tau_y}{3} \tag{3-31}$$

当扭矩达到此值时，扭矩不再增加而轴将发生更大的扭转．最后，应变硬化的效应变得很显著，于是产生大于 τ_y 的应力．

杆中最初开始屈服时的扭矩 T，用 τ_y 代替方程 (3-9) 的 τ_{max} 求得：

$$T_y=\frac{\tau_y J}{r}=\frac{\pi r^3\tau_y}{2} \tag{3-32}$$

比较方程(3-31)和(3-32)，我们看出极限扭矩与屈服扭矩之比为：

$$\frac{T_u}{T_y}=\frac{4}{3} \tag{3-33}$$

根据此结果，我们看出：杆中开始屈服后，只要扭矩增大三分之一，就将使杆到达其极限承载能力．

残余应力　如果杆在扭转时加载超过弹性极限，那么荷载移去后，杆中将剩余一部分应力，达种应力称为残余应力．为了说明它们的计算，让我们假设有一实心圆杆加载至极限扭矩 T_u，因面产生图 3-14 c 所示的应力分布．假设随后将此扭矩全部移去．在荷载移去的当中，亦即在卸载的过程中，材料的应力-应变图为一直线 (图 3-14 a 中线 a-a)，此线平行于代表虎克定律的初始直线．因此，卸载过程中产生的应力可根据线性弹性状态方程来求得 (方程 3-9 和 3-10)．

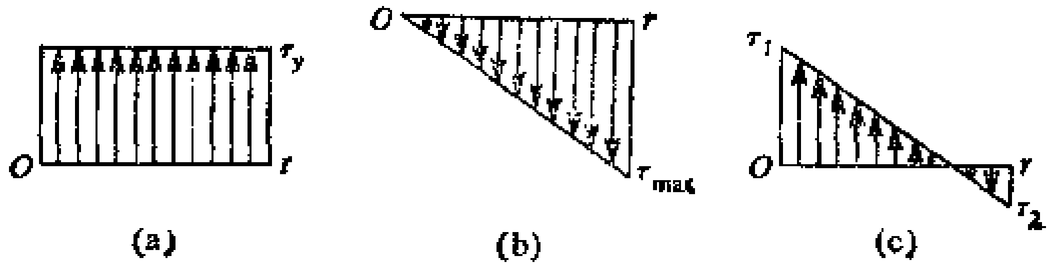


图 3-15 残余应力

加载过程中所产生的应力与卸载过程中所产生的应力之叠加示于图 3-15 中。加载过程中所达到的应力示于该图的第一部分内；其相应扭矩为 $T_u=2\pi r^3\tau_y/3$。此同一扭矩用图 3-15 b 中的卸载应力图来表示，只是这里扭矩作用于相反的方向，而且其状态是线性弹性的。最大应力 $\tau_{max}=T_u r/J$ 或 $\tau_{max}=4\tau_y/3$。杆中的残余应力藉迭加其加载和卸载所产生的应力来求得，此残余应力示于图 3-15 c 中。杆中心处的残余应力为：

$$\tau_1=\tau_y$$

横截面外缘处的残余应力为

$$\tau_2=\tau_{max}-\tau_y=\tau_y/3$$

这后一种应力与 τ_1 方向相反。这种计算残余应力的相同方法可用于别的应力-应变图形。

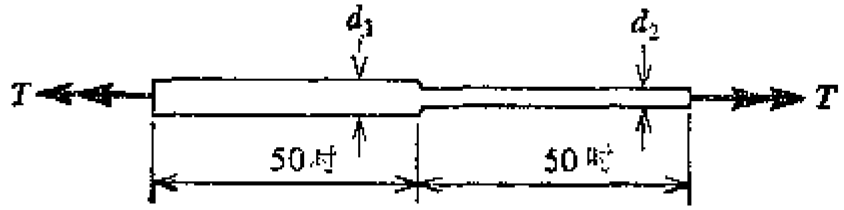
习　　题

3.1-1　假设当一直径 $d=2$ 吋的钢轴扭转角为 6° 时最大剪应力为 13,500 磅/吋²，试确定该轴的长度（$G=12\times10^6$ 磅/吋²）。

3.1-2　假设有一钢线扭转 90° 角时，最大剪应力为 13,500 磅/吋²，试问该线长度与直径之比值（L/d）是多少（$G=12\times10^6$ 磅/吋²）？

3.1-3　假设圆杆的容许剪应力 $\tau_w=3000$ 磅/吋²，单位长度的容许扭转角每 12 呎为 1°，试问圆杆承受扭矩 $T=32,000$ 吋·磅时所需要的最小直径是多少（假设 $G=12\times10^6$ 磅/吋²）？

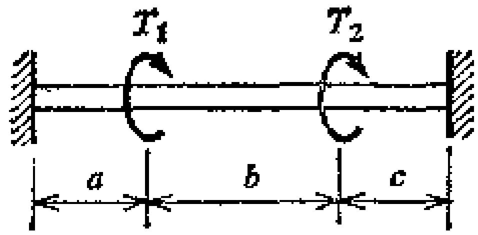
3.1-4　有一受扭杆，其二分之一长度上的直径 $d_1=2$ 吋，另外二分之一长度上的直径 $d_2=1.5$ 吋(见图)．如果其扭转角 ϕ 不超过 0.01 弧度，试问容许扭矩 T 是多少(假设 $G=12\times10^6$ 磅/吋²)？



习题 3.1-4

3.1-5　扭矩 T 作用于直径为 d 的实心圆杆上，测得该杆表面上(与轴成 45°)的最大法向应变为 ϵ．试导出以 T，d 和 ϵ 表示的剪切弹性模量 G 的公式．

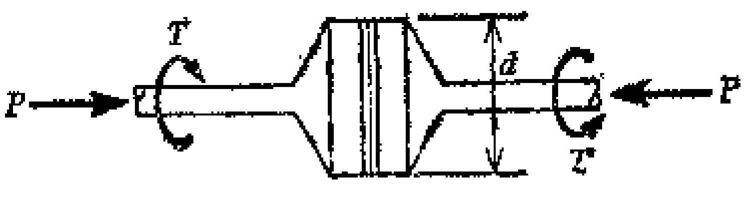
3.1-6　假设在图示两端嵌固圆杆上 $T_1=2T_2$，$a=c=L/4$，$b=L/2$，试问中间区域内的扭矩为多少？



习题 3.1-6

3.1-7　如果轴的容许剪应力 $\tau_a=3000$ 磅/吋²，试确定每分钟 120 转情况下传动 200 马力的轴所需要的直径 d．

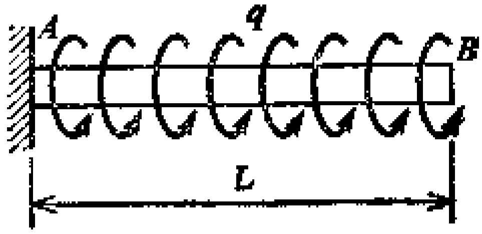
3.1-8　有一简单盘形离合器，从一根轴往另一根轴传递扭矩，如图所示．该离合器中的诸板均为圆形的(直径为 d)，它们藉法向力 P 压合在一起．假设为 P 均匀地分布于离合器诸板的面上，诸板之间的摩擦系数为 f，求离合器没有滑动所能传递的最大扭矩 T．



习题 3.1-8

3.1-9 有一圆截面杆 AB,其左端固定住(见图),承受等强度 q 的分布扭矩作用。试导出该杆 B 端处旋转角 ϕ 的公式。

3.1-10 参见图 3-5 所示和例题 2 所讨论的杆,试问当该杆的扭转角 ϕ 等于直径为 d_b 的棱柱形杆扭转角之两倍时其比值 d_b/d_a 是多少?



习题 3.1-9

3.1-11 有一实心圆形截面杆(直径 $d=3$ 吋),同时承受 45 千磅轴向拉力 P 和 30 吋·千磅扭矩 T 的作用。试计算杆中最大拉应力、最大压应力和最大剪应力。

3.2-1 一空心圆轴和一实心圆轴,其材料相同,要按传递相同的扭矩 T 和具有相同的最大剪应力进行设计。如果空心轴的内半径为其外半径的 0.8 倍,试求(a)空心轴的重量与实心轴的重量之比;(b)空心轴的外径与实心轴直径之比。

3.2-2 有一外径为 4 吋、内径为 3.5 吋、长为 7 呎的空心铝轴($G=4,000,000$ 磅/吋^2)。(a)如果该轴由于两端头扭矩而扭转,试问当最大剪应力为 10,000 磅/吋^{2}时,其总扭转角 ϕ 为多少?(b)试问实心杆承受相同扭矩和相同最大应力时所需直径 d 为多少?

3.2-3 有一个船用推进器的空心轴,按最大剪应力为 4500 磅/吋^2,以每分钟 100 转传递 8000 马力。如果轴的内径为 $d/2$,试求其外径 d。

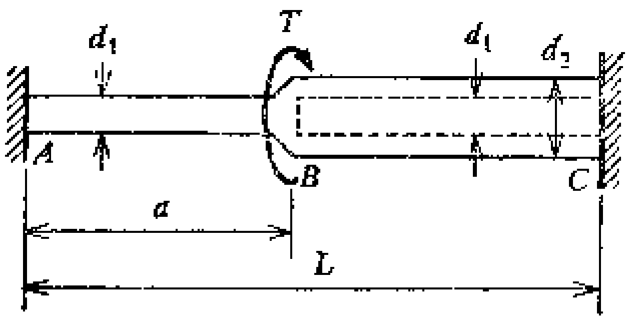
3.2-4 有一两端固定的杆 ABC,在截面 B 处承受扭矩 T(见图)。此杆 A 至 B 为实心圆截面(直径$=d_1$),而 B 至 C 为空心圆截面(外径$=d_2$,内径$=d_1$)。试导出使 A 和 C 端处的反扭矩在数值上相等时比值 a/L 的表达式。

3.3-1 试问当习题 3.1-4 中扭转角 ϕ 等于 0.01 弧度时,杆内所储存的应变能是多少?

3.3-2 试求习题 3.1-6 中杆内储存的应变能。

3.3-3 试求习题 3.1-9 中杆内储存的应变能。

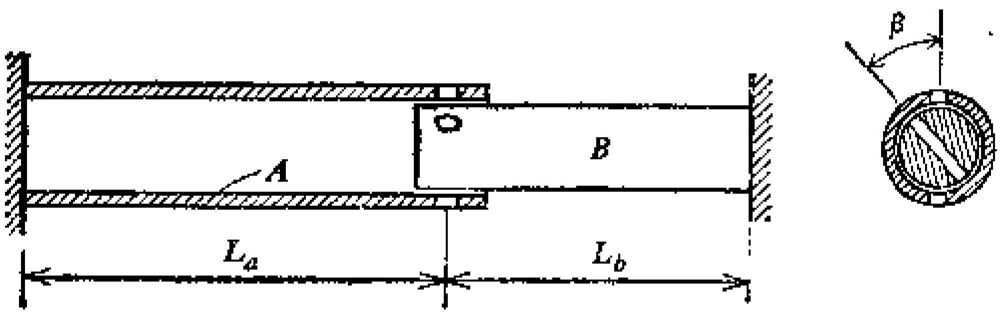
3.3-4 有两根长度相等、材料相同的实心圆杆,但它们的横截



习题 3.2-4

面积不同，分别为 A_1 和 A_2。试问当它们承受相同的扭矩 T 时，两杆中所储存应变能量之比是多少？

3.3-5　有一空心管 A 套于实心杆 B 的一端，如图所示。这里有一孔穿过 B 杆，此孔与通过杆 A 上两孔的直线成一 β 角。然后将杆 B 扭转，使诸孔对准、穿过这些孔安上销钉。试问当该系统回到静力平衡时，两杆储存的总应变能是多少？（令 J_a 和 J_b 分别代表杆 A 和杆 B 的极惯性矩。两杆的剪切弹性模量 G 相同。）



习题 3.3-5

3.3-6　有一根一端带有飞轮的实心圆轴($G=11.5\times10^6$磅/吋^2)，以每分钟 120 转旋转。使轴的另一端处突然停止转动。如果轴的长度为 5 呎，轴的直径为 2 吋，飞轮重量为 100 磅，飞轮的旋转半径为 10 吋，试确定由于突然停止转动使轴中所产生的最大剪应力（提示：令转动飞轮的动能等于轴的应变能。）

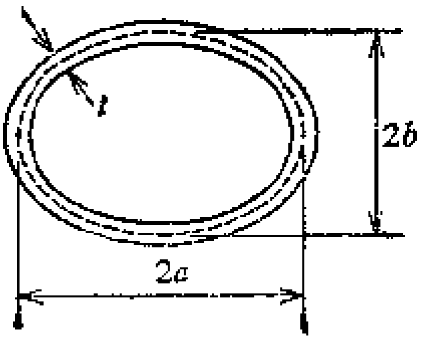
3.4-1　有一厚度为 1 吋、内径为 9 吋的空心圆管，承受的扭矩 $T=1500$ 吋·千磅。应用下面方法确定管中的最大剪应力：(a)薄壁管的近似理论，(b)精确的扭转理论。

3.4-2　有一内径为 4 吋的圆截面薄管轴，承受的扭矩为 50,000 吋·磅。如果容许剪应力为 13,000 磅/吋^2，试用下面方法确定所需要的管壁厚度 t：(a)薄壁管的近似理论，(b)精确的扭转理论。

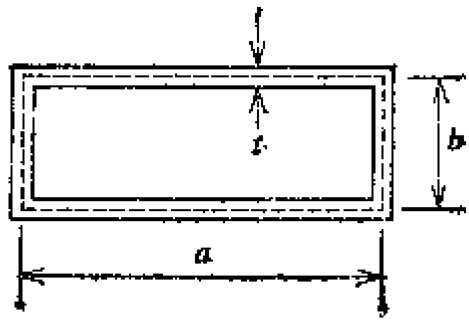
3.4-3　有一薄壁圆管和一实心圆杆，其材料相同，横截面积也相同，承受扭矩。如果这两种情况中的最大剪应力相同，试问管的应变能与实心杆的应变能之比值是多少？

3.4-4　有一椭圆形截面的薄壁管(见图)，承受扭矩 $T=50,000$ 吋·磅。试确定剪应力 τ 和单位长度扭转角 θ，假设 $G=12\times10^6$ 磅/吋^2，$t=0.2$ 吋，$a=3$ 吋，$b=2$ 吋(注意：椭圆的面积为 πab，其周长近似地为 $1.5\pi(a+b)-\pi\sqrt{ab}$)。

3.4-5　有一矩形截面的薄壁管(见图)，其厚度为常数 t，承受扭矩 T。如果其横截面积保持不变，试问其剪应力 τ 随比值 $\beta=a/b$ 如何变化？又问扭转常数 J 随 β 如何变化？



习题 3.4-4

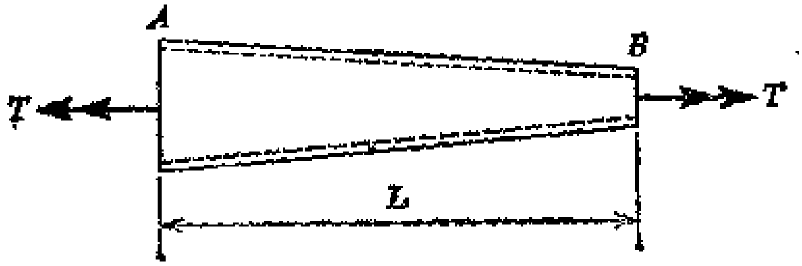


习题 3.4-5

3.4-6　有一薄壁圆锥形长管(见图)，承受扭矩 T。该管厚度不变，为 t，长度为 L。其 A 端和 B 端处横截面中线的直径分别为 d_a 和 d_b。试导出该管的扭转角 ϕ 的公式。

3.5-1　假设杆的材料服从虎克定律($\tau=G\gamma$)，试用方程(3-30)导出实心圆截面杆的方程(3-7)。

3.5-2　有一实心圆杆(半径$=r$)，承受扭矩 T，其组成材料受剪时的应力-应变图以方程 $\tau^n=B\gamma$ 代表，这里 n 和 B 均为常数。(a)试导出其横截面外缘处剪应力 τ 的公式，(b)假设破坏时极限剪应力和应变分别为 τ_u 和 γ_u，其中 $\tau_u^n=B\gamma_u$，试导出极限扭矩 T_u 的公式。



习题 3.4-6

3.5-3　试导出作用于实心圆杆上扭矩 T 的公式，如果其应力分布如图 3-14 b 所示。假设横截面外缘处的剪切应变 γ_{max} 已知，并应用图 3-14 a 中所示应力-应变曲线(注意 $\gamma_{max} \geqslant \gamma_y$，$T_u \geqslant T \geqslant T_y$)。藉观察当 $\gamma_{max} = \gamma_y$ 时，$T = T_y$，当 γ_{max} 变得很大时，T 接近 T_u 来核对你的结果。

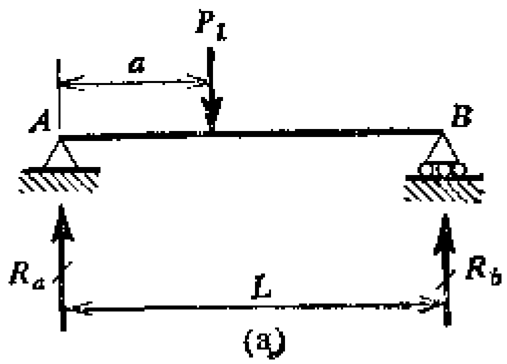
3.5-4　试求空心圆截面杆(见图 3-6)的极限扭矩 T_u 与其屈服扭矩 T_y 之比值，假设该杆材料的应力-应变图如图 3-14 a 所示。

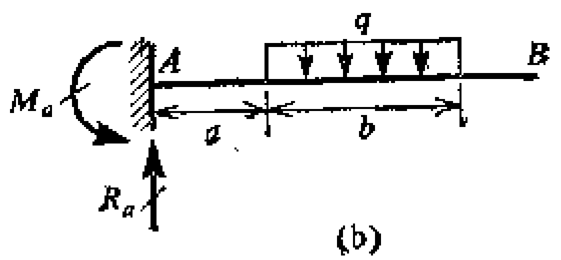
3.5-5　试用方程(3-29)证明：用图 3-15 c 所示残余应力 ($\tau_1 = \tau_y$，$\tau_2 = -\tau_y/3$)表示的扭矩为零。

第四章　剪力和弯矩

4.1　梁的类型

承受横截轴线作用的力的杆件称之为梁．本章只讨论少数几种最简单型式的梁，如图 4-1 所示．在每一种情况中，假设梁具有平行于图形自身平面的对称平面．因此，梁的横截面具有竖直对称轴．此外，假设所施加的荷载作用于此对称平面内，因而梁的弯曲产生在此平面内．后面第八章中，我们将讨论一种较为一般的弯曲型式，那里梁可能具有非对称横截面．





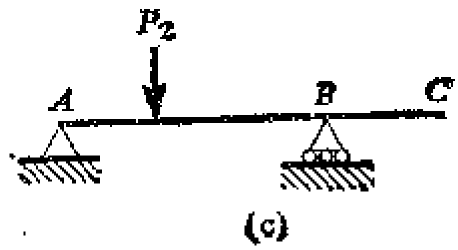


图 4-1　梁的类型

图 4-1 a 中的梁，一端为销轴支承，另一端为辊轴支承，这种梁称为简支梁或简单梁．简单梁的主要特点是：当梁弯

曲时梁的两端均可以自由转动，但是它们不能沿横向（即垂直轴线方向）移动．同时，梁的一端可以顺轴线方向（即水平方向）自由移动．简单梁的支承可能承受向上或向下作用的竖向反力．

图 4-1 b 中的梁，一端嵌制住或固定住，而另一端自由，这种梁称为悬臂梁．梁的固定支承处既不能转动也不能移动，而自由端则两者都可能有．图中的第三个例子表示带有挑臂的梁．这种梁简支于 A 和 B 处，而 C 处为自由端．

梁的荷载可以是集中力，如图 4-1 a 和 c 中的 P_1 和 P_2；也可以是分布荷载，如图 4-1 b 所示的荷载 q．分布荷载用强度表示其特征，此强度用沿梁轴线单位距离上的力来表示．对于图 4-1 b 所示均匀分布荷载，其强度为一常数．然而，变化荷载是一种其强度的变化为梁轴距离的函数的荷载．

图 4-1 中所示的梁，均为静定的，因为它们的反力可根据静力学平衡方程来确定．例如，对于承受荷载 P_1 的简支梁情况（图 4-1 a），它的两个反力均为竖直的，它们的大小可藉对端点力矩求和来得到，我们求出：

$$R_a=\frac{P_1(L-a)}{L}\qquad R_b=\frac{P_1a}{L}$$

带有挑臂的梁的反力（图 4-1 c），可用同样的方式求得．

对于悬臂梁（图 4-1 b），所施加的荷载 q 的作用，由作用于固定支承处的竖直力 R_a 和力偶 M_a 所平衡，如图所示．根据竖向力之总和，我们得出

$$R_a=q_b$$

而根据对 A 点力矩之总和，我们求出

$$M_a=qb\left(a+\frac{b}{2}\right)$$

反力矩 M_a 按反时针方向作用，如图所示.

上面例题中说明静定梁的反力（力和力矩）如何用静力学来确定. 静不定梁的反力之确定需要考虑梁的弯曲，因而，这个课题放到第七章再讨论.

图 4-1 所示理想的支承条件在实践中只是偶然碰到. 例如，桥梁中的长跨梁有时用支承于其端点的销轴和辊轴所构成. 然而，在短跨梁中，通常有某些约束抵制支承水平移动. 在大多数情况下，这种约束对梁作用的影响很小，可以略去不计，如第 7.8 节所述. 然而，如果梁的柔性非常大，或者端点处水平约束非常坚固，就需要考虑其影响. 这时需要用到第 7.8 节中所讨论的静不定分析.

4.2 梁中的应力合力

现在让我们以端点处作用斜力 P 的悬臂梁为例进行讨论(图 4-2 a). 如果我们在横截面 mn 处切割开，取出梁的左边部分作为自由体(图 4-2 b)，我们看到，梁的移去部分(亦即右边部分)对于左边部分的作用，必须使左边部分保持平衡. 整个横截面 mn 上的应力分布在我们学习的现阶段是不知道的，但是我们知道这些应力必须被荷载 P 所平衡. 将其合力分解成垂直于横截面且穿过横截面形心而作用的**轴向力** N 和平行于横截面作用的**剪力** V，以及作用于梁平面内的**弯矩** M.

作用于梁截面上的轴向力、剪力和弯矩称为**应力合力**. 对于静定梁，应力合力可根据平衡方程来确定. 因此，对于图 4-2 中所绘悬臂梁，我们可对图示的自由体图形写出三个静力方程. 分别根据水平方向和竖直方向的力之总和，我们求得：

$$N = P\cos\beta \qquad V = P\sin\beta$$

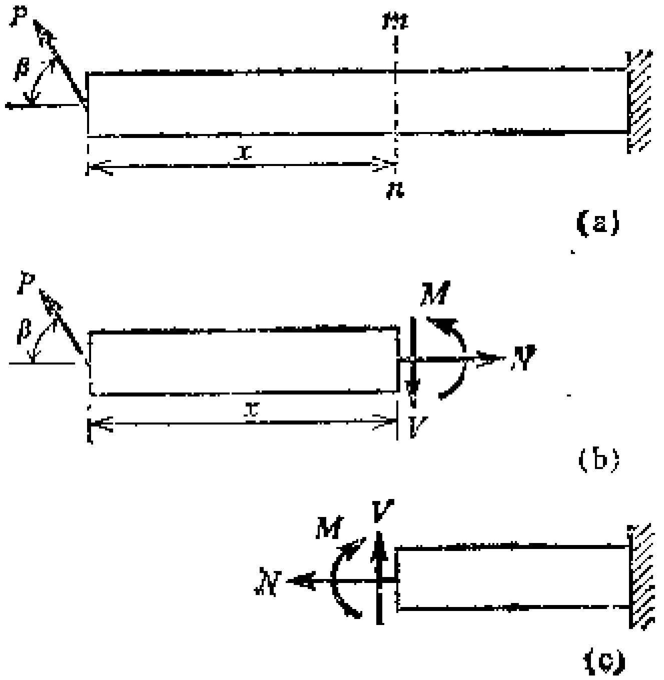


图 4-2 应力合力 N, V 和 M

又根据对通过横截面 mn 形心的轴线的力矩之总和，我们求得：

$$M = Px\sin\beta$$

式中 x 为自由端至截面 mn 处的距离. 因而，通过自由体图和静力平衡方程的应用，我们能没有困难地计算出应力合力. 由于轴向力 N 单独作用时梁中所产生的应力已经在第一章中讨论过，在下一章中，我们将看到如何得出与弯矩 M 和剪力 V 有关的应力.

假设应力合力 N, V 和 M 顺图 4-2 b 所示方向作用时为正. 然而，这种正负号规则仅当我们在讨论梁的左边部分的平衡时才有用. 如果讨论梁的右边部分，我们将发现其应力合力具有同样的大小，但方向相反(见图 4-2 c). 所以，我们必须认清应力合力的代数正负号与它在空间中的方向（譬如向左或向右）无关，但是却与它对作用于材料的方向有关. 为了说明这一事实，在图 4-3 中重复 N, V 和 M 的正负号规

则，该图中的应力合力表示作用于梁的单元上。我们看出：正的轴向力指向与其作用面相分离的方向(拉力)，正的剪力绕其作用面成顺时针方向作用，正的弯矩是使梁的上部受压的弯矩。

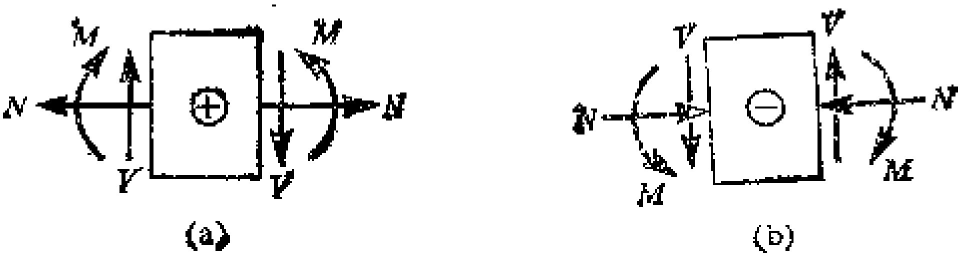


图 4-3 应力合力的正负号规则

例题 1 有一简单梁，承受两个荷载：一个集中力 P 和一个力偶 M_0，其作用如图 4-4 a 所示。试求出下述截面处梁中的剪力和弯矩：(a)梁中央左面微小距离处；(b)梁中央右面微小距离处。

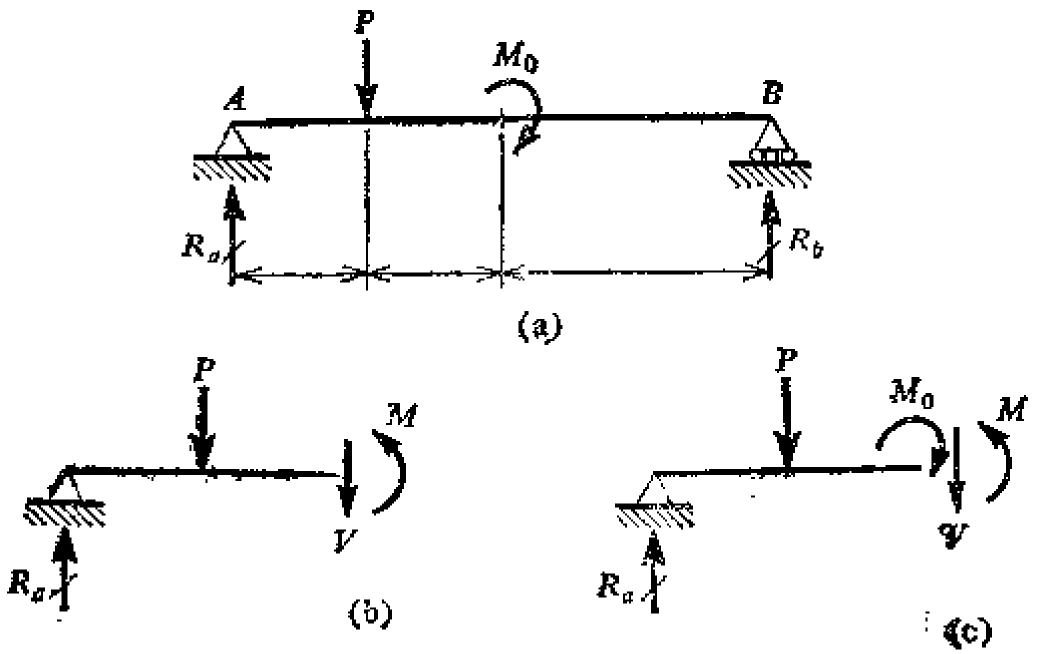


图 4-4 例题 1

分析此梁的第一个步骤是求出反力 R_a 和 R_b。取对 A 端和 B 端的力矩，得出两个平衡方程，根据它们我们求出：

$$R_a=\frac{3P}{4}-\frac{M_0}{L} \qquad R_b=\frac{P}{4}+\frac{M_0}{L}$$

第二个步骤，在与中央紧接的左边截面处，将梁切割开，并将梁的任一半边绘出其自由体图。本例题中，我们选择了梁的左半边，在图 4-4 b 中表示其相应图形。在此图形中出现力 P 和反力 R_a，并按正方向绘出未知剪力 V 和弯矩 M。图中没有出现力偶 M_0，因为梁切于 M_0 作用点的左面。从竖直方向诸力之和得出：

$$V=R_a-P=-\frac{P}{4}-\frac{M_0}{L}$$

此式表示剪力为负。因此，此剪力与图 4-4 b 所假设的作用方向相反。对通过梁切割处横截面的轴线取力矩(图 4-4 b)，得

$$M=\frac{R_aL}{2}-\frac{PL}{4}=\frac{PL}{8}-\frac{M_0}{2}$$

根据此方程中诸项的相对大小，我们看出，弯矩 M 可以为正，也可以为负。

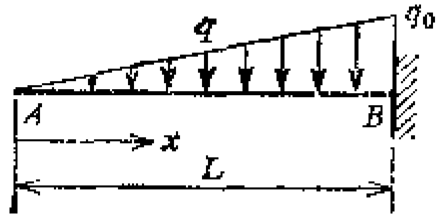
为了求得紧接中央处右边横截面上的应力合力，我们于该截面处将梁切割开，再次绘出相应的自由体图形(图 4-4c)。此图形与前一图形唯一不同之处，在于力偶 M_0 现在作用于切割面左边梁上。再将竖直方向的诸力加起来，并取绕通过切割面的轴的力矩，我们得到

$$V=-\frac{P}{4}-\frac{M_0}{L} \qquad M=\frac{PL}{8}+\frac{M_0}{2}$$

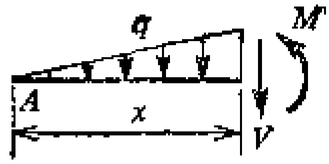
从这些结果中，我们看出当切割面从力偶 M_0 的左面移至右面，其剪力不变，但是弯矩以 M_0 值按代数增加。

例题 2　有一悬臂梁，其 A 端自由，B 端固定，梁上承受强度 q 按直线变化的分布荷载（见图 4-5 a）。试求距自由端 x 处的剪力 V 和弯矩 M。

我们首先从距左端 x 处切开梁，将梁的切出部分当作自由体（图 4-5 b）。与上一例题相同，其剪力 V 和弯矩 M 都假设为正值。分布荷载的强度为 $q=q_0\frac{x}{L}$，所以图 4-5 b 中自由体上总的向下荷载等于 $q_0\frac{x^2}{2L}$。因此，我们根据竖向力的平衡，求出：



(a)



(b)

图 4-5 例题 2

$$V=-\frac{q_0x^2}{2L} \tag{a}$$

我们根据此方程看出：在自由端 A 处($x=0$)，其剪力 $V=0$，而在固定端 B 处($x=L$)，其剪力 $V=-q_0\frac{L}{2}$。

为了求出梁中的弯矩，我们写出绕通过切割面的轴线的力矩平衡方程，我们得到

$$M=-\frac{q_0x^3}{6L} \tag{b}$$

再讨论梁的两端，我们看到当 $x=0$ 时，弯矩为零，当 $x=L$ 时，弯矩等于 $-q_0L^2/6$。方程(a)和方程(b)可用来求出梁上任一点处的 V 和 M，同时我们从观察看到，梁固定端处的剪力和弯矩在数值上为最大值。

4.3 荷载、剪力和弯矩之间的关系

现在可以得到梁中剪力 V、弯矩 M 和荷载之间的一些重要关系. 让我们讨论从梁上相距 dx 距离的两横截面之间所切出的单元(图 4-6 a)。如果作用于单元左边的剪力 V 和弯矩 M 为正，它们具有如图所示的方向。一般来说，剪力和弯矩随着沿梁轴度量的距离 x 而变，因此得出：位于单元右边面上的剪力和弯矩与其左边面上的值稍有差别。分别以 dV 和 dM 代表 V 和 M 的增量，我们看出：作用于右边面上的相应量为 $V+dV$ 和 $M+dM$。

作用于单元上的荷载可以是分布荷载、集中荷载或力

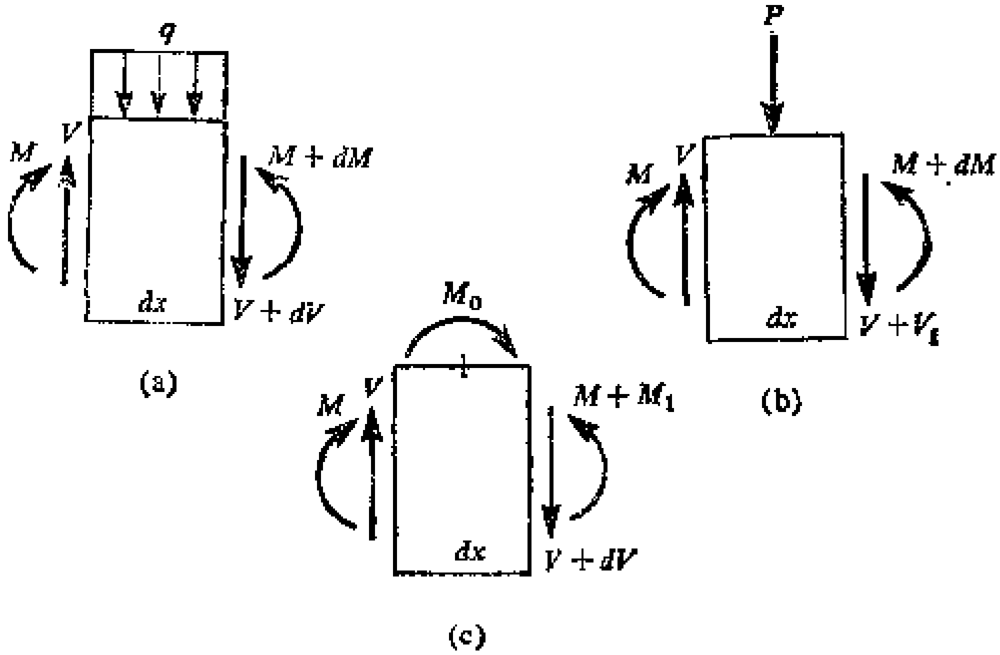


图 4-6 用于推导荷载、剪力和弯矩之间关系时梁的单元

偶。假设荷载是分布的，且其强度为 q，我们根据图 4-6 a 看出：总荷载（假设当 q 向下作用时为正值）等于 qdx。于是，根据竖向力的平衡，我们得出：

$$V-(V+dV)-qdx=0$$

或

$$\frac{dV}{dx}=-q \tag{4-1}$$

因此，当梁上作用有强度为 q 的分布荷载时，剪力沿梁变化，而它对于 x 的变化率等于 $-q$。根据此结论得出：如果 $q=0$，剪力 V 为常数。

对通过图 4-6 a 所示单元左面轴线的力矩求和，我们得到：

$$M+qdx\left(\frac{dx}{2}\right)+(V+dV)dx-(M+dM)=0$$

略去微量乘积不计，根据此方程我们得下面关系：

$$\frac{dM}{dx}=V \tag{4-2}$$

此方程表明：如果分布荷载（或无荷载）作用于梁上，弯矩的变化率等于剪力的代数值。

现在让我们假设在梁的单元上作用有集中力 P（见图 4-6 b）。根据单元在竖直方向上的平衡，我们看出单元两侧之间剪力存在突然的变化或间断。其剪力的增量 V_1 等于荷载 P 的负值：

$$V_1 = -P \tag{4-3}$$

因而，当我们从荷载作用点的左边移动到右边时，其剪力突然减小等于 P 的量。

在图 4-6 b 中，单元左侧边缘处的弯矩变化率（见方程 4-2）为 $dM/dx = V$。而右侧边缘处，变化率为 $dM/dx = V + V_1$。所以我们可得出结论：在集力 P 作用点处，其变化率 dM/dx 突然减小等于 P 的量。

现在讨论荷载为力偶 M_0 形式的这样最后一种情况（图 4-6 c）。根据竖向平衡，我们得到 $dV=0$，它表明：当我们从荷载作用点的左边移动到右边时，其剪力保持常数。按单元的力矩平衡得出：

$$M + M_0 + V dx - (M + M_1) = 0$$

或

$$M_1 = M_0 \tag{4-4}$$

式中 M_1 为弯矩的增量。此方程表明：当我们沿梁上从左至右移动时，由于作用的力偶 M_0 使梁中弯矩存在突然的增大。

当对梁中剪力和弯矩的变化进行全面研究时，方程（4-1）至(4-4)是有用的，这将在下一节里说明。

例题　用上一节例题 2 中承受直线变化荷载的悬臂梁（见图 4-5)来证明方程(4-1)和(4-2)。

上一节的方程(a)和(b)为

$$V=-\frac{q_0x^2}{2L}\qquad M=-\frac{q_0x^3}{6L}$$

取导数 dV/dx，我们得

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{q_0x}{L}$$

注意：本例题中荷载 q 的强度为 q_0x/L，我们看出方程(4-1)是正确的.同样，取导数 dM/dx，我们得

$$\frac{dM}{dx}=-\frac{q_0x^2}{2L}$$

它等于剪力 V. 因此方程(4-2)也是正确的.

4.4 剪力图和弯矩图

梁中的剪力 V 和弯矩 M 通常随它们所发生的横截面位置的距离 x 而变. 在设计梁时，要求知道梁的所有截面上的 V 值和 M 值，提供这些数据的方便方法，是藉表示它们沿梁轴变化的图形来求得. 为了绘制这种图形，我们取横坐标为截面的位置，而在纵坐标上取剪力或弯矩的相应值. 这种图形称为**剪力图**和**弯矩图**.

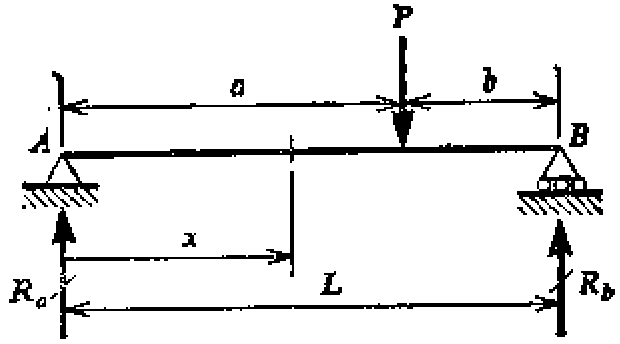
为了说明这种图的绘制，让我们讨论一根承受集中荷载 P 的简支梁 AB(图 4-7 a). 该梁的反力为：

$$R_a=\frac{Pb}{L}\qquad R_b=\frac{Pa}{L}$$

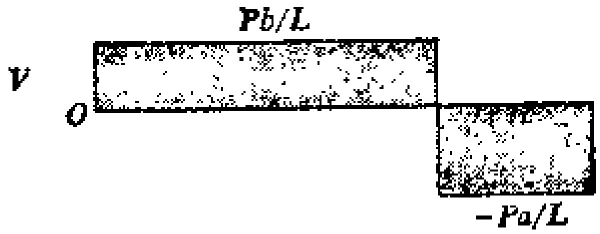
在 P 的左面任一截面处，亦即横截面位于 $0<x<a$ 的地方，可以根据平衡得出：

$$V=\frac{Pb}{L}\qquad M=\frac{Pb}{L}x \tag{a}$$

从这些方程，我们看出：自支承 A 至荷载作用点，其剪力保持常数，反之，其弯矩随 x 成直线变化. 对于 $x=0$ 处，弯矩为零；对于 $x=a$ 处，弯矩等于 Pab/L. 剪力图和弯矩图的相



(a)



(b)



(c)

图 4-7 简单梁承受一个集中荷载时的剪力图和弯矩图

应部分，分别示于图 4-7b 和 c 中。

对于荷载 P 右边的横截面，亦即对于 $a<x<L$ 的截面，我们得

$$V=\frac{Pb}{L}-P=-\frac{Pa}{L} \tag{b}$$

$$M=\frac{Pb}{L}x-P(x-a)=Pa\left(1-\frac{x}{L}\right) \tag{c}$$

我们又看到：剪力为常数，而弯矩为 x 的线性函数，在 $x=a$ 处，其弯矩等于 Pab/L，而在 $x=L$ 处，其弯矩为零。

对于整个梁的剪力图和弯矩图示于图 4-7 b 和 c 中。可以看到弯矩图的斜度 dM/dx 等于 V（方程 4-2），而剪力图的斜度 dV/dx 等于 $-q$（它在这里等于零），与方程（4-1）一致。在荷载 P 的作用点处，剪力图中有一突然变化（等于 P），同时弯矩图的斜度有一相应的变化。

在推导荷载 P 右边剪力和弯矩的表达式(b)和(c)时，我们讨论了梁的左边部分的平衡，该部分作用有两个力 R_a 和 P。在本例题中，考虑仅有反力 R_b（等于 Pa/L）作用的梁的右边部分，这样将比较简单。根据这种方法，我们直接得到下列方程：

$$V=-\frac{Pa}{L}\qquad M=\frac{Pa}{L}(L-x)$$

它们与前面所得的方程(b)和方程(c)相同。

有趣地注意到：上例中剪力图内的两个矩形具有相等的面积。此结果不是偶然的，因为对方程(4-2)积分，我们得

$$\int_A^B dM=\int_A^B Vdx \tag{d}$$

式中界限 A 和 B 表示其积分是自 A 端至 B 端沿整个梁长进行。此方程的右边代表剪力图的总面积。方程的左边在积分后得出 B 点与 A 点弯矩之差 M_b-M_a。在简单梁的情况中，其端点处的弯矩等于零，因此左边的积分也等于零。这样，我们得出结果：在本例题中，剪力图的总面积必须等于零。

当作用于梁上的荷载为力偶形式时，应用方程(d)必须小心，因为其弯矩存在间断，方程左边的积分式不可能越过这样的间断点进行积分。可对力偶左面梁的部分求积分值，然后对力偶右边梁的部分求积分，将其结果加起来即得到积分的最后值。

如果简单梁上有几个集中荷载作用（图 4-8 a），那么 V 和 M 的表达式必须按荷载作用点之间的每一区段来确定。再次

从梁的左端度量 x，我们对于梁的第一区段($0<x<a_1$)得到

$$V=R_a \quad M=R_a x \tag{e}$$

对于第二区段($a_1<x<a_2$)，我们得到

$$V=R_a-P_1 \qquad M=R_a x-P_1(x-a_1) \tag{f}$$

对于梁的第三部分($a_2<x<a_3$)，考虑梁的右面部分要比考虑左面部分有利．按这样的途径，我们得到

$$V=-R_b+P_3 \tag{g}$$

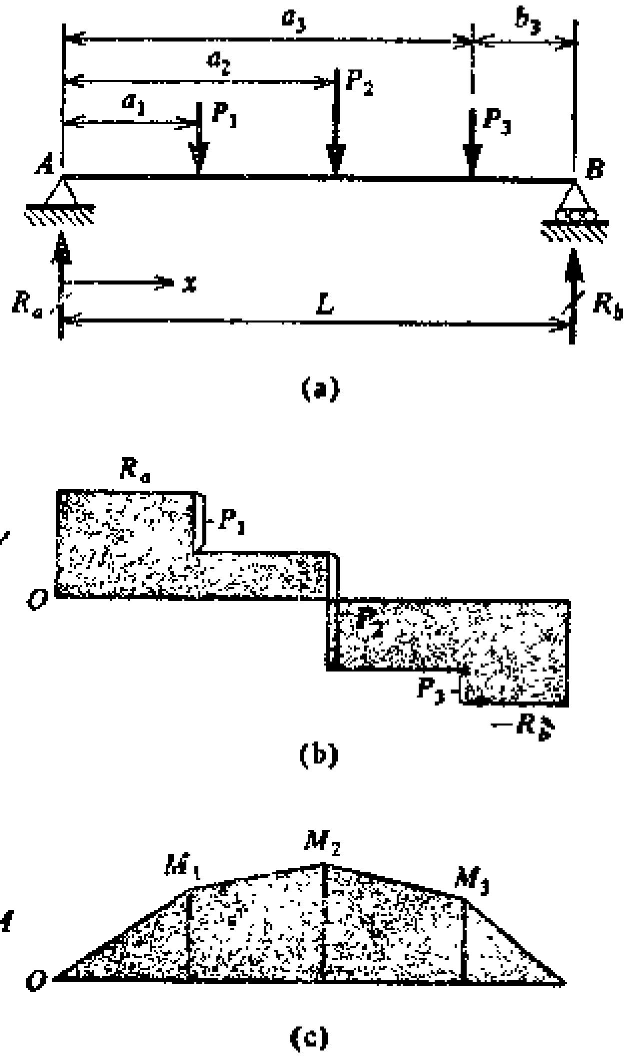


图 4-8 简单梁承受几个集中荷载时的剪力图和弯矩图

且

$$M = R_b(L-x) - P_3(L-b_3-x) \tag{h}$$

最后，对于梁的最后部分，我们得

$$V = -R_b \tag{i}$$
$$M = R_b(L-x)$$

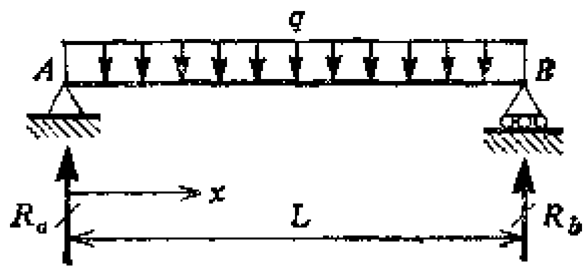
根据表达式(e)至(i)，我们看出：在梁的每一区段中，剪力保持常数，因此其剪力图具有图 4-8 b 所示形状．另外，梁的每一部分中的弯矩都为 x 的线性函数，所以其相应的图形用斜直线来表示．为了加速绘制这些直线，我们藉分别以 $x=a_1$，$x=a_2$ 和 $x=a_3$ 代入方程(e)，(f) 和(i)得到集中荷载处的弯矩．以这样的方式，我们得到下列弯矩值：

$$M_1 = R_a a_1 \qquad M_2 = R_a a_2 - P_1(a_2 - a_1) \qquad M_3 = R_b b_3$$

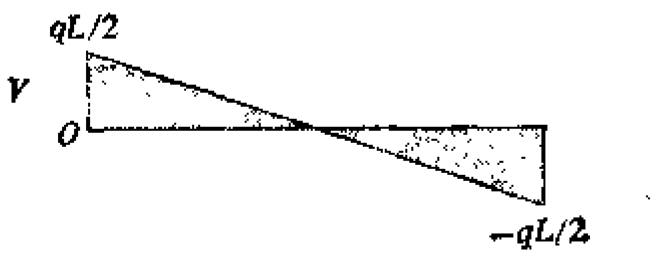
应用这些值，弯矩图(图 4-8 c)便容易绘制出来．必须注意：相应于剪力图中每一变化点处，弯矩图的斜度 dM/dx 存在相应的变化．

在设计梁时，求最大弯矩截面和最小弯矩截面通常是重要的．对于作用有集中荷载的梁，正如上例中那样，最大弯矩总是发生在诸集中荷载之一的作用点处．根据方程(4-2)，我们知道任一点处弯矩图的斜度等于其剪力．因此，在剪力改变正负号的横截面处弯矩具有最大值或最小值．如果当我们顺 x 轴进行，剪力由正值变化为负值(如图 4-8 b)，那么弯矩图中的斜度也从正值变化为负值．所以，在此正负值改变的截面处，我们必定有一最大弯矩．相反地，如果剪力从负值变为正值，表示有一最小弯矩．一般来说，剪力图可能在几个地方与水平轴相交．相应于每一交点，弯矩图中存在最大值或最小值．所有这些最大值和最小值都必须加以研究，以便找出梁上数值为最大的弯矩．

其次，让我们讨论作用有均匀分布荷载的简单梁(图 4-



(a)



(b)



(c)

图 4-9 简单梁承受均布荷载时的剪力图和弯矩图

9 a)．在这种情况下，反力 R_a 和 R_b 均等于 $qL/2$；因此，在距离左边 A 端 x 处的横截面上，我们求出：

$$V=\frac{qL}{2}-qx \qquad M=\frac{qL}{2}x-\frac{qx^2}{2} \tag{j}$$

根据这些方程中的第一个方程，我们看到剪力图由一斜线构成，此斜线在 $x=0$ 和 $x=L$ 处的坐标分别等于 $qL/2$ 和 $-qL/2$，如图 4-9 b 所示．另外，弯矩图为一抛物线，它对称于梁的中点(图 4-9 c)．梁端处的弯矩均为零，其最大弯矩发生于跨度的中央，该处剪力改变正负号．这个最大弯矩值藉

$x=L/2$ 代人表达式(j)来求得，从它得到 $M_{max}=qL^2/8$。

例题 1 试确定在一简单梁的部分跨度上作用有强度为 q 的均布荷载时的剪力图和弯矩图(图 4-10 a)。

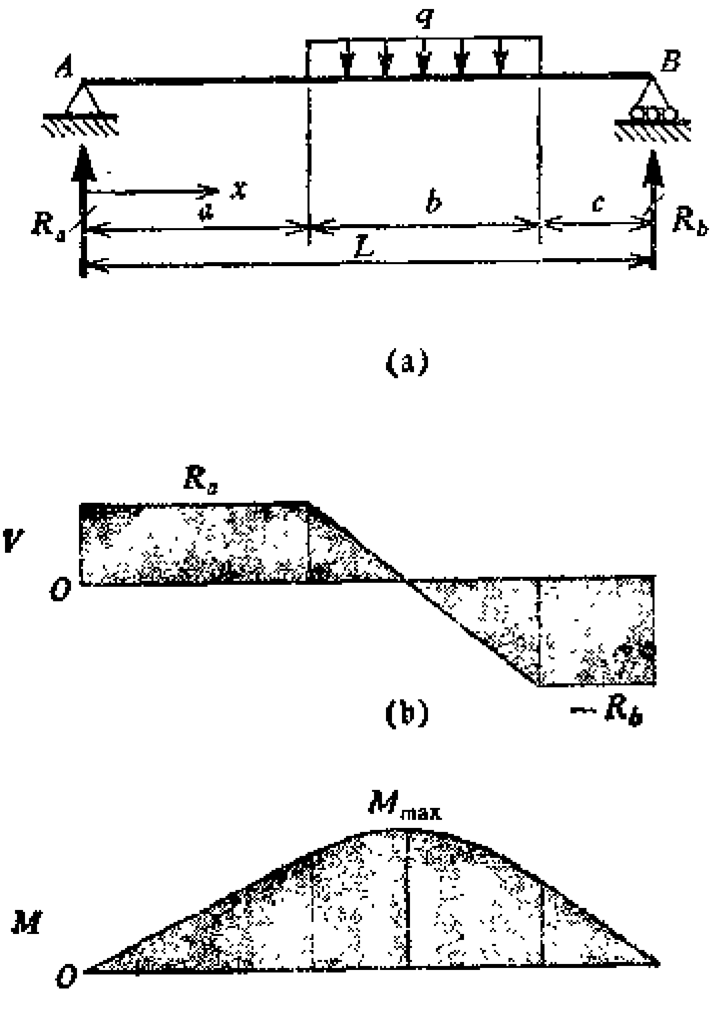


图 4-10 例题 1

我们首先求整个梁的反力

$$R_a=\frac{qb}{L}\left(c+\frac{b}{2}\right) \qquad R_b=\frac{qb}{L}\left(a+\frac{b}{2}\right) \tag{k}$$

为了求剪力和弯矩，我们必须将梁分成三个区段来讨论。对于梁的左端未加荷载部分($0<x<a$)，我们求出：

$$V=R_a \qquad M=R_a x \tag{l}$$

对于梁的加载部分内的横截面，其剪力用反力 R_a 减去作用于该横截面左边梁上的荷载 $q(x-a)$ 来求得。在这同一区段中的弯矩用反力 R_a 的力矩减去该截面左边荷载的力矩来求得。以这种方式，我们求出

$$V=R_a-q(x-a) \tag{m}$$

$$M=R_a x-q(x-a)(x-a)/2 \tag{n}$$

对于梁的右端未加载部分，我们求出：

$$V=-R_b \qquad M=R_b(L-x) \tag{o}$$

采用表达式(l)至(o)，我们可以容易地绘制剪力图和弯矩图。前一图(见图 4-10 b) 由两根对应于梁的未加载区段处的水平线和一根对应于均匀加载区段处的斜线所组成。其弯矩图(图 4-10 c) 由两根对应于梁的未加载区段处的斜线和一根对应于加载区处的抛物线所组成。斜线与抛物线在其交点处相切。这个结论是根据这样一个事实得出来的：在这些点上剪力的大小没有突然的变化。因此，由于方程 (4-2)，这里弯矩图的斜度不可能有任何突然的变化。最大弯矩位于剪力改变正负号的地方，其值可用适当的 x 值代入方程(n)来确定。

例题 2 对图 4-11 a 所示悬臂梁绘制其剪力图和弯矩图。

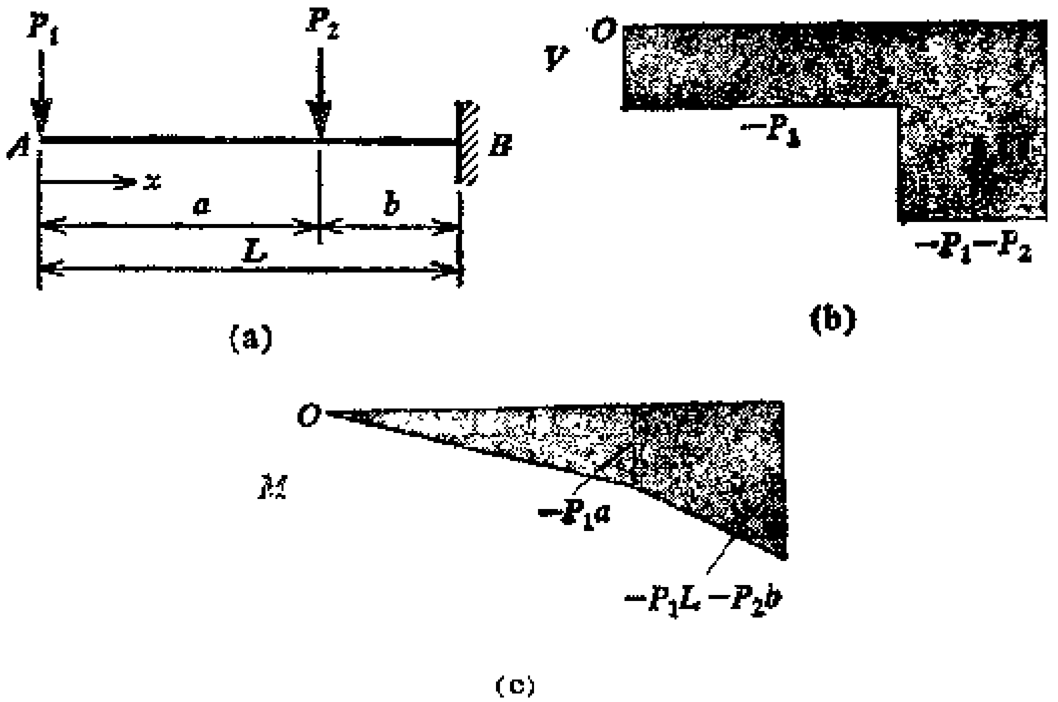


图 4-11 例题 2

再次自梁的左端来度量 x，并讨论 $0<x<a$ 区段，我们得

$$V=-P_1 \qquad M=-P_1x$$

对于梁的右边部分（$a<x<L$），我们得到

$$V=-P_1-P_2 \qquad M=-P_1x-P_2(x-a)$$

相应的剪力图和弯矩图示于图 4-11 b 和 c 中。弯矩图由两根斜线所组成，其斜度等于悬臂梁的相应区段中的剪力。剪力图的总面积不为零，而等于 $-P_1L-P_2b$，此值也等于梁 B 端处的弯矩。

当梁上有多于一个荷载作用时，其剪力和弯矩可藉将分别作用荷载时所得到的值加起来求得。譬如，在上面例题中，我们看到其剪应力图（图 4-11 b）为荷载 P_1 和 P_2 中每一个荷载单独作用于梁上所得的图形的叠加。这种类似的说明适用于图 4-11 c 所示的弯矩图。

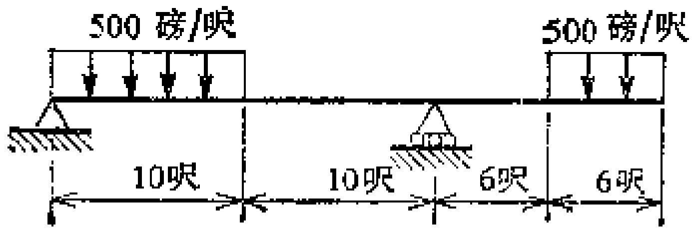
习 题

4.2-1 试确定图 4-1 a 所示简单梁中央处的剪力 V 和弯矩 M，假设 $P_1=8000$ 磅，$L=20$ 呎，$a=6$ 呎。另外，求梁中最大剪力和最大弯矩。

4.2-2 试求图 4-1 b 所示梁中与其左端距离 x 处的剪力 V 和弯矩 M 的公式。

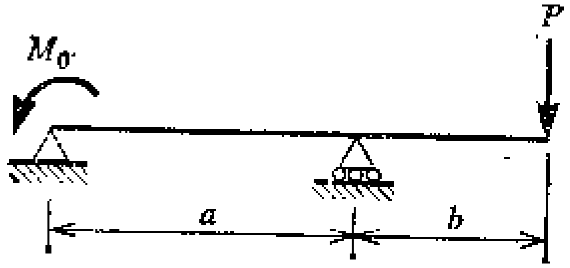
4.2-3 试求图 4-8 a 所示简单梁中央处的剪力 V 和弯矩 M，假设 $a_1=b_3=4$ 呎，$L=14$ 呎，$P_1=1000$ 磅，$P_2=0$，$P_3=2000$ 磅。

4.2-4 试求图中所示梁中距离其左端 10 呎处横截面上的剪力 V 和弯矩 M。



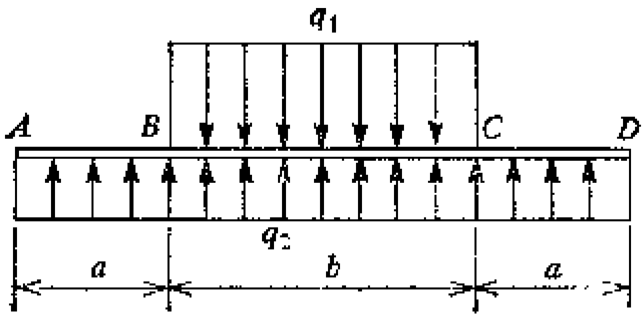
习题 4.2-4

4.2-5 试确定图中所示离梁左边支承 6 呎截面处的剪力 V 和弯矩 M，假设 $M_0=12$ 呎·千磅，$P=8$ 千磅，$a=8$ 呎，$b=5$ 呎。



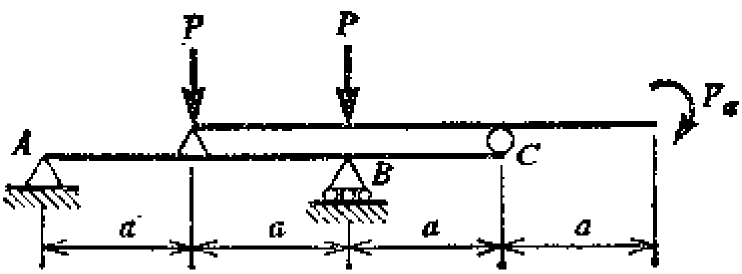
习题 4.2-5

4.2-6　有一梁 $ABCD$，承受强度为 q_1 和 q_2 的均匀分布荷载，如图所示。求出梁的 B 点处和中央处的剪力 V 和弯矩 M。假设 $a=4$呎，$b=8$ 呎，$q_1=3000$ 磅/呎。



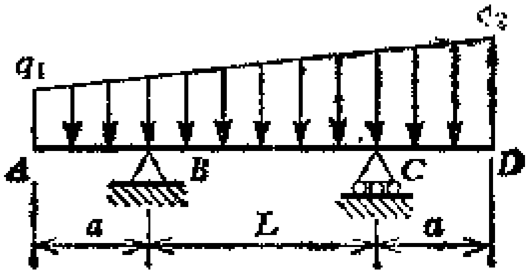
习题 4.2-6

4.2-7　试确定在图示加载下梁 ABC 中数值上为最大的弯矩。



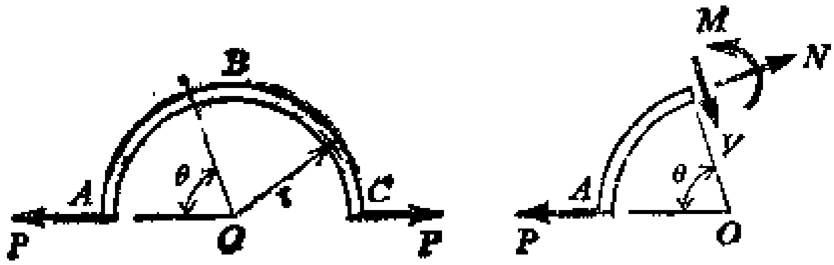
习题 4.2-7

4.2-8　图中所示带有挑臂端的梁 $ABCD$，承受强度按直线变化的分布荷载。试问比值 a/L 为多少时梁中点处的剪力 V 总是等于零。



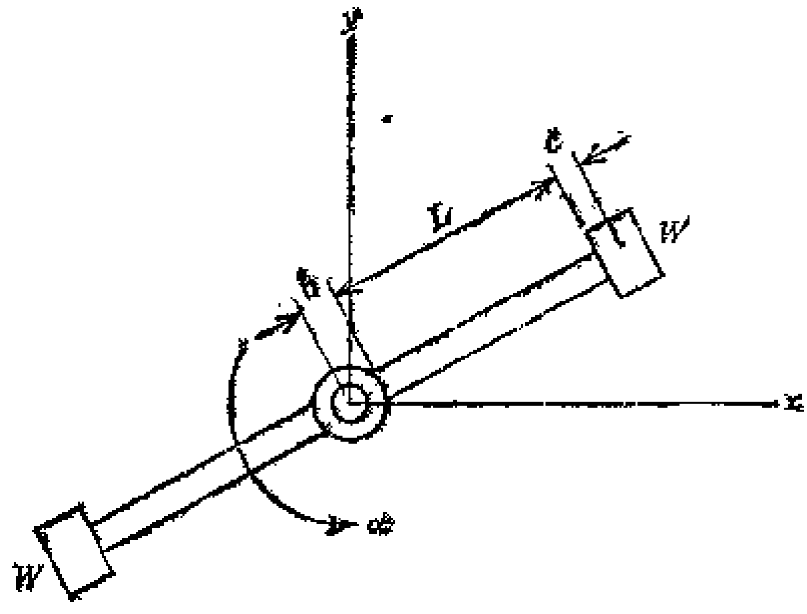
习题 4.2-8

4.2-9　有一曲杆 ABC,承受两个大小相等而方向相反的力 P 构成的荷载,如图所示。杆的轴线形成半径为 r 的半圆。试求出用 θ 角所定义的横截面处之轴向力 N,剪力 V 和弯矩 M(见图)。



习题 4.2-9

4.2-10　图中所示装置,在水平面中的光滑面上以角加速度 α 绕



习题 4.2-10

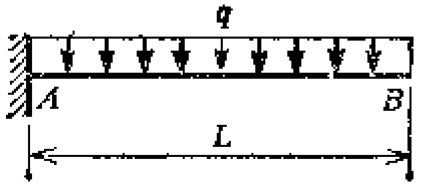
z轴(它是竖直者)旋转。这两臂的单位长度重量均为w，杆的两端处带有重量$W=2wL$。试导出臂中最大剪力和最大弯矩的公式，假设$b=L/10$，$c=L/15$。

除非另有说明外，对于有关第4.4节的习题，近似地按比例尺绘出剪力图和弯矩图，并加注所有关键性的坐标，包括其最大值和最小值.

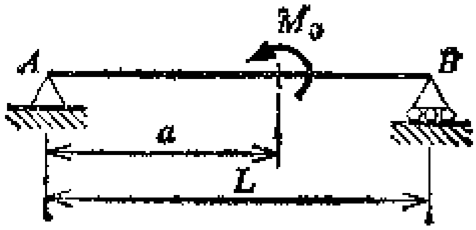
4.4-1　对一承受均匀荷载的悬臂梁绘出剪力图和弯矩图(见图)。

4.4-2　绘制图4-8a所示简单梁的剪力图和弯矩图，假设$a_1=b_3=a$，$P_2=0$和$P_1=P_3=P$。

4.4-3　绘制图中所示简单梁的剪力图和弯矩图。



习题 4.4-1



习题 4.4-3

4.4-4　绘制图4-4a所示简单梁的剪力图和弯矩图，假设$M_0=PL/2$。

4.4-5　绘出图4-5a所示承受按直线变化荷载的悬臂梁的剪力图和弯矩图。

4.4-6　绘出图4.2-4所示带有挑臂的梁的剪力图和弯矩图。

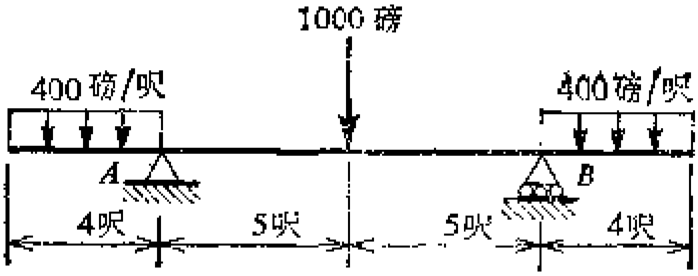
4.4-7　绘制习题4.2-5图中所示带有挑臂的梁的剪力图和弯矩图，假设$M_0=12$呎-千磅，$P=8$千磅，$a=8$呎，$b=5$呎。

4.4-8　绘出习题4.2-8中梁的剪力图和弯矩图，假设$a=L/4$。

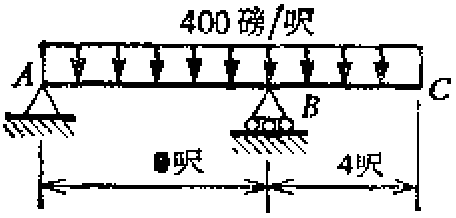
4.4-9至4.4-14　绘制图中所示梁的剪力图和弯矩图。

4.4-15　有一根带有两相等挑臂的梁(见图)，承受均匀荷载，梁的总长度为L。试求出使梁中央处的弯矩数值上等于支承处弯矩时其支承间的距离a。绘出在这种情况下的剪力图和弯矩图。

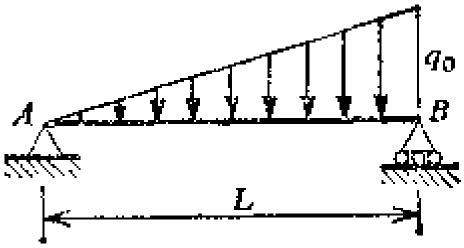
4.4-16　有一简单梁，其剪力图(磅)已示于图中。试确定梁上



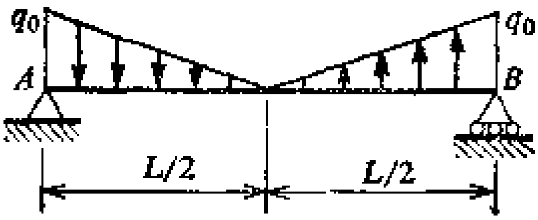
习题 4.4-9



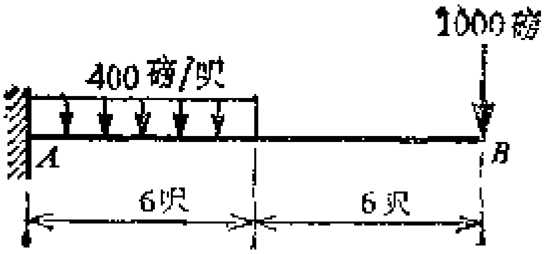
习题 4.4-10



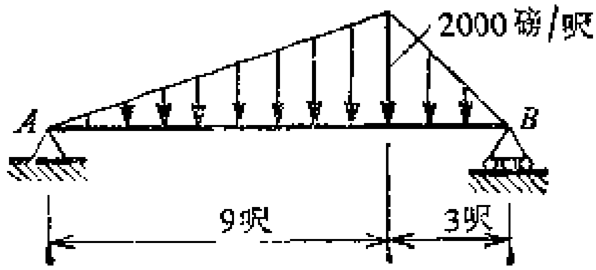
习题 4.4-11



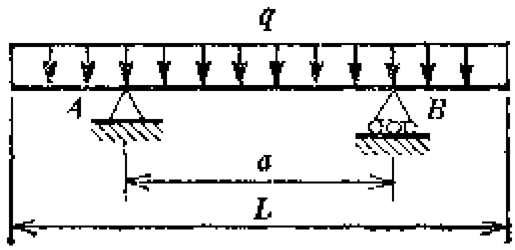
习题 4.4-12



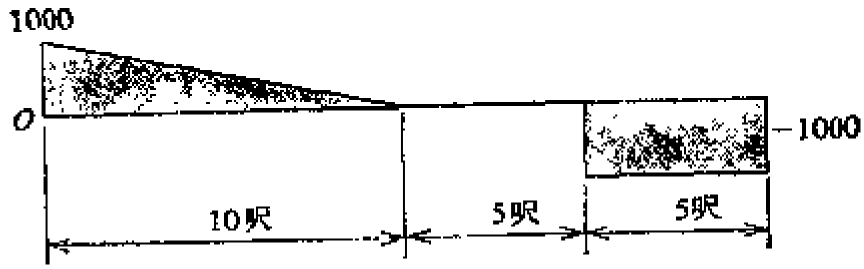
习题 4.4-13



习题 4.4-14



习题 4.4-15

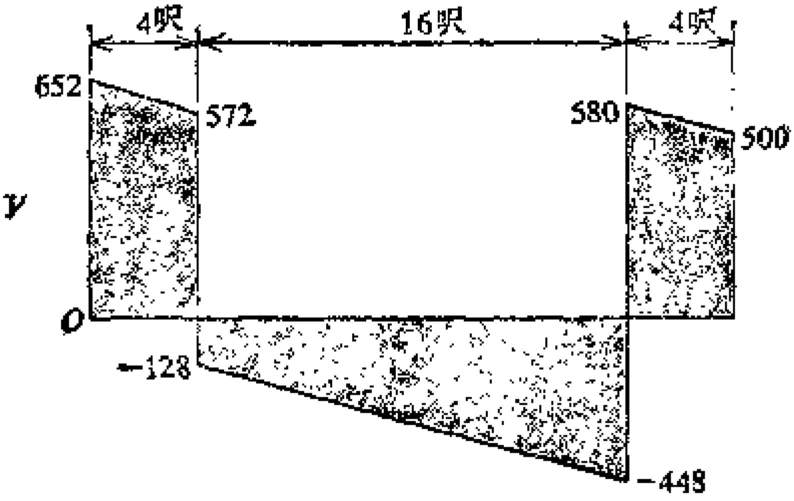


习题 4.4-16

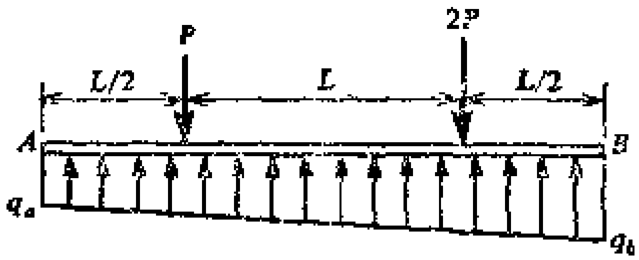
的荷载和其弯矩图.

4.4-17 有一梁，其剪力图(磅)已示于图中. 试问梁中最大正弯矩和负弯矩是多少?(假设梁左端处的弯矩等于零.)

4.4-18 有一长度为 2 L 的梁 AB，在所示位置处承受荷载 P 和 2 P 作用. 该梁置于基础上，基础所产生的连续分布反力作用于梁上. 假设分布反力的强度自 A 至 B 按直线变化，试求 A 端和 B 端处分布反力的强度 q_a 和 q_b. 另外，确定梁中最大弯矩的大小和其位置.

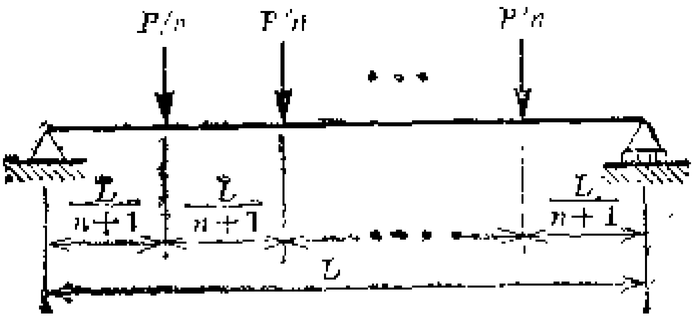


习题 4.4-17



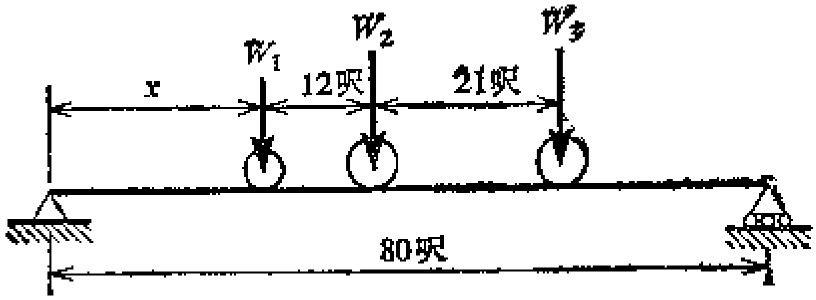
习题 4.4-18

4.4-19 某简支梁有 n 个相等间距的集中力作用在它上面（见图），其总荷载为 P，所以每一个荷载等于 P/n。梁的长度为 L，荷载的间距为 $L/(n+1)$。(a)试导出梁中最大弯矩的一般公式。(b)根据其公式，对几个连续 n 值($n=1,2,3,4\cdots$)确定最大弯矩，(c)将这些结果与由于强度为 q(而 $qL=P$)的均布荷载所产生的梁中最大弯矩相比较。



习题 4.4-19

4.4-20　有三个轮子在简支梁上通过，如图所示。试确定使梁中产生最大弯矩时以距离 x 所定义的轮子的位置，假设 $W_1=4$ 千磅，$W_2=W_3=16$ 千磅。另外确定梁的最大弯矩。



习题 4.4-20

第五章　梁中的应力

5.1　梁中的法向应力

为了介绍梁中应力这一课题，让我们讨论承受两个力 P 的梁，如图 5-1 a 所示。该梁的中间区段没有剪力，且承受等于 Pa 的不变的弯矩（图 5-1 b 和 c）。这种不变弯矩的情况称为**纯弯**。

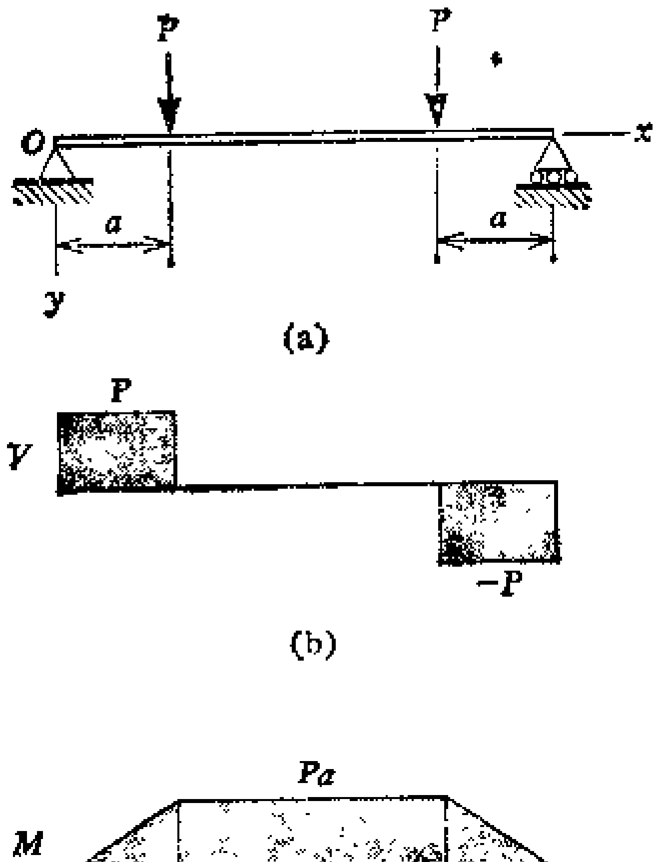
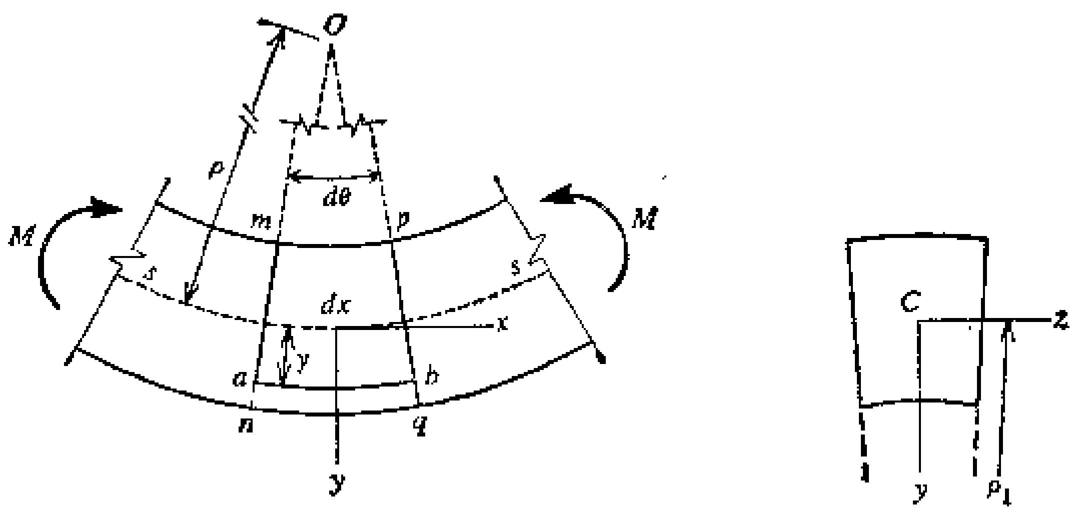


图 5-1　中央区段承受纯弯的梁

为了求出由于纯弯所产生的内应力的分布，必须讨论梁的变形.我们假设 xy 平面(图 5-1 a)为梁的对称平面，且荷载作用于此同一平面内，因此，弯曲变位也将发生在此平面内.在弯矩 M 作用下，梁的轴线弯成一圆弧(见图 5-2 a)，梁的横截面，譬如 mn 和 pq，保持为平面且垂直于梁的纵向纤维.处于纯弯时梁的横截面保持为平面这一事实，可藉细心的应变测量用实验来证实，或者可在纯理论的基础上来证实.在这后一种情况中，只需要注意荷载的对称性要求梁的所有单元相同地变形，这种相同的变形只有横截面保持平面才有可能.这个结论，不管梁的材料是不是线性弹性者都是正确的[1].



(a) (b)

图 5-2 纯弯下梁的变形

弯曲变形的结果示于图 5-2 a 中，我们发现：横截面 mn 和 pq 彼此相对地绕垂直 xy 平面的轴线旋转，因而在梁的凸侧上的纵向纤维伸长，而凹侧的纵向纤维缩短.因此，梁的上部的纤维受压，而底部的纤维受拉.在梁的顶面和底面之间的某一位置处，有这样一个面，该面上的纵向纤维长度无变

1) 见参考文献 5-1.

化．该面在图 5-2a 中以虚线 ss 表示，称为梁的中性面． 它与任一横截平面的交线称为该横截面的中性轴，譬如，z 轴为图 5-2b 中所示横截面的中性轴． 变形之后，两个相邻横截面 mn 和 pq 的平面(图 5-2a)交于 O 点处，该点为梁的纵轴的曲率中心。这两平面之间的夹角用 $d\theta$ 表示，曲率半径用 ρ 表示。根据纤维的几何图形，我们看到：

$$k=\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dx} \tag{5-1}$$

式中 k 为曲率，等于曲率半径的倒数，面 dx 为两相邻横截面 mn 和 pq[1] 之间单元的长度．

距中性面 y 处的代表性纵向纤维 ab 之伸长量，现在可求出如下．该纤维的总长度为$(\rho+y)d\theta$ 或 $(1+y/\rho)dx$． 由于该纤维的原来长度为 dx，我们看出，其伸长量为 $y\dfrac{dx}{\rho}$，而相应变形为

$$\epsilon_x=\frac{y}{\rho}=ky \tag{5-2}$$

此方程表明：其纵向应变正比于曲率，且正比于离中性面的距离 y． 当所讨论的纤维低于中性轴，其距离 y 为正，则其应变为正(拉伸)．当其纤维位于中性面以上，那么 y 和 ϵ_x 都将为负，表示材料受压．方程(5-2)是完全根据变形杆的几何图形导出的，因此它与材料的性质无关． 因面当梁的材料具有任何一种应力-应变图时，该方程总是能成立的．

梁的试验说明：纤维的轴向应变伴随有侧向应变， 正如简单拉伸或简单压缩的情况一样(见第 1.4 节)． 中性面以下纵向纤维的伸长伴随有侧向收缩，而中性面以上则将有侧向膨胀． 由于这种侧向应变的

1) 本章内，我们只讨论曲率 k 的绝对值．后面，在第 6.1 节中，将介绍曲率特有的正负号规则．

结果，横截面的形状改变，正如图 5-2 b 对于矩形横截面这种特定情况所表明的那样。矩形的两条边互成倾斜，其侧向应变为：

$$\epsilon_z = -\nu\epsilon_x = -\nu ky \tag{5-3}$$

式中 ν 为泊松比。由于这种变形，横截面中所有原来平行于 z 轴的直线都弯曲，以保持垂直于截面的两边。它们的曲率半径 ρ_1 将大于 ρ，且按与 ϵ_x 在数值上大于 ϵ_z 的同一比例(见方程 5-3)增大，因此我们得到

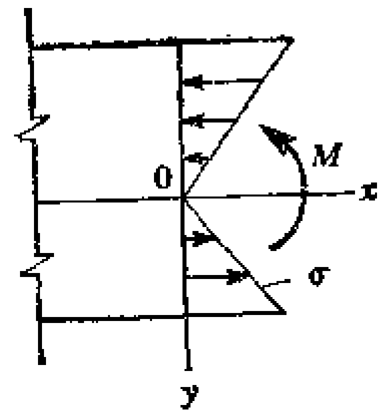
$$\rho_1 = \frac{\rho}{\nu} \quad k_1 = \nu k \tag{5-4}$$

式中 $k_1 = 1/\rho_1$ 为 yz 平面中的曲率。

对于由具有线性应力-应变图（虎克材料）的弹性材料所构成的梁，我们得到 $\sigma = E\epsilon$，所以，梁中的法向应力为（见方程 5-2），

$$\sigma_x = kEy \tag{5-5}$$

我们看出，这些应力与离中性轴的距离 y 成直线变化，如图 5-3 a 所示。中性轴以下为拉应力，中性轴以上为压应力。这些应力的合力必须与作用于该截面上的弯矩 M 等效。



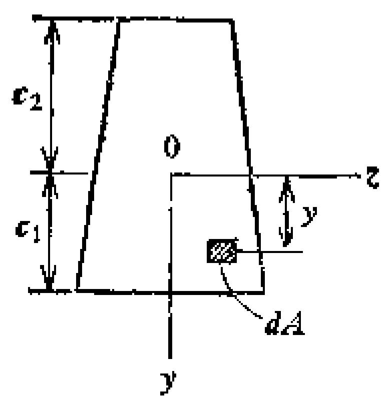


图 5-3 梁中应力分布

令 dA 代表距中性轴为 y 处横截面积的单元(图 5-3 b)，于是作用于此面积上力的单元为 $\sigma_x dA$。因为没有作用于横截面上的法向合力，$\sigma_x dA$ 对横截面整个面积的积分必须等

于零，因此

$$\int \sigma_x dA = \int kEydA = 0$$

由于曲率 k 和弹性模量 E 为常数，根据此方程，我们得出结论，对于纯弯梁

$$\int ydA = 0 \tag{5-6}$$

此方程表明横截面面积对于中性轴(亦即 z 轴)的一次矩等于零[1)]. 因此，我们看出：中性轴通过横截面的形心. 这种特性可用来确定任意横截面形状的梁的中性轴位置，但要受到这样的限制：其 y 轴必须为对称轴，正如前面所述，由于 y 轴为一对称轴，它也就必定通过横截面的形心，因此，y 轴和 z 轴(见图 5-3 b)的原点位于形心处. 此外，这两根轴均为横截面的主轴(见附录 A 关于面积主轴的讨论).

单元力 $\sigma_x dA$ 绕中性轴的力矩为 $\sigma_x ydA$. 对整个横截面积的所有这种单元力矩之积分，必须等于弯矩M；因此

$$M = \int \sigma_x ydA = kE\int y^2 dA = kEI \tag{5-7}$$

其中

$$I = \int y^2 dA \tag{5-8}$$

为横截面积对 z 轴(亦即中性轴)的惯性矩. 方程 (5-7) 可写成下列形式：

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{5-9}$$

它表明梁的纵轴的曲率与弯矩M成正比，而与量 EI 成反比. 此 EI 称为梁的**弯曲刚度**.

---

1) 有人称它为静矩. ——译者注

合併方程(5-5)和(5-9)，我们得到下列梁中法向应力的方程：

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \tag{5-10}$$

当力矩使梁的顶面产生压缩时此方程中的M为正，而 y 向下方向为正(见图 5-3)。

梁中最大拉应力和最大压应力发生于距中性轴最远的点上. 分别以 c_1 和 c_2 代表最外边受拉和受压纤维的距离，如图 5-3 b 所示，还假设其M为正值，根据方程(5-10)，我们得到

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{Mc_1}{I} = \frac{M}{S_1} \qquad (\sigma_x)_{\min} = -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{S_2} \tag{5-11}$$

式中 $S_1 = I/c_1$ 和 $S_2 = I/c_2$ 称为横截面积的**截面模量**. 如果横截面积对于 z 轴对称，那么 $C_1 = C_2 = C$，而且最大拉应力与最大压应力数值上相等：

$$(\sigma_x)_{\max} = -(\sigma_x)_{\min} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} \tag{5-12}$$

式中的截面模量为

$$S = \frac{I}{c} \tag{5-13}$$

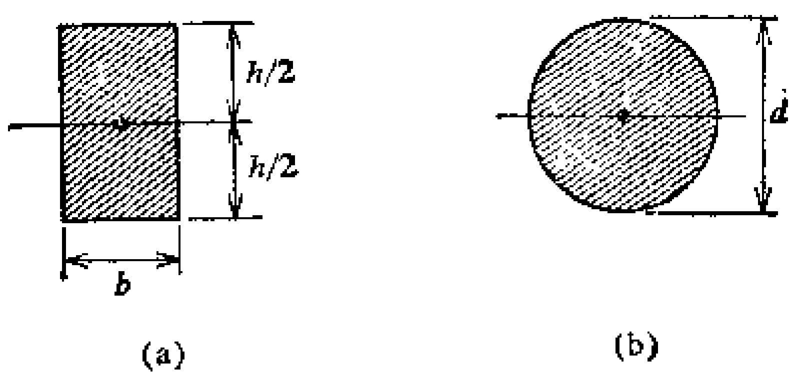


图 5-4

对于宽度为 b，高度为 h 的矩形截面梁（见图 5-4 a），其惯性矩和截面模量为

$$I=\frac{bh^3}{12} \qquad S=\frac{bh^2}{6} \tag{5-14}$$

对于直径为 d 的实心圆截面(图 5-4 b)，我们知

$$I=\frac{\pi d^4}{64} \qquad S=\frac{\pi d^3}{32} \tag{5-15}$$

其它形式梁的横截面特性，譬如宽翼缘梁、I 梁和槽形梁的截面特性均列于各种手册中．附录 G 里列有这几种截面的简略表，以便用于求解本书中的习题．

上面梁中法向应力的分析是对纯弯曲推导的，它意味着其横截面上没有剪力作用．由于剪应力产生横截面翘曲变形，因而弯曲之前的平面在弯曲以后不再保持为平面．这种翘曲使其特性复杂化．但是比较精心的分析表明根据弯曲公式(方程 5-10)计算的法向应力，在剪应力和与其有关的翘曲出现时没有重大的改变(参考文献 5-2)．因而，甚至当我们在非均匀弯曲时应用纯弯理论去计算法向应力仍是合理的．剪应力的计算将在第 5.3 [1]节中讨论．

例题 1　有一挑臂梁 AB，承受的荷载和支承的情况如图 5-5 所示．试确定梁中最大法向应力和中点处的挠度 δ．假设该梁为直径 $d=10$ 吋的圆形截面，并假设 $a=13.5$ 吋，$L=59$ 吋，$P=26$ 千磅，$E=30\times10^6$ 磅/吋^2．

支承之间梁部处于纯弯，而且

$$M=Pa=351,000 \text{ 吋-磅}$$

---

1) 梁的基本理论的发展历史情况，包括 Galileo, Mariotte, Jacob Bernoulli, Euler, Girard, Parent, Coulomb, Saint-Venant 以及其他人的贡献，述于参考文献 5-3 中．

其横截面的截面模量 $S=\pi d^3/32=98.17$ 吋^3，所以最大法向应力(根据方程 5-12)为

$$\sigma_{max}=\frac{M}{S}=\frac{351,000}{98.17}$$

$$=3580 \text{ 磅/吋}^2$$

根据方程(5-9)，我们得出圆弧 CD 的曲率半径 ρ (见图 5-5)：

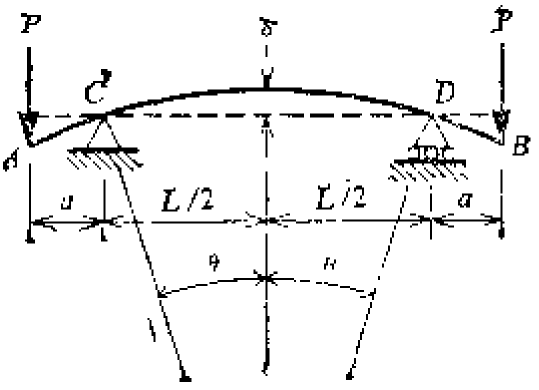


图 5-5 例题 1

$$\rho=\frac{EI}{M}=\frac{30\times10^6\times490.9}{351,000}=41,960 \text{ 吋}$$

式中 $I=\pi d^4/64=490.9$ 吋^4。根据图 5-5，我们看出其挠度 δ 为：

$$\delta=\rho(1-\cos\theta) \quad \text{(a)}$$

其中 θ 为微小的角，等于 $L/2\rho$，或 0.000703 弧度。对于微小的角，我们取 $\cos\theta\approx1-\theta^2/2$，因此方程(a)成为

$$\delta=\frac{\rho\theta^2}{2}=\frac{L^2}{8\rho}=0.0104 \text{ 吋}$$

例题 2 图 5-6 所示梁 ABC 由图 5-6 b 所示截面方向的槽形截面所构成。该槽梁的截面为 C 12×30，如附录表 C-3 中所列。试计算梁中最大拉应力和最大压应力。

该梁的弯矩图示于图 5-6 c 中，我们根据该图看出：其最大正弯矩和最大负弯矩分别为 1406 和 −2500 呎·磅，梁的截面模量可借助附录中所给的性能表来求出。对于顶面和底面的截面模量分别为

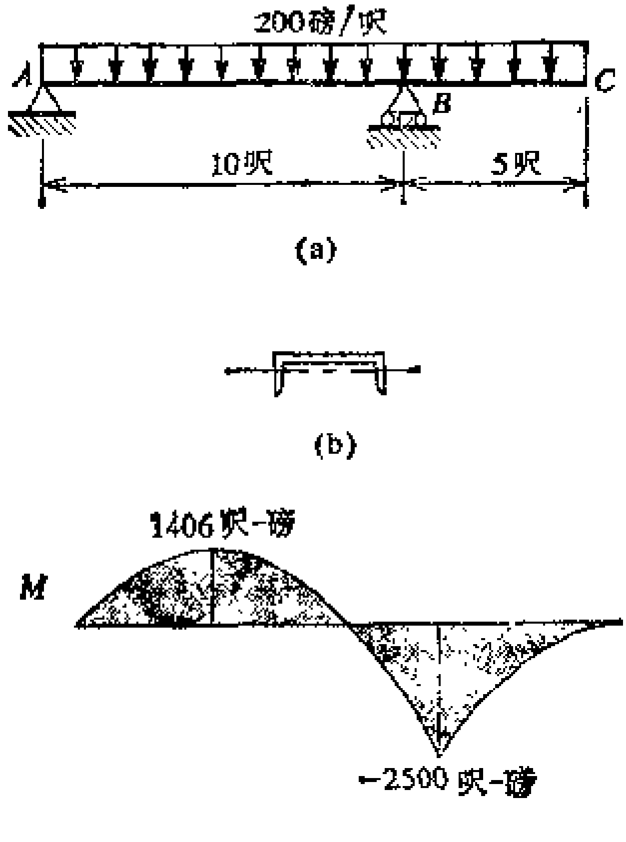
$$S_1=\frac{5.14}{0.674}=7.63 \text{ 吋}^3 \qquad S_2=\frac{5.14}{2.496}=2.06 \text{ 吋}^3$$

现在，我们可按方程 $\sigma=M/S$ 计算其应力。最大正弯矩点处的最大拉应力和最大压应力分别为

$$\sigma_t=\frac{1406(12)}{2.06}=8190 \text{磅/吋}^2, \quad \sigma_c=-\frac{1406(12)}{7.63}=-2210 \text{磅/吋}^2.$$

类似地，最大负弯矩点处的应力为：

$$\sigma_t=\frac{2500(12)}{7.63}=3930 \text{磅/吋}^2, \quad \sigma_c=-\frac{2500(12)}{2.06}=-14,600 \text{磅/吋}^2$$



(a) (b) (c)

图 5-6 例题 2

比较上面求得的四个应力值，我们看出梁中最大拉应力为 8190 磅/吋^2，最大压应力为 $-14,600$ 磅/吋^2。

5.2 梁的设计

梁的截面选择与所用的材料、结构类型、荷载的种类以及其它许多因素有关. 从仅考虑弯曲的设计观点来看，所需要横截面积的截面模量可按下列方程求得：

$$S=\frac{M_{max}}{\sigma_w} \tag{5-16}$$

其中 σ_w 为容许法向应力，M_{max} 为最大弯矩. 如果对拉力和压力的 σ_w 相同，那么照理应选择双向对称且形心位于梁的二分之一高度处的横截面形状. 如果对拉力和压力的容许应力

不同，则需要采用非对称横截面，使受拉侧最外边纤维的距离对受压侧最外边纤维的距离之比与其每一资用应力之比相等。在选择梁的横截面时，通常的做法不仅是考虑所需要的截面模量，而且还要使其横截面积减到最小，从而使梁的自重减到最轻。

当设计钢梁或铝梁时，往往要用到提供标准结构形状的性能和尺寸的手册（例如，参考文献 5-4 和 5-5）。然而，为了避免需要参考手册，已将一些结构钢的截面简略表列于本书附录C中，以供求解问题时应用。表中结构截面用一标号来识别，譬如 W 36×300 的意思是：公称高度为 36 吋、每一呎长的重量为 300 磅的宽翼缘截面。对于 I 梁（或 S 形）和槽形截面（或 C 形）应用类似的标号，如附录 C 表中所示。角形截面（或 L 形），则按其肢的长度和角的厚度来识别，如 $L\,8\times6\times1$。

在比较各种截面形状时，我们首先考虑宽度为 b、高度为 h 的矩形（图 5-4 a）。其截面模量为：

$$S=\frac{bh^2}{6}=\frac{Ah}{6}=0.167\,Ah \tag{a}$$

式中 A 代表横截面积。可以看到，对于给定面积的矩形截面以增大高度 h 为最经济。然而，高度的增大是有限制的，因为如果截面变为很窄，梁将会形成侧向不稳定。对于非常窄的矩形截面梁来说，因侧向屈曲（或侧面屈曲）而引起的毁坏，要比因材料强度不足所引起更为可能[1]。

对于直径为 d 的圆形截面（图 5-4 b），我们得

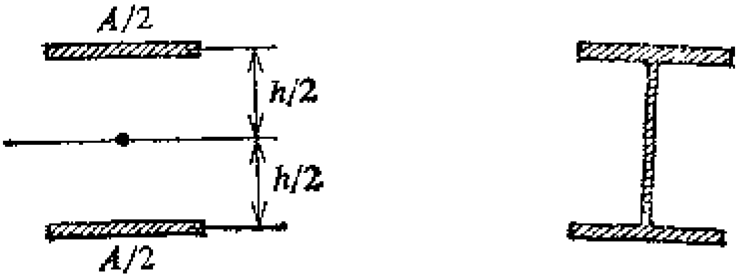
$$S=\frac{\pi d^3}{32}=\frac{Ad}{8}=0.125\,Ad \tag{b}$$

1）梁的侧向屈曲的讨论见参考文献 5-6。

将相同面积的圆形截面和方形截面进行比较，我们发现，方形截面的边将为 $h=d\sqrt{\pi/2}$，对它按方程(a)得

$$S=0.148\,Ad$$

将此结果与(b)相比较，表明方形截面比圆形截面要经济。



(a)　　　　(b)

图 5-7

从沿截面高度上应力分布来考虑(图 5-3 a)，得出这样的结论：对于经济的设计，梁的绝大部分材料应置于距中性轴尽可能远的位置处。对于给定横截面积 A 和给定高度 h 的最有利情况是将各一半面积分布于距中性轴距离为 $h/2$ 处，如图 5-7 a 所示。于是

$$I=2\left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{Ah^2}{4}\qquad S=0.5\,Ah \tag{c}$$

实践中，可藉应用翼缘占绝大部分材料的宽翼缘截面或 I 截面(图 5-7 b)来接近此理想极限情况。因为梁的腹板处需要置放一部分材料，所以极限情况(c)是永不能实现的。对于标准的宽翼缘截面，我们近似地得：

$$S\approx0.35\,Ah \tag{d}$$

比较(d)与(a)，表明宽翼缘截面要比相同面积且相同高度的矩形截面经济得多。另外，由于宽度较大，宽翼缘梁总要比相同高度和相同截面模量的矩形截面梁在侧向屈曲方面较为稳定。根据这一简短的讨论，我们看出在金属结构中广泛应用

宽翼缘梁的理由.

例题 1　(a)试确定图 5-8 所示承受分布荷载的梁 AB 所需要的截面模量 S，假设 $q=4000$ 磅/呎，容许弯曲应力 $\sigma_w=16,000$ 磅/吋^2. 梁的重量略去不计. (b) 考虑梁的重量，根据附录中的表选择一宽翼缘截面.

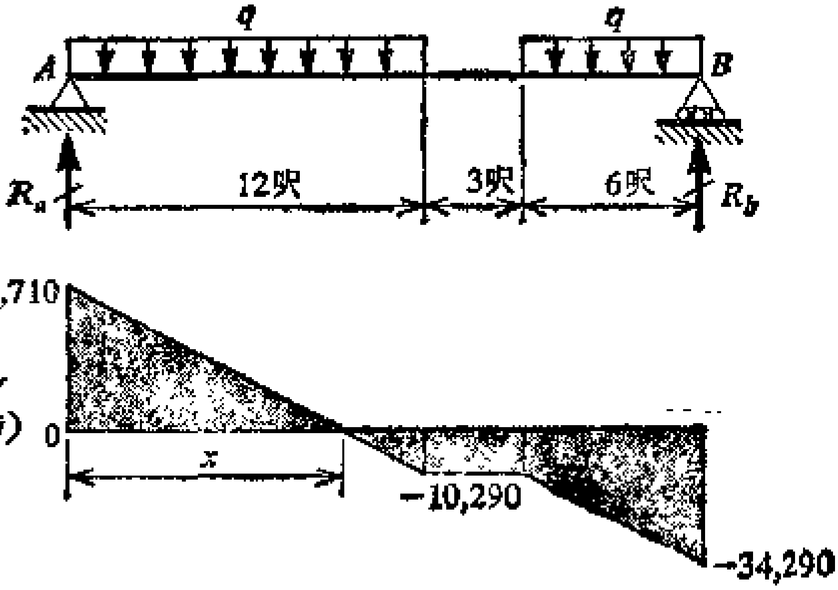


图 5-8　例题 1

(a) 为了确定最大弯矩的位置，可借助于绘制剪力图，如图 5-8 所示. 其支承处的反力为

$$R_a=37,710\text{ 磅}\quad R_b=34,290\text{ 磅}$$

用以定义零剪力点的距离 x，按下列方程求得：

$$R_a-qx=0$$

从它得 $x=R_a/q=9.43$ 呎. 在距左端 A 的此距离处，其弯矩为最大：

$$M_{max}=R_ax-qx^2/2=177,800\text{ 呎·磅}$$

根据方程(5-16)，所需截面模量为

$$S=\frac{177,800(12)}{16,000}=133\text{ 吋}^3$$

(b)参考附录中宽翼缘截面表，我们看出：其中所列符合所需截面模

量的最轻截面为 W 18×85。自然，该表是简略的，因此实际上有可能供应再轻一些的截面。

如果现在将梁的自重(85 磅/呎)与梁上其它荷载加起来，则最大弯矩增大到 182,400 呎·磅。于是所需要的截面模量 S 增加到 137 吋^3。由于所选择的截面的截面模量为 157 吋^3，所以它还是安全的。如果它不安全，就要选择新的梁，在计算弯矩时应用新梁的重量重复地进行这样的手续。

例题 2　有一方形截面梁(图 5-9)，在其对角线平面内弯曲。试说明梁中的最大应力藉切去图中阴影线所示的角而减小。

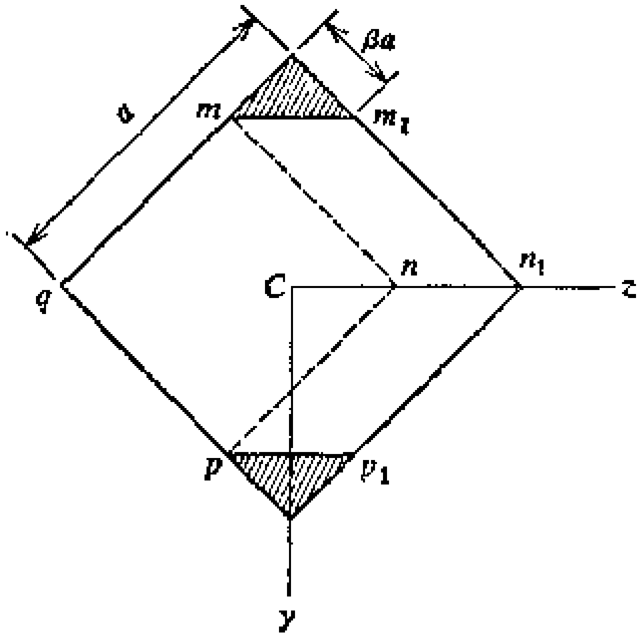


图 5-9　例题 2

完整方形绕 z 轴的惯性矩和截面模量分别为：

$$I_1=\frac{a^4}{12}\qquad S_1=\frac{\sqrt{2}\,a^3}{12}$$

式中 a 为方形的边长。现在让我们切去其角，以致每边缩短 βa，这里 β 为 0 与 1 之间的一个数。新的横截面由边长为 $a(1-\beta)$ 的方形 $mnpq$ 和两个平行四边形 mm_1n_1n 和 nn_1p_1p 所组成。这个减小了的截面对 z 轴的惯性矩为

$$I_2=\frac{a^4(1-\beta)^4}{12}+\frac{2\beta a\sqrt{2}}{3}\left[\frac{a(1-\beta)}{\sqrt{2}}\right]^3=\frac{a^4(1-\beta)^3(1+3\beta)}{12}$$

而相应截面模量为

$$S_2=\frac{I_2\sqrt{2}}{a(1-\beta)}=\frac{\sqrt{2}\,a^3(1-\beta)^2(1+3\beta)}{12}$$

如果我们确定使此截面模量为最大时的 β 值，我们求得 $\beta=1/9$。将此 β 值代入 S_2 的表达式，我们得到 $S_{max}=1.053\,S_1$。因而，我们发现：切去其角，截面模量增大约 5%，其最大弯曲应力也就减小与此相应的量。

当我们回忆截面模量为惯性矩与截面一半高度之商，此结果就容易理解。因切去其角，截面惯性矩减小的比例较其高度的减小要少一些。因此，实际上截面模量却增大。

5.3 梁中的剪应力

我们早已观察到，当梁由于横向荷载作用而弯曲时，通常在每一横截面上将同时作用有弯矩 M 和剪力 V。在第5.1节中，我们已确定由于弯矩所引起的法向应力的分布，而在本节中，我们将研究剪应力的分布。

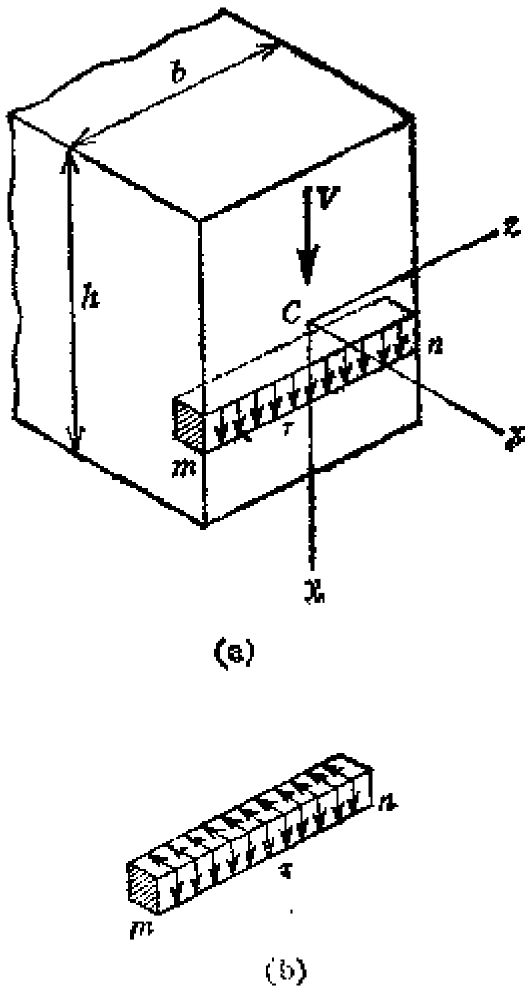


图 5-10　矩形横截面梁中的剪应力

让我们从宽度为 b、高度为 h 的矩形截面梁这种最简单的情况来开始(图 5-10 a)。对于这种梁自然假设其剪应力 τ 平行于剪力 V，亦即平行于横

截面的竖直边．第二个假设，我们取剪应力在梁宽度上为均匀分布．这两个假设的应用使我们能完全确定横截面上所作用的剪应力的分布．

可从梁上两相邻横截面之间和两平行中性面的平面之间切取作为梁的微小单元，如图 5-10a 和 b 中所示的单元 mn。于是，遵照前述假设，在单元竖直面上具有均匀分布的竖直剪应力 τ。根据第 1.9 节中对剪应力的讨论，我们还知道：该单元之一侧边上的剪应力，和该单元上与此侧边相垂直的面上之相等剪应力伴随地存在(图 5-10 b)．因此，梁的水平层之间存在水平剪应力，如同竖直截面上存在横切剪应力[1] 一样．梁内任意一点处，这些互补剪应力大小相等．

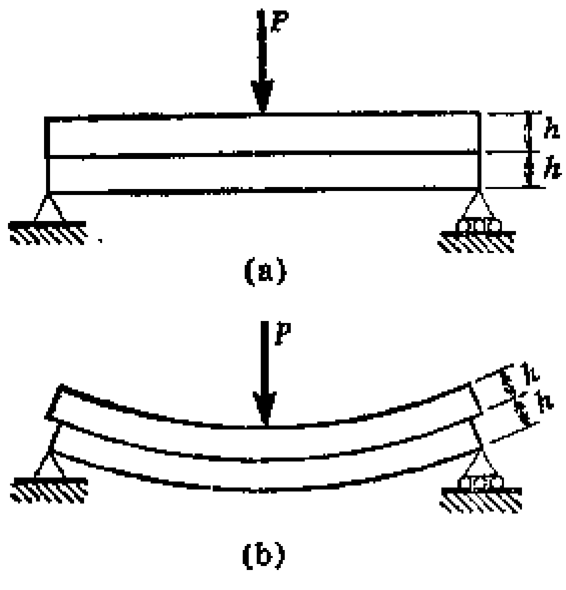


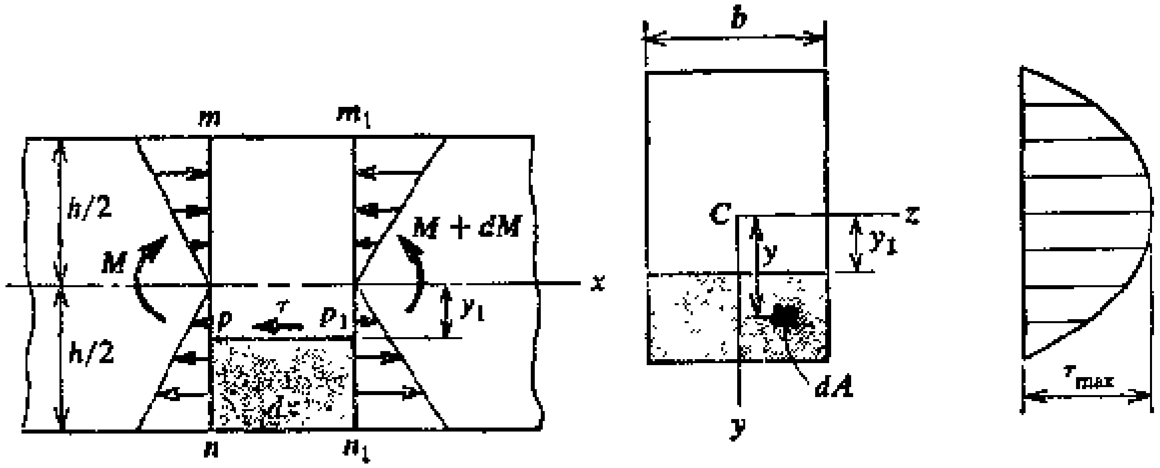
图 5-11

这种有关水平剪应力和竖直剪应力相等的观察，导出有关梁顶面和底面剪应力的有趣结论．如果我们考虑图 5-10 中的单元 mn 位于顶面处或底面处，显然其水平剪应力必须为零，因为梁的最外表面不存在应力．所以，梁的顶面和底面处 ($y=\pm h/2$)的竖向剪应力也必须等于零．

梁中水平剪应力的存在可藉简单的试验来证明．取两根高度为 h 的相同的矩形杆置于简单支承上，如图 5-11 a 所示，然后在它们的上面

1) 倘写成竖向剪应力，可能更明确．——译者注

加一集中力 P. 如果杆之间没有摩擦力，两杆将独立地发生弯曲. 每一杆将存在上部受压，下部受拉的情况，它们的情况示于图 5-11 b 中。上面那根杆的底面纵向纤维将对下面那根杆的顶面纤维发生滑动。如果我们有一高度为 $2h$ 的实心杆替代这两根杆，那么沿中性平面将必定存在剪应力，其大小恰好阻止图 5-11 b 中的滑动。由于这种滑动的被阻止，高度为 $2h$ 的单根杆的刚度和强度要比两根高度为 h 的分离杆的大些。



(a) (b) (c)

图 5-12 矩形横截面梁中的剪应力

早已表明：横截面中任一点处的竖直剪应力 τ 在数值上等于同一点处的水平剪应力. 这后一种应力可根据从梁中相距 dx 的两截面 mn 和 m_1n_1 间所切取的单元 pnn_1p_1 的平衡计算出来(图5-12a)。该单元的底面为梁的底表面，它不承受应力. 该单元的顶面平行于中性面，且距中性面为任意距离 y_1. 在梁中这一水平面上作用有水平剪应力. 该单元的端面上作用着弯矩产生的法向应力 σ_x. 此外，在端面上存在竖向剪应力，但是这些剪应力在该单元顺水平方向（x 方向）的平衡方程中不会涉及到，因此图 5-12 a 中没有把它表示出来.

如果横截面 mn 和 m_1n_1 处的弯矩相等，亦即，如果梁是处于纯弯时，那么整个 np 和 n_1p_1 边上的法向应力也将相

等. 因此,该单元处于平衡,而且其剪应力 τ 必须等于零.

在弯矩变化着的这样一种较为普遍的情况下,让我们以 M 和 $M+dM$ 分别代表横截面 mn 和 m_1n_1 处的弯矩. 作用于该单元左端面单元面积 dA 上的法向力将为(见方程 5-10).

$$\sigma_x dA = \frac{My}{I}dA$$

分布于整个 pn 面上所有单元力之和将为:

$$\int_{y}^{h/2} \frac{My}{I}dA \tag{a}$$

按同样的方式,作用于右面 p_1n_1 上的法向力之和为:

$$\int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM)y}{I}dA \tag{b}$$

作用于该单元顶面 pp_1 上的水平剪力为

$$\tau b dx \tag{c}$$

藉表达式(a)、(b)和(c)所得到的诸力,必须处于平衡,因此

$$\tau b dx = \int_{y_1}^{h/2} \frac{(M+dM)y}{I}dA - \int_{y}^{h/2} \frac{My}{I}dA$$

根据它得出

$$\tau = \frac{dM}{dx}\left(\frac{1}{Ib}\right)\int_{y_1}^{h/2} y dA$$

或藉应用方程(4-2)得

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_1}^{h/2} y dA \tag{5-17}$$

此方程中的积分代表横截面中阴影部分(图 5-12 b)对中性轴 z 的一次矩[1]. 换句话说,该积分为欲求得剪应力 τ 处的任意水平线 y_1 以下横截面积的一次矩. (当 y_1 是在中性轴以

---

1) 或称静矩 ——译者注

上度量而得，那么此积分则为欲求剪应力处水平线以上面积的一次矩。）用 Q 代表该一次矩，我们可用下面形式写出方程(5-17)：

$$\tau=\frac{VQ}{Ib} \tag{5-18}$$

为了确定 τ 是怎样随距中性轴的距离 y_1 而变化的，现在我们必须研究 Q 随 y_1 的变化，因为 V，I 和 b 均为常数.

对于图 5-12 b 所示矩形横截面，其阴影面积的 Q 值为：

$$Q=b\left(\frac{h}{2}-y_1\right)\left(y_1+\frac{h/2-y_1}{2}\right)=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right) \tag{d}$$

上列结果是用阴影面积与其形心至 z 轴距离相乘面求得的，它也可藉进行方程(5-17)中所示的积分式来得到. 现在将表达式(d)代入方程(5-18)，我们得到

$$\tau=\frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right) \tag{5-19}$$

此结果表明：剪应力随 y_1 成抛物线变化，如图 5-12c 所示. 当 $y_1=\pm h/2$ 时，其剪应力为零，而中性轴处($y_1=0$)，剪应力具有最大值：

$$\tau_{max}=\frac{Vh^2}{8I}=\frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{5-20}$$

式中 $A=bh$ 为横截面积. 因而，最大剪应力（水平的或竖向的）要比平均剪应力 V/A 大百分之五十[1)].

由于剪应力 τ 自梁顶至梁底按抛物线变化，得出：剪切应变 $\gamma=\tau/G$ 必定按同样方式变化. 这样，原来为平面的梁的横截面则变成翘曲形状了. 这种翘曲可藉使梁发生弯曲，用梁边上事先绘出的竖直线(如图 5-13 中的 mn 线和 pq 线）的弯曲来说明. 这些线没有保持成直线，却变为在最大剪应力所发生的中性面处形成弯曲的情形. 在 m_1, p_1, n_1

---

1) 上面梁中剪应力的分析为Jourawski所得(参考文献 5-7).

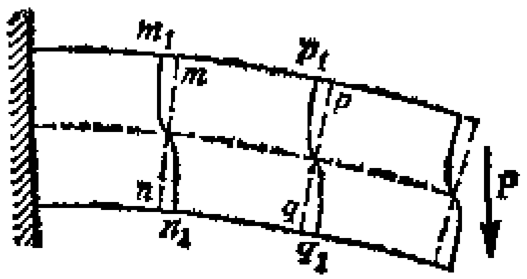


图 5-13　由于剪切使梁横截面产生的翘曲

和 q_1 处，剪应力为零，而曲线 m_1n_1 和 p_1q_1 保持与杆弯曲后的顶上表面和底下表面相垂直。中性面处 m_1n_1 和 p_1q_1 的切线与法向截面 mn 和 pq 之间的夹角等于其剪切应变 $\gamma=\tau_{max}/G$。只要剪力沿着梁保持常数，那么所有横截面的翘曲就都相同，因而 $m_1m=p_1p$、$nn_1=qq_1$。这样，由于弯矩所产生的纵向纤维的伸长或缩短不受剪切应变的影响，法向应力 σ 的分布也是这样，如同处于纯弯一样。

这一问题的精心研究表明：即使分布荷载作用于梁上，且剪力沿梁连续变化，由于剪切应变引起横截面的翘曲，基本上不影响纵向应变。对于集中荷载，靠近荷载处的应力分布比较复杂，但是这种不规则性是非常局部的，且对梁中全面的应力分布没有显著影响。因而，将纯弯时所推导的弯曲公式（方程 5-10）用于非均匀弯曲的情况是相当有理的。

宽翼缘梁中的剪应力　　在讨论宽翼缘梁腹板或 I 梁腹板中剪应力的分布时（图 5-14 a），采用对矩形横截面所应用过的相同假定，亦即假设：剪应力 τ 平行于 y 轴，并沿腹板厚度 t 均匀分布。于是方程(5-18)可以再次用于计算其剪应力。讨论距中性轴 y_1 处的一个点，我们看到横截面的阴影部分对中性轴的一次矩为：

$$Q=b\left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right)\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h/2-h_1/2}{2}\right)$$

$$+t\left(\frac{h_1}{2}-y_1\right)\left(y_1+\frac{h_1/2-y_1}{2}\right)$$

根据它得出

$$Q=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)+\frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y_1^2\right)$$

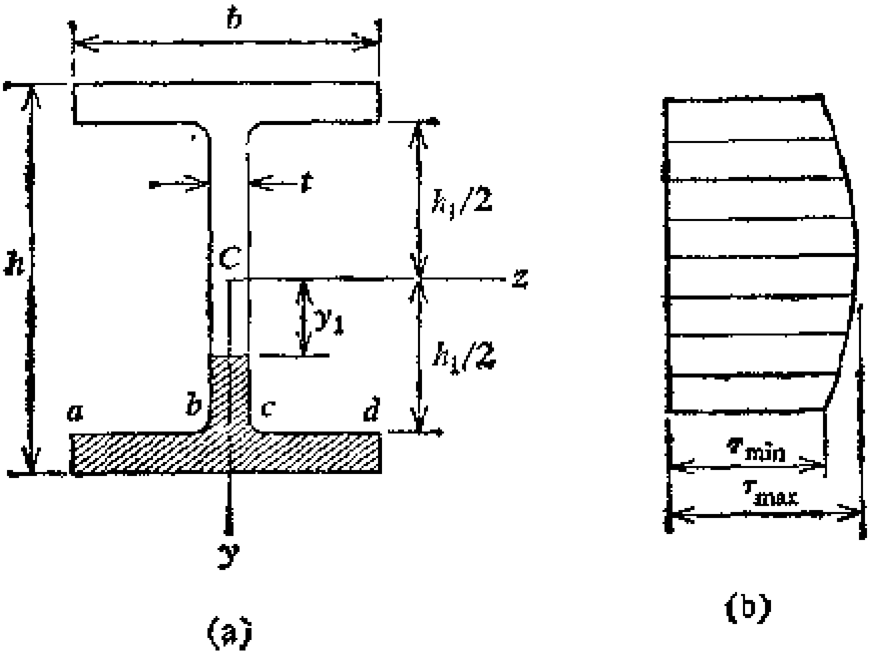


图 5-14　宽翼缘梁腹板中的剪应力

所以，梁的腹板中的剪应力为

$$\tau=\frac{V}{It}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)+\frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y_1^2\right)\right] \tag{5-21}$$

我们从这个方程看出：τ 沿腹板的高度成抛物线变化，如图 5-14 b 所示。最大剪应力发生于中性轴处，且可藉使方程 (5-21) 中 $y_1=0$ 而求得。腹板中的最小剪应力，藉令 $y_1=\pm h_1/2$ 来求得。因而，我们求出

$$\tau_{max}=\frac{V}{It}\left(\frac{bh^2}{8}-\frac{bh_1^2}{8}+\frac{th_1^2}{8}\right)\qquad \tau_{min}=\frac{V}{It}\left(\frac{bh^2}{8}-\frac{bh_1^2}{8}\right) \tag{e}$$

正常地，腹板的厚度 t 与 b 相比是非常小的。因此 τ_{max} 和 τ_{min} 之间没有大的区别，从而整个腹板截面上剪应力的分布几乎是均匀的。用腹板的横截面积 h_1t 去除总剪力 V 可得到 τ_{max} 的很好的近似值。这是根据这样的事实而来的：即分布于整个腹板横截面上的剪应力得出一个几乎等于 V 的总的力，这表明腹板几乎承受全部剪力，而翼缘只承受其较小部分。

在讨论翼缘中剪应力分布时，不能采用沿翼缘整个宽度 b 上的剪应力为常数的假定. 例如，我们立即看出：在 $y_1=\frac{h_1}{2}$处，其作用于自由表面 ab 和 cd（图 5-14 a）上的剪应力必定为零，反之，在 bc 连接处，其应力具有上面所计算的值（方程 e）. 这种观察表明：在腹板和翼缘连接处，其剪应力的分布遵循较复杂的规律，这种分布不能靠初等分析来研究. 为了减少 b 点和 c 点处应力集中，在该处采用圆角，如图中所示. 对于 I 梁中剪应力分布的进一步讨论，将在后面第 8.4 节中加以叙述.

例题 1 有一承受两个集中荷载 P 的简单梁（图 5-1 a），其横截面为矩形，宽度 $b=4$ 吋，高度 $h=6$ 吋. 从梁的端点到荷载之一的距离 a 为 18 吋. 如果该梁是由 $\sigma_w=1600$ 磅/吋^2，$\tau_w=200$ 磅/吋^2 的木材所构成，试确定 P 的容许值.

梁中的最大弯矩 M 和最大剪力 V 为

$$M=Pa \qquad V=P$$

另外，其截面模量 S 和横截面积 A 为

$$S=\frac{bh^2}{6} \qquad A=bh$$

现在，根据方程(5-12)和(5-20)，我们得出

$$\sigma=\frac{M}{S}=\frac{6\,Pa}{bh^2} \qquad\qquad \tau=\frac{3\,V}{2\,A}=\frac{3\,P}{2\,bh}$$

因此，荷载 P 的限制值为

$$P=\frac{\sigma_w bh^2}{6\,a} \qquad 和 \qquad P=\frac{2\,\tau_w bh}{3}$$

将数字值代入这些公式，我们得

$$P=2133\ 磅 \quad 和 \quad P=3200\ 磅$$

因此，由弯曲应力控制设计，其容许荷载 $P=2133$ 磅.

例题 2 有一 T 形横截面梁（如图5-15所示），假设 $b=4$ 吋，$t=1$

吋，$h=8$ 吋，$h_1=7$ 吋，$V=10,000$ 磅，试确定梁腹板中的最大剪应力。

其横截面形心的距离 c 确定如下：

$$c=\frac{3(1)(0.5)+8(1)(4)}{3(1)+8(1)}$$

$$=3.05\text{ 吋}$$

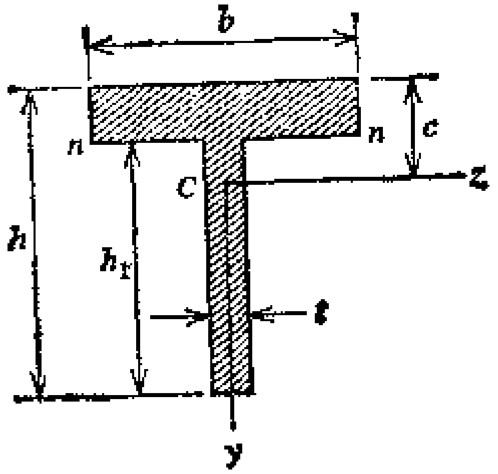


图 5-15 例题 2

横截面绕中性轴的惯性矩 I，可藉先得出绕 nn 轴的惯性矩，然后用平行轴定理（见附录 A）来求得。其计算如下：

$$I=\frac{4(1)^3}{3}+\frac{1(7)^3}{3}-11(2.05)^2=69.7\text{吋}^4$$

最大剪应力发生于中性轴处；中性轴以下面积的一次矩 Q 为

$$Q=\frac{1(4.95)^2}{2}=12.3\text{ 吋}^3$$

现在代入方程(5-18)，我们得

$$\tau=\frac{VQ}{It}=\frac{10,000(12.3)}{69.7(1)}=1760\text{ 磅/吋}^2$$

它为最大剪应力。

5.4 圆形横截面梁中的剪应力

当梁为圆形横截面时(图 5-16 a)，关于全部剪应力平行于 y 轴的假定就没有任何根据了。实际上，我们可以容易地证明：在横截面边界上 m 点处，其剪应力必定与边界相切。让我们讨论一无限小单元 $abcdfg$(图 5-16 b)，该单元为一矩形平行六面体，它的 $abgf$ 面位于梁的表面上，而它的 $abcd$ 面位于梁的横截面内。如果作用于单元的 $abcd$ 侧面上的剪应力具有 τ_1 所示的方向，它总可分解成顺径向的分量 τ_r 和切于边界方向的分量 τ_t。我们早已证明(藉考虑单元的平衡)：如果剪应力 τ 作用于单元的一个面上，则在与此相垂直的面上也将作用有数值相等的剪应力，将此概念用于图 5-16 b 所示单元上，我们必定得出结论；

如果剪应力 τ_r 顺径向作用于 $abcd$ 面上，那么将有相等的剪应力 τ_r 作用于该单元的 $adgf$ 侧面上。由此得出：剪应力 τ_1 的径向分量 τ_r 必须等于零，因为梁的外表面是不承受应力的。所以，应力 τ_1 作用于梁的横截面边界的切线方向上。

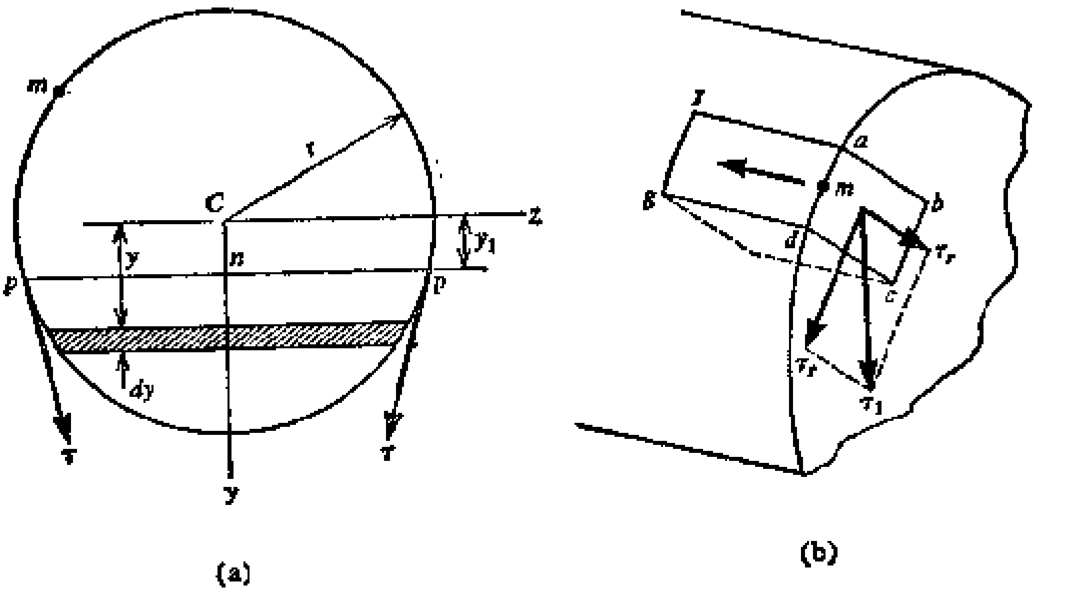


图 5-16　圆形横截面梁中的剪应力

当我们研究作用于沿距中性轴 y_1 处 pp 弦上的剪应力时（图 5-16 a），让我们应用这个结论。弦端处的剪应力 τ 必须切于横截面的边界处，如图所示。在弦的中点 n 处，对称性要求其剪应力平行于 y 轴。由此得出：p 点和 n 点处的剪应力的方向将相交于 y 轴上某一点处。现在假设 pp 线上任一其它点处的剪应力也指向这相同点，我们就完全决定了诸剪应力的方向。

第二个假定：对沿 pp 线上的所有点，我们取其剪应力的竖直分量相等。因为此假定与对于矩形横截面所作的假定完全相同，我们可将方程(5-18)用来计算此分量。在这种情况下，b 将代表弦 pp 的长度。因为剪应力的方向和其竖直分量现在都为已知，对于横截面上任意点处剪应力的大小就可以容易地计算出来。

现在，让我们着手计算沿横截面 pp 线上的剪应力（图 5-16 a）。在应用方程(5-18)计算这些应力的竖直分量时，我们必须求出 pp 线以下

圆的弓形部分对于 z 轴的一次矩 Q。图中阴影所示的单元面积的长度为 $2\sqrt{r^2-y^2}$，宽度为 dy，其中 r 为圆形横截面的半径。其面积为 $dA=2\sqrt{r^2-y^2}\,dy$。此窄条对中性轴的一次矩为 ydA，整个弓形的总的一次矩 Q 为

$$Q=\int_{y_1}^{r} 2y\sqrt{r^2-y^2}\,dy=\frac{2}{3}(r^2-y_1^2)^{3/2}$$

将此结果代入方程(5-18)，并对 b 取 $2\sqrt{r^2-y_1^2}$，我们得到剪应力的竖直分量：

$$\tau_y=\frac{V(r^2-y_1^2)}{3I} \tag{a}$$

而边界上 p 点处总的剪应力为

$$\tau=\frac{\tau_y r}{\sqrt{r^2-y_1^2}}=\frac{Vr\sqrt{r^2-y_1^2}}{3I} \tag{5-22}$$

根据这个方程，我们看出：对于 $y_1=0$ 处，亦即对于横截面的中性轴处，我们得到最大的 τ。代入 $I=\pi r^4/4$，我们得到：

$$\tau_{max}=\frac{4V}{3\pi r^2}=\frac{4V}{3A} \tag{5-23}$$

此方程表明：对于圆形横截面，其最大剪应力比用横截面积去除剪力所得的平均值要大三分之一。在中性轴处，其剪应力 τ 平行于 y 轴，且沿截面的大小不变，因此，它们可按方程(5-18)直接求出。

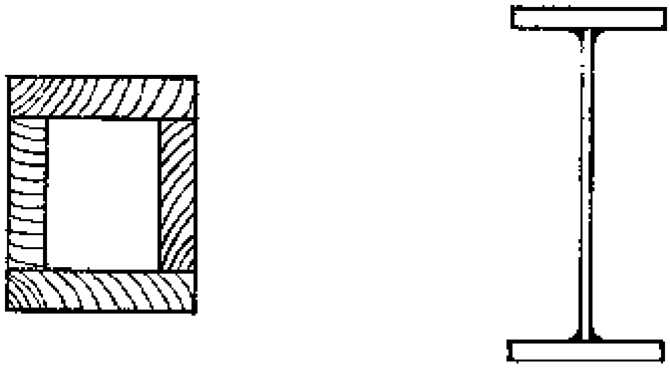
上面所述近似理论，在计算实心圆形梁的剪应力中具有良好的精确度。与精确理论相比较表明，其误差只有百分之几。藉弹性理论所得的精确结果可在参考文献 5-9 中找到。

如果梁为薄壁、空心、圆形截面，我们可在具有良好的精确度下假设：中性轴处的剪应力沿管的厚度为均匀分布。所以，方程(5-18)可用来求其最大剪应力。

5.6 合成梁

在许多结构类型中，合成梁或拼组梁是需要的。这类梁的两个例子示于图 5-17 中。第一个例子为一空心方形截面的箱形梁，它由四块木板条藉钉、螺丝或胶构成。第二个例子

为一钣梁，它藉焊接三块钢板形成．合成梁中的应力通常按下面假定进行计算：所有部件均保证连接，以使其梁具备实体梁所具备的性能．因此它的计算包括两个方面：(a) 按实体梁一样进行梁本身的计算，(b)设计其连接构件（钉、螺丝、螺栓等），以保证该梁的性能与实体梁一样．当设计梁本身时，可以应用对梁常用的公式，必须以减小横截面积来考虑其螺栓孔的影响．连接构件的设计是以总水平剪力传给合成梁中各部件之间为根据．



(a)　　(b)

图 5-17　合成梁：(a)木箱形梁；(b)钢梁

用于梁的任何两部件之间传递水平剪力的简单公式可以再次参照第 5.3 节中图 5-12 来求得．在推导方程(5-18)时，曾经假设剪应力是均匀地分布于梁的整个宽度 b 上．在较普遍情况中，这种假设是不能成立的．然而，我们仍然可以计算作用于梁的单元顶面上的总水平剪力，如象图 5-12 a 中的单元 pp_1n_1n．这个总的力等于 fdx，其中 f 为顺梁轴单位距离上的总剪力（作用于梁的全部宽度上）．该 f 量称为剪力流，对于矩形横截面梁，它等于 τb．作用于图 5-12 a 中单元顶面上的力 fdx，由作用于该单元两端面上法向应力的合力差来平衡．因而，如果我们按推导方程 (5-18) 的相同方式来

进行，我们就将得到下列剪力流的方程：

$$f=\frac{VQ}{I} \tag{5-24}$$

当设计梁中各部件之间的连接构件时，这个方程是有用的，因为它得出各部件之间所传递的水平剪力（在梁的单位长度上）。现在用例子来说明方程(5-24)的应用.

例题 有一箱形梁（图5-18），由螺丝连接木板（1吋×6吋）构成。作用于横截面上的剪力 V 为920磅，每一螺丝的容许剪切荷载 $F=250$ 磅。试确定螺丝的所需间距 s。

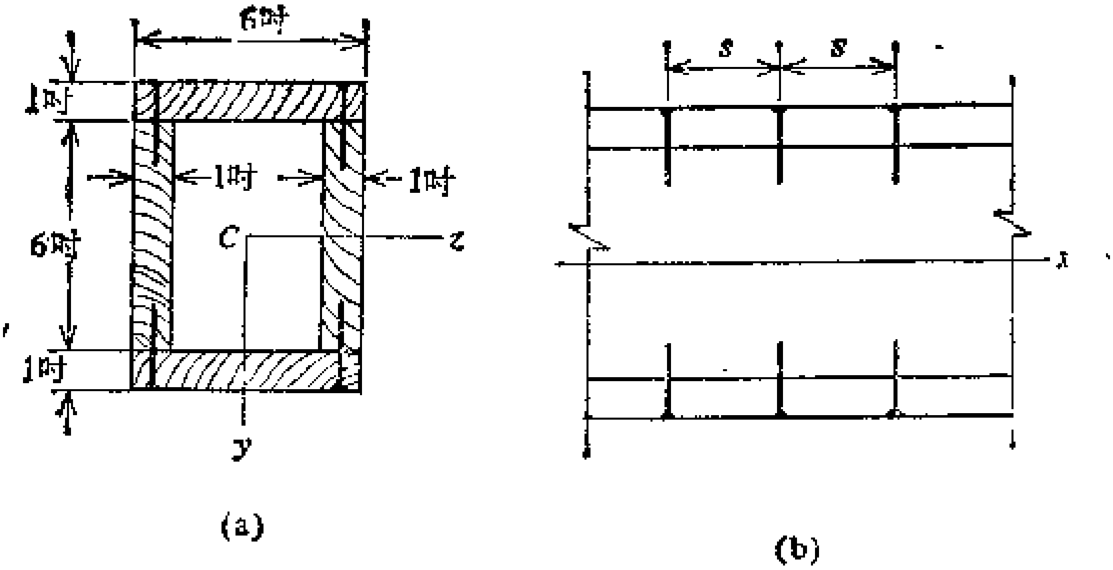


图 5-18 数字例题

传递于其中一块水平板和两块竖直板之间的剪力流 f，可根据方程(5-24)求得。该方程中的量 Q 为截面中想求剪力流的地方以外的横截面面积的一次矩，此即顶板面积对中性轴的一次矩，因而

$$Q=6(1)(3.5)=21\text{ 吋}^3$$

整个横截面对中性轴的惯性矩为：

$$I=\frac{6(8)^3}{12}-\frac{4(6)^3}{12}=184\text{ 吋}^4$$

代入方程(5-24)，我们求得剪力流为：

$$f=\frac{920(21)}{184}=105\text{ 磅/吋}$$

这个单位长度上的力必须由螺丝承受。因为有两行螺丝，每一侧有一行，所以每吋长度上螺丝的总承载能力为 $2F/s$，此量必须等于剪力流。因此，我们得 $2F/s=f$ 或

$$s=\frac{2F}{f}=\frac{2(250)}{105}=4.76\text{ 吋}$$

螺丝必须采用此间距或小于此间距，使之成为安全的设计。

5.6 梁中的主应力

应用方程 $\sigma=\frac{My}{I}$ 和 $\tau=\frac{VQ}{Ib}$，我们能确定作用于梁横截面中任一点处的法向应力和剪应力。梁外缘处产生最大法向应力，而中性轴处为零；梁外缘处剪应力为零，而通常在中性轴处产生最大剪应力。对梁中应力的较全面的分析要求我们讨论这些剪应力和法向力的组合效应。特别是应用第二章所述方法我们可以确定任一欲求位置处的主应力和最大剪应力。

为了要知道梁中主应力的大小和其方向是怎样变化的，我们从考察矩形横截面梁中的应力状态来开始(图 5-19 a)。图中 A, B, C, D 和 E 五个点均选于一个截面上。A 点和 E 点分别位于其顶面处和底面处；C 点位于梁的中间高度处。如果该横截面上的弯矩 M 和剪力 V 均已知，那么任一点处的应力都可以求得出来。然后这些应力可以绘成作用于梁上相应点处所切出的微小单元上(见图 5-19 b)。为了求出其主应力和最大剪应力，我们可以应用平面应力方程(见第 2.5 节)或莫尔圆(第 2.6 节)。每一点处主应力的方向近似地示于图 5-19 c 中，而其最大剪应力示于图 5-19 d 中。

根据图 5-19 c 中的概图，我们可以观察主应力的变化。

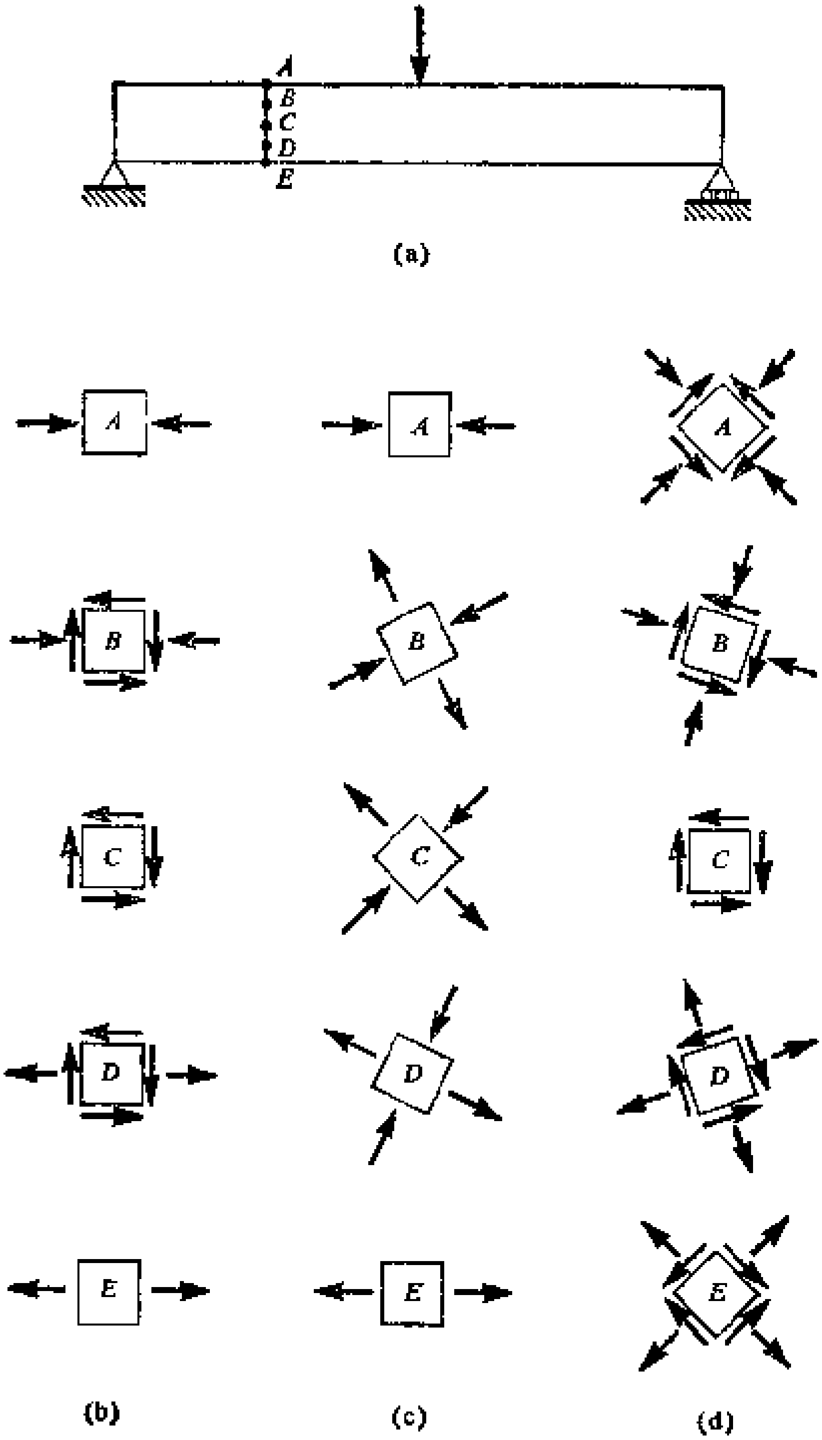
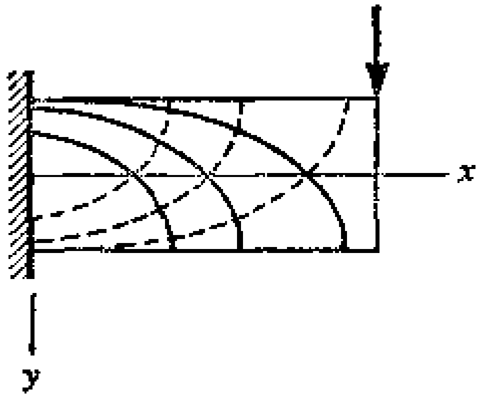
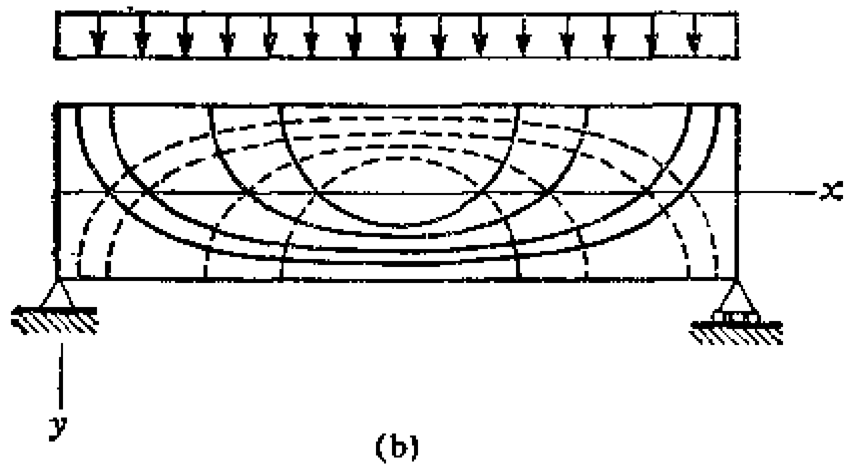


图 5-19 矩形横截面梁中的应力：
(b) A、B、C、D 和 E 点处的法向应力和剪应力；(c) 主应力；(d) 最大剪应力

在梁顶处，主压应力沿水平方向作用．当我们移近中性轴时，主压应力与水平线成倾斜，而在中性轴处（C 点），主压应力与水平线成 45°．在 D 点处，主压应力差不多是竖直的，而当我们逼近梁底时，其方向逼近竖直方向．此压应力的大小自梁顶至梁底连续地变化，在底面处，它变为零．矩形梁中此应力的最大数值即使有可能在发生于梁内像 B 这样的点上，但通常发生于 A 点处．将类似的解说用于主拉应力，当我们自 A 点移至 E 点时其大小和方向也都在变化．



(a)



(b)

图 5-20 下列情况的主应力迹线：
(a) 悬臂梁，(b) 简单梁．（实线代表主拉应力，虚线代表主压应力）

藉研究梁上许多横截面处的应力，我们将得出说明主应力如何变化的完整图形．根据这些资料，有可能绘出两组称

为应力迹线的正交曲线，从它们得出整个梁上主应力的方向。图5-20a表明矩形横截面悬臂梁在端点处集中荷载作用下的应力迹线.图中，实线用于主拉应力，虚线用于主压应力.这两组曲线彼此成直角相交，而所有曲线以 45° 与中性轴相交。梁的顶表面处和底表面处剪应力为零，该处迹线具有水平切线或竖直切线。关于矩形横截面简单梁在均匀荷载作用下的应力迹线绘于图 5-20 b[1] 中。

可根据梁中应力绘制另一种曲线形式称为应力等值线。这种曲线连接相等主应力的各点。作为一个实例，在图 5-21 中绘出了矩形横截面悬臂梁的典型应力等值线（仅对主拉应力）。

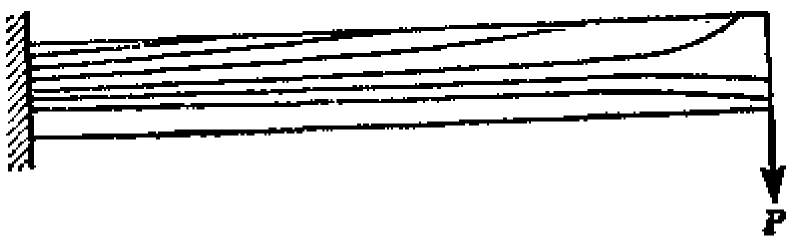


图 5-21 悬臂梁的典型应力等值线

其它横截面形状的梁，可用对于矩形梁已用过的相同方式分析其主应力。在宽翼缘梁或 I 梁中，虽然最大应力通常发生于梁的外缘处，但最大主应力可能发生于腹板与其翼缘的连接处。最大剪应力通常发生于中性轴处，但是在某些加载的非常情况下，它可能发生在中性轴的上面或下面处。

关于矩形梁和宽翼缘梁中最大主应力的位置和最大剪应力的位置均在参考文献 5-11 中作了详细的讨论。

当对梁分析最大应力时，必须时刻记住：靠近梁的支承处和靠近荷载作用点处，以及靠近形状突然变化处（圆角、孔

---

1) 应力迹线系 Culmann 于 1866 年绘出(参考文献 5-10)。

洞等)，将存在引起高应力的局部性效应，这种效应用普通的梁的公式是不能预示的。这种局部性应力称为**应力集中**。

5.7 非棱柱形梁中的应力．近似理论

在前面诸节中所讨论的梁，均假设为棱柱形者，亦即整个长度上横截面不变的梁。然而，对于棱柱形梁所推导的应力公式也可用于非棱柱形梁而具有相当的精确度，只要横截面的尺寸变化是逐渐的。例如，对于很小锥度的杆件(见图5-22a)，由于弯曲产生的法向应力可按方程 $\sigma = My/I$ 来计算；如果锥角很小，那么与某些精确结果相比(如后文所示)，其计算结果将精确到百分之几以内[1]。

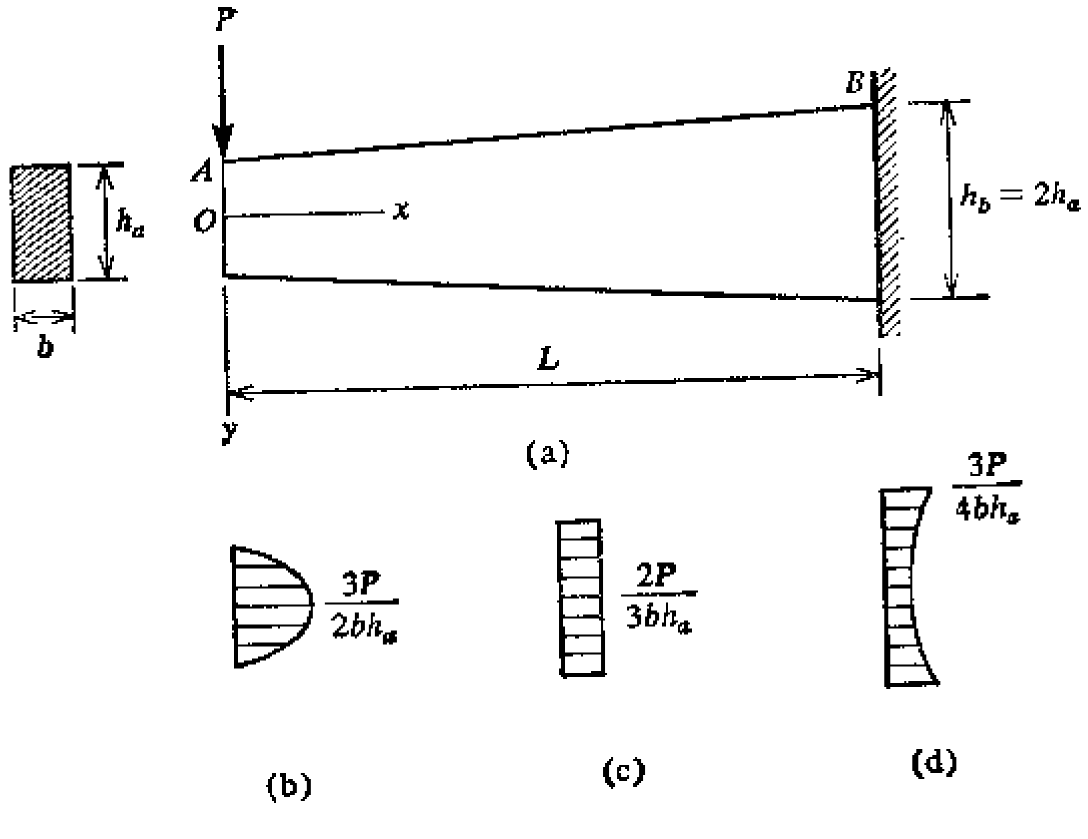


图 5-22 矩形横截面锥形梁

1) 倘说成："其误差仅为百分之几"，这样可能较为明确。译者注

然而，对于剪应力，对棱柱形杆所导得的公式$\tau=\frac{VQ}{Ib}$就不再适用了。我们必须导出结合了梁的变化高度影响的新关系。为了这个目的，让我们讨论从非棱柱形梁中所切出Δx微小长度的单元，如图5-23所示。在此单元的左面m_1n_1上，其力矩为M_1，而右面m_2n_2上为M_2。梁的相应高度分别以h_1和h_2来代表，y_1为中性轴至剪应力τ的作用点之距离（与图5-12a中的棱柱形梁对照）。

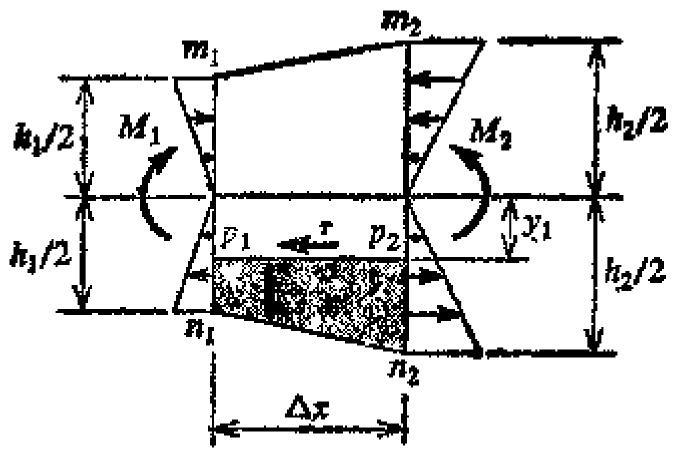


图 5-23 长度为Δx的单元

剪应力τ根据单元$n_1p_1p_2n_2$的静力平衡方程求得。由于该单元左面和右面法向应力所产生的力分别为M_1Q_1/I_1和M_2Q_2/I_2（见第5.3节方程(a)）。在这些表达式中，I_1和I_2为这两个横截面的惯性矩，而Q_1和Q_2分别为该单元侧面p_1n_1和p_2n_2的面积对其中性轴的一次矩.作用于该单元顶面p_1p_2上的总力为$\tau b\Delta x$，其中b为距中性轴y_1处梁的宽度。因而，静力平衡方程成为：

$$\tau b\Delta x=\frac{M_2Q_2}{I_2}-\frac{M_1Q_1}{I_1} \qquad (5\text{-}25)$$

对于任一特定梁，此方程可藉代入数字值用于求其近似剪应力。其程序如下。选择梁上需求剪应力τ的横截面。然后，

取相距微小距离 Δx 的相邻截面．在这每一截面处，确定下列值：(1)弯矩 M；(2)需要求 τ 的部位外侧横截面积的一次矩 Q(亦即，梁的外缘与需确定 τ 的部位之间面积的一次矩)；(3)横截面的惯性矩 I．然后将这些值代入方程(5-25)，对 τ 求解．Δx 距离假设得愈小，其结果就愈精确．然而，如果 Δx 太小，方程(5-25)中的两项几乎相等，由于取这两项之差，数字精确度将被丧失．方程(5-25)是极为一般的方程，在许多实际情况下可将它用来求出横截面变化梁中的剪应力．

在矩形横截面梁(宽度 b 不变，而高度 h 变化)这一特殊情况下，藉令 Δx 接近于零，方程(5-25)可以改造成较精确的方程．为了达到此结果，我们必须在横截面 1 和横截面 2 处求算 Q 和 I：

$$Q_1=\frac{b}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y_1^2\right)\qquad Q_2=\frac{b}{2}\left(\frac{h_2^2}{4}-y_1^2\right)$$

$$I_1=\frac{bh_1^3}{12}\qquad I_2=\frac{bh_2^3}{12}$$

现在，令 $h_2=h_1+\Delta h$，其中 Δh 为当我们从截面 1 至截面 2 时 h 的增量，根据上面表达式，我们得到：

$$Q_2=Q_1+\frac{bh_1\Delta h}{4}\qquad I_2=I_1+\frac{bh_1^2\Delta h}{4}$$

在求得的这些表达式中，包括 Δh 的平方和立方之诸项已被丢掉，因为它们与留下的诸项相比是很小的．还引进记号：$M_2=M_1+\Delta M$．现在我们将 Q_2，I_2 和 M_2 的表达式代入方程(5-25)：

$$\tau b\Delta x=\frac{(M_1+\Delta M)\left(Q_1+\dfrac{bh_1\Delta h}{4}\right)}{I_1+\dfrac{bh_1^2\Delta h}{4}}-\frac{M_1Q_1}{I_1}$$

为了简化这个表达式，我们可以用第二项的分母乘以所有各项，然后展开剩下的部分．其结果为

$$\tau bI_1\Delta x+\frac{\tau b^2h_1^2}{4}\Delta h\Delta x=\frac{M_1bh_1}{4}\Delta h+Q_1\Delta M+\frac{bh_1}{4}\Delta h\Delta M$$
$$-\frac{M_1Q_1}{4I_1}bh_1^2\Delta h$$

现在可以丢掉此方程中包括两个微量乘积的诸项，然后可用 Δx 去除其方程。根据极限理论，当 Δx 变得很小很小时，$\Delta h/\Delta x$ 一项则成为 dh/dx，而 $\Delta M/\Delta x$ 一项成为 dM/dx，此项等于剪力 V. 因此，上列方程现在成为：

$$\tau b I_1 = \frac{M_1 b h_1}{4}\frac{dh}{dx} + Q_1 V - \frac{M_1 Q_1 b h_1^2}{4 I_1}\frac{dh}{dx}$$

最后步骤，我们用 bI_1 除所有各项，然后去掉数字脚注，这些脚注已不再需要了。因而，在矩形横截面的非棱柱形梁中，剪应力 τ 的方程的最后形式为：

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} + \frac{Mh}{4I}\left(1 - \frac{Qh}{I}\right)\frac{dh}{dx} \tag{5-26}$$

此方程对于宽度 b 不变、高度 h 变化的梁是成立的。其高度可以按任一形式变化，只要它的变化是逐渐的就可以。我们观察到横截面上的剪应力不仅与剪力有关，而且还与弯矩以及 h 对 x 的变化率有关。

作为特殊例子，让我们研究图 5-22 a 所示矩形横截面悬臂梁的剪应力分布。该梁端点处的高度为 h_a 和 $h_b = 2h_a$，其锥度是均匀的。所以，dh/dx 量为一常数，且等于

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_b - h_a}{L} = \frac{h_a}{L}$$

位于左端 A 处，弯矩为零，因此方程(5-26)得出与棱柱形梁中相同的剪应力分布(见方程 5-18)。这种分布绘于图 5-22 b 中，其最大剪应力产生于中性轴处，且等于 $1.5\,P/bh_a$。

对梁中点处($x = L/2$)，得到下列值：

$$V = P,\quad h = 1.5\,h_a,\quad Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right),\quad M = \frac{PL}{2},\quad I = \frac{bh^3}{12}$$

代入方程(5-26)，得

$$\tau = \frac{2P}{3bh_a}$$

它已绘于图 5-22 c 中。在这种特定情况下，我们得出有趣的结果：剪应力是沿梁的高度均匀分布的。在梁的左端 A 和梁的中点之间剪应力的分布，是从图 5-22 b 所绘的分布情况逐渐变到图 5-22 c 所示的均匀分布情况。

在梁的右端处($x=L$)，我们有 $V=P$、$h=h_b=2h_a$，$M=PL$。代入方程(5-26)，得

$$\tau=\frac{3P}{8bh_a}\left(1+\frac{y_1^2}{h_a^2}\right)$$

它已绘于图 5-22 d 中。注意：在此横截面上等于 $3P/4bh_a$ 的最大剪应力发生于梁的外缘。等于最大应力一半的最小应力发生于 $y_1=0$ 的中性轴处。

在一侧边缘为水平而另一侧边缘为锥形的矩形梁中，其剪应力可藉应用上面对两侧边缘均为锥形的梁所述相同理论来求得。这种情况的讨论可在参考文献 5-12 中找到。

棱柱形梁中的最大法向应力总是发生于最大弯矩的截面处。然而，当梁为非棱柱形时，这就可能不是这样了。用以说明这种可能性的例子有实心圆形横截面的锥形悬臂梁（见图 5-24）。如果我们假设 $d_b/d_a=2$，那么距左端 x 距离处杆的直径 d 为

$$d=d_a+(d_b-d_a)\frac{x}{L}=d_a\left(1+\frac{x}{L}\right)$$

而其相应截面模量为

$$S=\frac{\pi d^3}{32}=\frac{\pi}{32}d_a^3\left(1+\frac{x}{L}\right)^3$$

因此，最大法向应力 σ 为

$$\sigma=\frac{M}{S}=\frac{Px}{S}=\frac{32Px}{\pi d_a^3\left(1+\frac{x}{L}\right)^3}$$

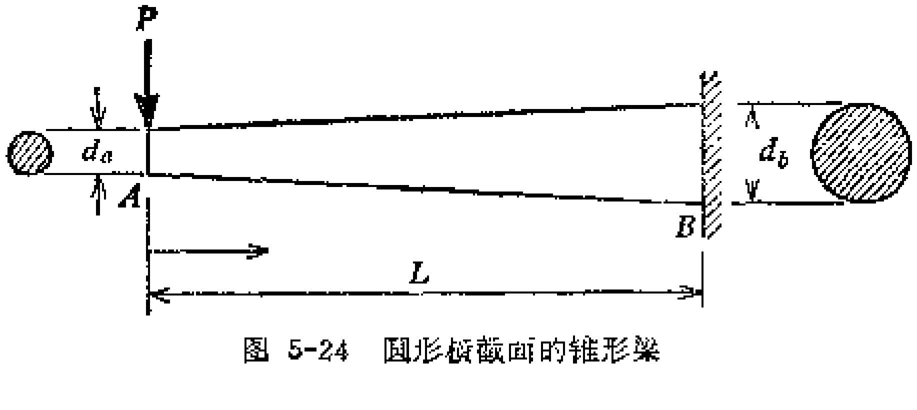


图 5-24 圆形横截面的锥形梁

求导数 $d\sigma/dx$，并令它等于零，我们可以求出最大 σ 处的 x 值。其结果为 $x=L/2$，而相应的最大应力为

$$\sigma_{max}=\frac{128}{27}\frac{PL}{\pi d_a^3}=4.741\frac{PL}{\pi d_a^3}$$

在最大弯矩的截面处（支承 B），其应力为

$$\sigma_b=\frac{4PL}{\pi d_a^3}$$

因而，在这个特定例子中，最大应力发生于杆的中央处，而且比弯矩达到最大值的嵌固端处的应力要大百分之19。如果梁的锥度减小，那么最大法向应力的截面将向固定支承移动。对于梁的锥度很小的情况，最大应力发生在 B 端处，正如棱柱形悬臂梁那样。

为了使梁采取最少的材料用量，我们可以变化其横截面以使所有横截面保持相等的最大应力。在每一横截面处最大应力等于容许应力的这种理想情况中，我们所得的情况称为全应力设计[1]。这是对于结构最小重量设计的常用的准则。自然，由于在建造梁的实际问题上以及荷载与设计所假定的荷载之间存在差别的可能性，这种理想的情况是很少能做得到的。关于采取变化尺寸进行设计以保持最大应力不变（尽量接近）的结构中的熟悉例子是汽车的叶片弹簧和桥梁中带有变化长度的盖板的板梁。

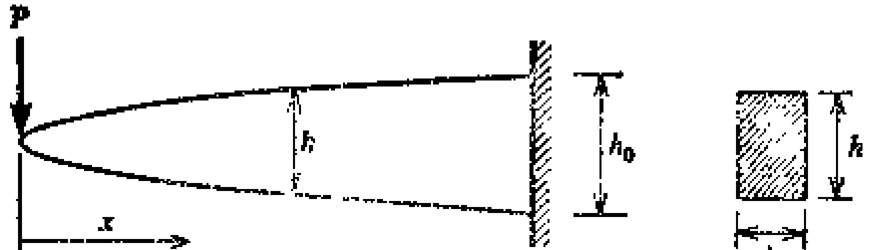


图 5-26　具有常数最大法向应力（剪应力略去不计）的梁

1) 称它为等强度设计，似乎会较明确一些。——译者注

可用端头作用有集中荷载的悬臂(图5-25)作为完全应力设计的简单例子。该梁的横截面假设为等宽b而高度h变化的矩形形状。要求保持不变的最大法向应力σ_w。因此，每一横截面处，都必须适合下列方程：

$$\sigma_w=\frac{M}{S}=\frac{6M}{bh^2}=\frac{6Px}{bh^2}$$

所以，支承处梁的高度h_0为

$$h_0=\sqrt{\frac{6PL}{b\sigma_w}}$$

而其它任意截面处的高度为

$$h=\sqrt{\frac{6Px}{b\sigma_w}} \qquad 或 \qquad h=h_0\sqrt{\frac{x}{L}}$$

这最后一个方程表明，梁的高度随x成抛物线变化；因而，该梁具有图5-26所示的大致形状。在加载端处，横截面积为零，因为只考虑由于弯曲产生的法向应力。自然，剪应力还是存在的，梁的横截面实际还必须有足够的面积去传递剪力。

精确的结果　对于矩形横截面悬臂楔(图5-26)，已经用弹性理论方法求出了它的应力。其横截面mn中任一点p处的法向应力和剪应力用下面公式求出(参考文献5-13)：

$$\sigma=-\frac{Pxy\sin^4\theta}{bx^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)} \qquad \tau=\frac{Py^2\sin^4\theta}{bx^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)} \quad (a)$$

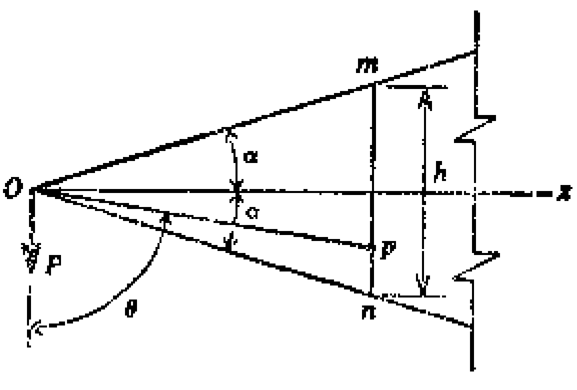


图 5-26　矩形横截面的悬臂楔尖

式中x和y为p点的坐标，θ为Op线与y轴的夹角，b为楔的厚度(假设为常数)，α为用以定义楔的锥度的角。藉考虑截面mn处弯矩$M=Px$，以及在此同一横截面处楔的高

度 $h=2x\text{tg}\alpha$，可使上面诸方程得出较方便的形式。另外，其横截面 mn 的惯性矩为

$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{2bx^3\text{tg}^3\alpha}{3}$$

将 M，h 和 I 的表达式代入方程(a)，我们求出

$$\sigma=-\frac{My}{I}\,\frac{2\tan^3\alpha\sin^4\theta}{3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)} \tag{5-27}$$

$$\tau=\frac{P}{bh}\,\frac{8y^2\tan^3\alpha\sin^4\theta}{h^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)} \tag{5-28}$$

由方程(5-27)所得的法向应力 σ，在中性轴处 $(\theta=\pi/2,y=0)$ 等于零，而在梁的外缘处达到最大值。在梁的顶面处 $(y=-h/2,\ \theta=\alpha+\frac{\pi}{2})$，其应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{Mh}{2I}\,\frac{2\tan^3\alpha\cos^4\alpha}{3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}=\beta\,\frac{Mh}{2I} \tag{5-29}$$

当 α 的值等于0°，5°，10°，15°和 20°，系数 β 的值分别为 1，1.00，0.970，0.947 和0.906。因此，我们看出：对于小的锥形角，根据精确理论所计算的应力与根据梁的公式 $\sigma=My/I$ 计算的应力相差很小。

对于剪应力，我们看出：在中性轴处 $(y=0)$，总是得出 $\tau=0$。最大应力位于外缘处，其值为

$$\tau_{\max}=\frac{P}{bh}\,\frac{2\tan^2\alpha\cos^4\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\gamma\frac{P}{bh} \tag{5-30}$$

当 α 的值等于 0°，5°，10°，15°和 20°时，系数 γ 分别等于 3，3.00，2.91，2.84和 2.72。因此，最大剪应力大约为平均剪应力 P/bh 的三倍，它发生于外缘处。

如果我们将矩形梁中剪应力的近似理论(见方程5-26)用于图 5-26 中所示的楔中，我们对截面 mn 求得：

$$V=P,\quad Q=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right),\quad I=\frac{bh^3}{12},\quad M=Px,\quad \frac{dh}{dx}=\frac{h}{x}$$

将这些表达式放进方程(5-26)，并记作 $y_1=y$，我们得到

$$\tau=\frac{12Py^2}{bh^3} \tag{b}$$

在中性轴处，此方程得出 $\tau=0$，与按方程(5-28)所得的精确结果一致．在外缘处，方程(b)得出 $\tau_{max}=3P/bh$，它与小锥形角时的方程(5-30)颇为接近．因此，我们可得出结论：非棱柱形梁中剪应力的近似理论对于设计来说是适当的．反之，公式 $\tau=VQ/Ib$ 用于非棱形梁，将得出很使人误解的结果。

5.8 组合梁

用一种以上材料所构成的梁称为**组合梁**．这样的例子有：用两种不同金属结合在一起如同一个梁(双金属的梁)一样作用的梁、钢筋混凝土梁以及夹层梁．在分析这种梁时，我们可应用第5.1节中所述的弯曲理论．由于无论梁是否由一种材料制成，弯曲时梁的横截面保持为平面，我们观察到组合梁中梁顶到梁底的应变变化是线性的(见图5-2)．图5-27b用来表示假设由两种不同材料制成的组合梁的应变分布，该梁的横截面示于图5-27a中．起初，横截面的中性轴位置是不知道的，除非横截面为双向对称，此时中性轴位于梁的一半高度处．

作用于横截面上的法向应力可根据应变乘以恰当的材料弹性模量来求得．在图5-27的例子中，假设是两种材料，图中标了1和2，它们的弹性模量分别为 E_1 和 E_2．假设 $E_2>E_1$，这样，我们得出图5-27c中所示的应力图．在距中性轴任一距离 y 处，其法向应力 σ_x 藉下列方程求得(与方程5-5相对照)．对于材料1和材料2，分别为

$$\sigma_{x1}=kE_1y \quad \sigma_{x2}=kE_2y \tag{5-31}$$

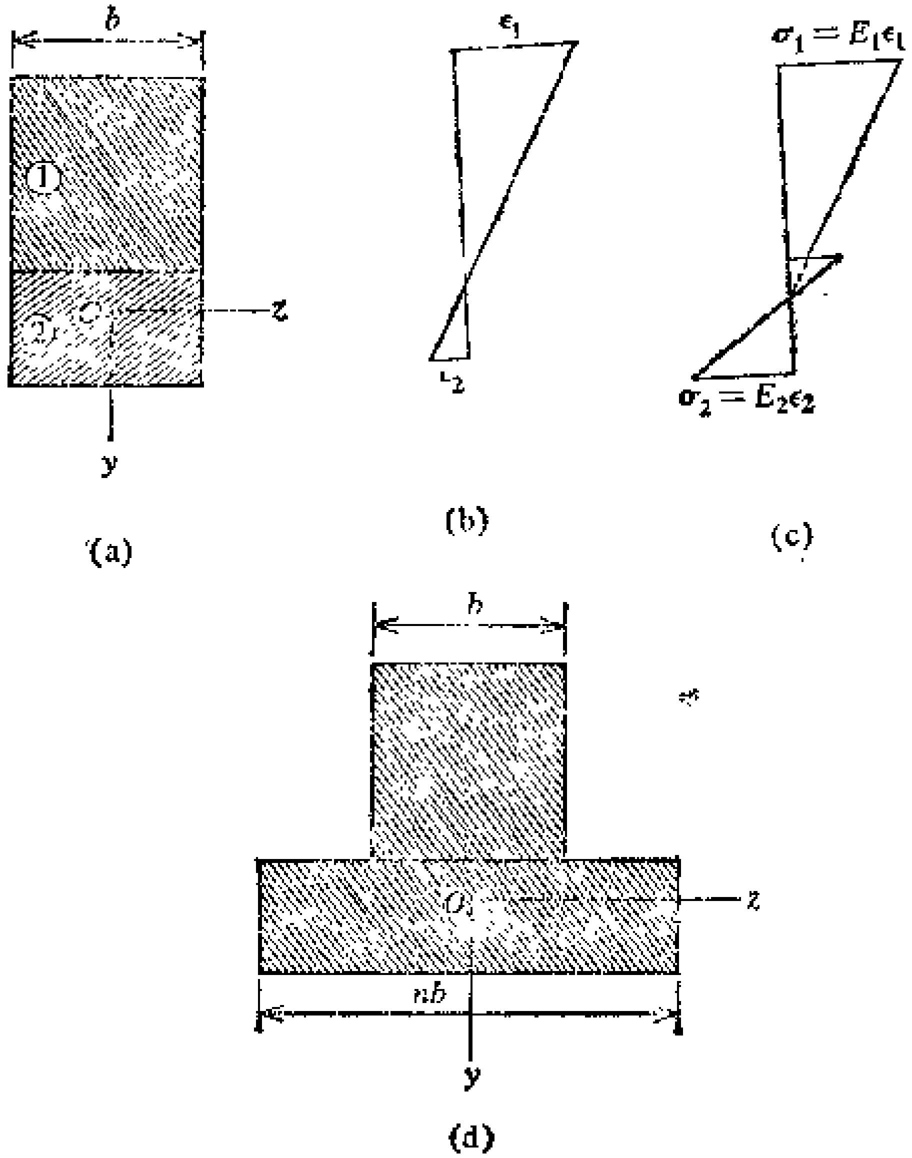


图 5-27 两种不同材料组成的梁
(a)横截面 (b)应变变化 (c)应力变化 (d)变换截面

其中性轴位置可根据作用于横截面上轴向力的合力考虑为零来求得，因此

$$\int_1 \sigma_{x1} dA + \int_2 \sigma_{x2} dA = 0$$

不必说，式中第一个积分是对材料 1 的整个横截面积进行求算，第二个积分是对材料 2 的整个横截面积进行求算。将方程(5-31)的值代替上述方程中的 σ_{x1}和σ_{x2}，我们得出

$$E_1\int_1 y dA + E_2\int_2 y dA = 0 \qquad (5-32)$$

此方程可认为是方程(5-6)的广义形式，它可用来确定图5-27所示梁的中性轴位置。然而，对于由两种以上材料制成的梁，在方程(5-32)中需要增加一些类似的项次。如果我们考虑到其积分是表示横截面各部分面积对中性轴的一次矩，那么该方程在应用上是没有困难的。

梁中弯矩 M 和其应力之间的关系，可藉推导方程(5-7)时所用的相同方法去求得：

$$M=\int \sigma_x y dA=\int_1 \sigma_{x1} y dA+\int_2 \sigma_{x2} y dA$$

$$=kE_1\int_1 y^2 dA + kE_2\int_2 y^2 dA$$

$$=k(E_1 I_1 + E_2 I_2) \qquad (5-33)$$

式中 I_1 和 I_2 分别为面积 1 和面积 2 对中性轴的惯性矩。注意：$I=I_1+I_2$，其中 I 为整个横截面积的惯性矩。合併方程(5-31)和(5-33)，得出成为弯矩 M 的函数的梁中应力：

$$\sigma_{x1}=\frac{MyE_1}{E_1I_1+E_2I_2} \qquad \sigma_{x2}=\frac{MyE_2}{E_1I_1+E_2I_2} \qquad (5-34a, b)$$

第一个方程得出材料 1 中的应力，第二个方程得出材料 2 中的应力。如果 $E_1=E_2=E$，我们发现：这两个方程都简化为用于单一材料的梁的方程 $\sigma_x=My/I$。下面例题将说明组合梁的分析。

例题 1　有一根梁，其横截面尺寸如图 5-28 所示，它承受正弯矩30,000吋·磅。试求梁中两种材料的最大应力和最小应力，假设$E_1=1,000,000$磅/吋^2，$E_2=20,000,000$磅/吋^2。

第一个步骤，确定横截面的中性轴的位置。让我们假设其中性轴位于材料 1 的范围内，如图所示。然后，我们分别以 h_1 和 h_2 表示中性

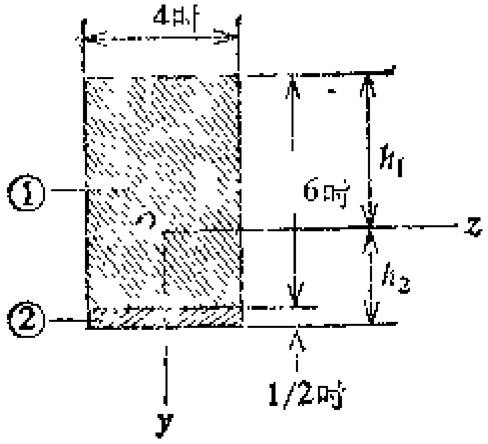


图 5-28 例题 1

轴至梁顶和梁底的距离。根据方程(5-32)，并应用磅和吋为单位，我们看出该方程中的两项为：

$$E_1\int_1 ydA=(1\times10^6)\left[\left(-\frac{h_1}{2}\right)(h_1)(4)+\left(\frac{6-h_1}{2}\right)(6-h_1)(4)\right]$$

$$=24\times10^6(3-h_1)$$

$$E_2\int_2 ydA=(20\times10^6)\left[\left(6-h_1+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(4)\right]$$

$$=10\times10^6(25-4h_1)$$

现将它们代入方程(5-32)，进行求解，我们求出 $h_1=5.03$ 吋，因而确定了中性轴的位置。

对中性轴的惯性矩 I_1 和 I_2 可用平行轴定理来求得：

$$I_1=\frac{1}{12}(4)(6)^3+4(6)(5.03-3.00)^2=171\text{吋}^4$$

$$I_2=\frac{1}{12}(4)\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)(4)(6.25-5.03)^2=3.02\text{吋}^4$$

为了用作校核，我们藉直接计算得到 $I=\left(\frac{1}{3}\right)(4)(5.03)^3+\left(\frac{1}{3}\right)(4)\cdot(1.47)^3=174\text{吋}^4$，它等于 I_1 和 I_2 之和。

材料 1 中的最大压应力发生于梁的顶面，该处 $y=-5.03$吋。这项应力(根据方程5-34 a)为 −653 磅/吋²。在两种材料连接处，材料 1 中的应力(根据方程 5-34 a，按 $y=0.97$ 吋求得) 为 126 磅/吋²，而材料 2 中的应力(根据方程 5-34 b，按相同的 y 值求得) 为 2520 磅/吋²。在梁

的底缘处($y=1.47$ 吋)材料 2 中的应力为 3820 磅/吋^2。

变换截面法 变换截面法提供了分析组合梁的便利方法. 其程序是：将一种以上材料所组成的横截面变换成仅由一种材料组成的等价横截面. 然后，将这种等价截面（称为变换截面）按对于单一材料梁的常用方式进行分析.

如果是等价的话，变换截面必须具有与原来梁相同的中性轴和相同的抵抗力矩的能力. 为了看出变换截面是怎么得出来的，让我们援引方程(5-32)，该方程是用来确定中性轴的位置的. 用 E_1 去除该方程，并引进符号 $n=E_2/E_1$，其中 n 称为模量比，我们得：

$$\int_1 y\,dA+\int_2 yn\,dA=0 \qquad (5\text{-}35)$$

此方程表明：如果材料 2 中每一面积单元 dA 用系数 n 来放大，只要每一个这种面积单元的距离 y 不改变，那么中性轴就没有变化. 换句话说，我们可以认为该横截面由两部分组成：(1)面积 1 处于其原来状态，(2) 面积 2 的宽度增大为 n 倍. 这样，我们得到完全由一种材料组成的(即材料1)新的横截面.

图 5-27 a 中梁的变换截面示于图 5-27 d. 材料 1 保持不变，但材料 2 的宽度增大至 n 倍(注意：图中假设 $n>1$，但是这不是必然的). 现在我们可认为其变换截面（图 5-27 d）全部由材料 1 组成. 从方程(5-35)看出该变换截面的中性轴将位于与原来梁(图 5-27 a)的相同位置处. 此外，变换截面承受弯矩的能力将与原来横截面相同. 这个结论可从下面看出来. 对于该变换截面，我们知 $\sigma_x=kE_1y$，所以：

$$M=\int\sigma_x y\,dA=\int_1\sigma_x y\,dA+\int_2\sigma_x y\,dA$$

$$=kE_1\int_1 y^2dA+kE_1\int_2 y^2dA$$

$$=k(E_1I_1+E_1nI_2)=k(E_1I_1+E_2I_2)$$

此结果与方程(5-33)相同．因此，我们得出结论：在原来梁与变换梁之间，力矩没有变化．

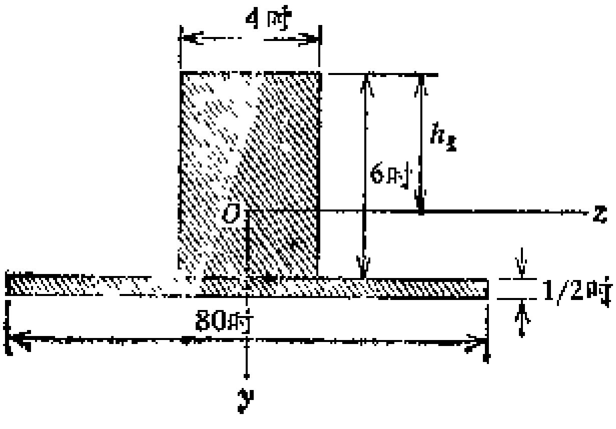
变换截面中的应力可藉通常的应力公式来求得，因为该梁仅由一种材料所组成．这样，其应力为

$$\sigma_{x1}=\frac{My}{I_t}\tag{5-36}$$

式中 I_t 为绕变换截面中性轴的惯性矩 ($I_t=I_1+nt_2$)。方程(5-36)与方程(5-34 a)一致，因此我们得出结论：原来梁中材料 1 的应力与按变换梁所得到的相同。然而，原来梁中材料 2 的应力就不同了．将上述方程(5-36)与方程(5-34 b)比较，表明：变换梁中的应力必须乘以 n 以得到原来梁中的应力．因此，我们得出结论：因为变换截面由材料 1 组成，所以材料 1 中的应力将是“真实”的应力，但是梁中由材料 2 所组成的范围必须通过模量比 n 的应用来变换．

变换截面法可容易地推广到两种以上材料的情况．另外，有可能将梁变换成具有任意 E 值的材料，在这种情况下，梁的所有部分必须合理地变换成所假设的材料．自然，变换为原来材料中的一种是比较简单也是较为习用的，这种在原来材料中的选择是随意的．

例题 2　将例题 1 所述和图 5-28 中所绘的梁，按变换截面法应用全部由材料 1 组成的截面来分析．因此，在变换截面中梁的上部将保持不变(见图 5-29 a)，但其下部的宽度将乘以 $n=E_2/E_1$，在本例中 n 为20。



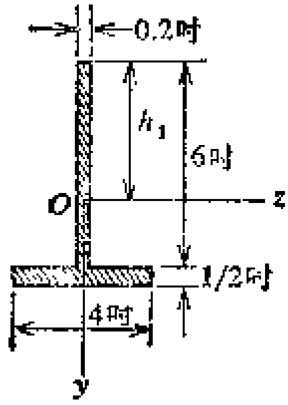


图 5-29 例题 2 和 3

为了确定中性轴的位置，我们必须求出变换截面的形心。计算该面积对梁顶的一次矩，并用总面积去除它，我们得出 h_1 的计算如下：

$$h_1=\frac{4(6)(3)+(80)(6.25)/2}{4(6)+80/2}=\frac{322}{64}=5.03\text{吋}$$

变换截面的惯性矩为

$$I_t=\frac{1}{12}(4)(6)^3+4(6)(2.03)^2+\frac{1}{12}(80)\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)(80)(1.22)^2=231\text{吋}^4$$

变换截面中顶面处、连接处和底面处的应力分别为

$$\sigma=\frac{My}{I_t}=\frac{30,000(-5.03)}{231}=-653\text{磅/吋}^2$$

$$\sigma=\frac{My}{I_t}=\frac{30,000(0.97)}{231}=126\text{磅/吋}^2$$

$$\sigma=\frac{My}{I_t}=\frac{30,000(1.47)}{231}=191\text{ 磅/吋}^2$$

对于材料 1 原来梁中的应力与变换梁中应力相同，但材料 2 则不然。所以，上面所计算的前两个应力得出原来梁中材料 1 相应位置处的应力。对于材料 2，位于连接处和梁的下缘处的应力藉乘以 n 来求得（n 等于 20），因此分别为：

$\sigma=20(126)=2520$ 磅/吋^2 和 $\sigma=20(191)=3820$ 磅/吋^2。所有这些结果与例题 1 求得的相同。

例题 3 为了进一步说明变换截面法，让我们用变换梁为材料 2 再次求解上面的问题。在这种情况下，n 的值将为 1/20。在求变换截面时，我们注意：梁中由材料 2 所组成的部分将无变化，反之，由材料 1 组成的部分，其宽度将用系数 n 去减小(见图 5-29 b)。

现在我们按照上例中的相同步骤得到：

$$h_1=\frac{0.2(6)(3)+(0.5)(4)(6.25)}{0.2(6)+(0.5)(4)}=\frac{16.1}{3.2}=5.03\text{吋}$$

$$I_t=\frac{1}{12}(0.2)(6)^3+0.2(6)(2.03)^2+\frac{1}{12}(4)\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}(4)(1.22)^2$$

$$=11.5\text{ 吋}^4$$

在变换截面中，顶面、连接处和底面的应力分别为：

$$\sigma=\frac{My}{I_t}=\frac{30,000(-5.03)}{11.5}=-13,100\text{ 磅/吋}^2$$

$$\sigma=\frac{My}{I_t}=\frac{30,000(0.97)}{11.5}=2530\text{ 磅/吋}^2$$

$$\sigma=\frac{My}{I_t}=\frac{30,000(1.47)}{11.5}=3830\text{ 磅/吋}^2$$

为了求得原来梁中的应力，材料 1 中的应力必须乘以 n 来进行变换，因此，在顶面处和连接处，我们得：

$$\sigma=-\frac{1}{20}(13,100)=-655\text{磅/吋}^2\text{ 和 }\sigma=\frac{1}{20}(2530)=126\text{ 磅/吋}^2.$$

材料 2 中的应力对原来梁是正确的。

读者或许已经注意到：例题 2 和例题 3 的计算是非常相似的，变换成一种材料与变换成另一种材料相比，没有什么优点。

变换截面法在钢筋混凝土梁的分析中广泛地应用，有兴趣的读者，应阅读有关这种梁的分析的钢筋混凝土设计课本。

夹层梁 夹层梁由位于外侧两块薄的材料层（称为表层）和夹于它们之间的厚芯子所组成(见图 5-30，它表示一种典型的横截面)。其芯子通常为主要供作填充或衬垫用的轻重量、低强度的材料，反之，其表面为高强度材料。夹层构造广泛地用于需要轻重量与高强度相结合，以及需要大刚度的地方。

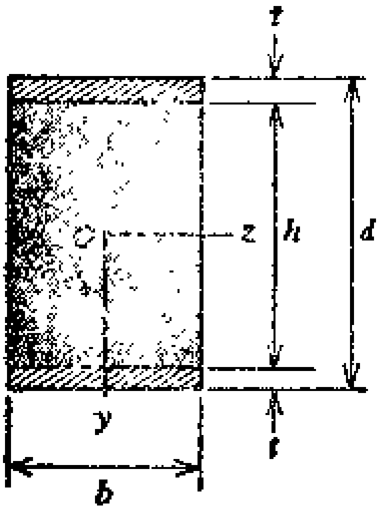


图 5-30 夹层梁

关于夹层梁弯曲的近似理论可根据这样的假定推导出来：其表层承受全部纵向弯曲应力。这种假定是合理的，因为其芯子与其表层相比，顺纵向为低的弹性模量。因此，在梁的最外缘处，法向应力(见图 5-30)为

$$\sigma_x=\frac{Md}{2I_f} \qquad (5\text{-}37)$$

式中 $I_f=bt(h+t)^2/2$ 为表层对 z 轴的惯性矩。因为表层是薄的，其芯子可假设承受全部剪应力。所以芯子中的平均剪应力和剪切应变分别为

$$\tau=\frac{V}{bh} \qquad \gamma=\frac{V}{bhG_a} \qquad (5\text{-}38)$$

式中 V 为剪力，G_a 为芯子材料的剪切模量。

夹层梁的较完整的理论已经研究出来了，例如，表层的弯曲如同单独的梁一样可以加以考虑。对于夹层梁的广泛处理，以及夹层构造的板和壳的分析，见参考文献 5-14。这个参考文献中还包括有该课题的非常完整的参考文献目录。

5.9 弯曲和扭转的组合

结构杆件有时需要同时承受弯曲和扭转荷载，例如，传递扭矩的圆轴是经常承受弯矩又承受扭转力偶作用的。在这种情况下，其应力分析是能够完成的，而且没有任何根本性的困难，只要其应力合力为已知。应力合力可以包括弯矩、扭转力偶和剪力。横截面中任一点处由于每一应力合力产生的应力可用适当的公式来确定。于是所选择点处的全部应力状态可以藉应用第二章中所导得的关系式或藉应用莫尔圆得到研究。具体地说，主应力和最大剪应力可以计算出来。杆件中任意多个关键性的位置可按这种方式得到分析，根据所有这些结果，可以确定设计适当与否，否则需进行新的设计。

为对弯曲和扭转的组合作简单说明，现讨论图 5-31 a 中所示的圆杆. 此悬臂梁承受绕其纵轴的扭矩 T 和横向力 Q 的作用. 在该杆距支承为 x 距离的任一横截面处，其应力合力可藉静力学求得. 这些应力合力为：(1) 等于 $Q(L-x)$ 的弯矩 M，这里 L 为梁的长度，(2) 等于 Q 的剪力 V，(3) 扭转力偶 T. 注意：在此实例中，当梁的顶面产生拉应力时其弯矩假设为正.

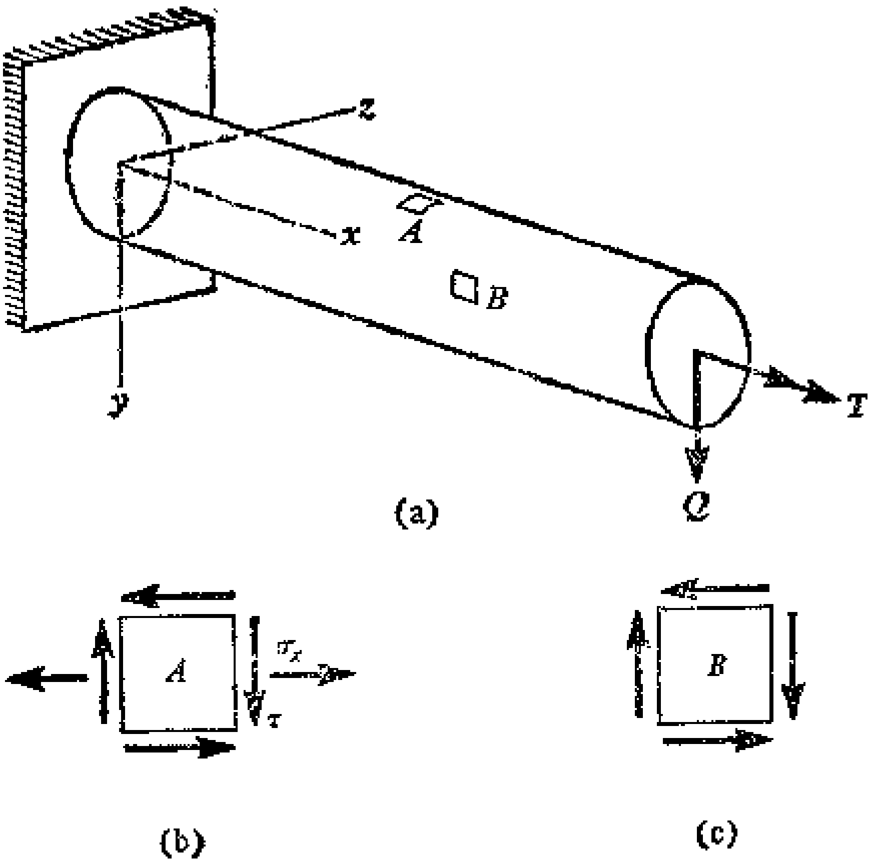


图 5-31 弯曲与扭转组合

如果我们现在考察杆件顶上表面处的一个单元（图中的单元 A），我们看出：该单元将承受由于 M 产生的弯曲应力 σ_x 和由于 T 产生的剪应力 τ（见图 5-31 b）的作用. 这些应力分别根据方程 $\sigma_x=My/I$ 和 $\tau=T\rho/J$ 求得. 对于直径为 d 的圆轴，这些方程成为

$$\sigma_x=\frac{32M}{\pi d^3} \qquad \tau=\frac{16T}{\pi d^3} \tag{5-39}$$

知道 σ_x 和 τ 之后，我们可以确定 A 点处在旋转任一需要角的单元上的应力。

A 点处的主应力根据方程(2-26)求得

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau^2} \tag{5-40}$$

同样，其最大剪应力根据方程(2-28)求得

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau^2} \tag{5-41}$$

对于设计来说，求出以弯矩M和扭矩 T 表示主应力和最大剪应力的表达式是有用的。将方程(5-39)代入方程(5-40)和(5-41)，我们得出

$$\sigma_{1,2}=\frac{16}{\pi d^3}(M\pm\sqrt{M^2+T^2}) \tag{5-42}$$

$$\tau_{max}=\frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2+T^2} \tag{5-43}$$

如果法向应力和剪应力的容许值 σ_w 和 τ_w 为已知，那么就能将它们代入上面两个方程以代替 σ_1 或 σ_2 和 τ_{max}，然后对方程求解出所需要的圆杆直径 d。自然，当单元 A 选于弯矩 M 为最大值的杆子底端处，将得到最大应力。

上述讨论系假设单元选于杆件的顶面处。用类似的方法可以分析杆件底面处的应力。通常最大应力发生于弯曲应力最大处，亦即发生于最大弯矩横截面处的顶面或底面。然而，有时需要讨论其它的可能性。例如，剪力 V（等于Q）在中性轴处产生最大剪应力。所以，我们还必须讨论选于中性轴处杆侧的单元（单元 B）。此单元将处于纯剪状态（图 5-31 c），其剪应力由两部分组成：(1) 由于扭矩 T产生的剪应力，根

据公式 $\tau = T\rho/J$ 求得；(2) 由于 V 产生的剪应力，根据剪力公式 $\tau = VQ/Ib$ 求得。这种单元的主应力发生于与 x 轴[1]成 45°的平面上。这些应力可与对梁顶和梁底处单元所求得的应力进行比较，以便确定用于设计的最大法向应力。梁中最大剪应力也可藉比较单元 A 和单元 B 所得值求出来。

如果梁以较复杂的形式支承着，或者其横截面形状不是圆形者，我们仍然可以分析杆中不同点处的应力，并将它们进行比较。这时，自然选择杆中或是法向应力或是剪应力为最大的点。藉比较最大应力大致已找出的各点处之应力，我们就可以合理地得出确实的绝对最大应力。

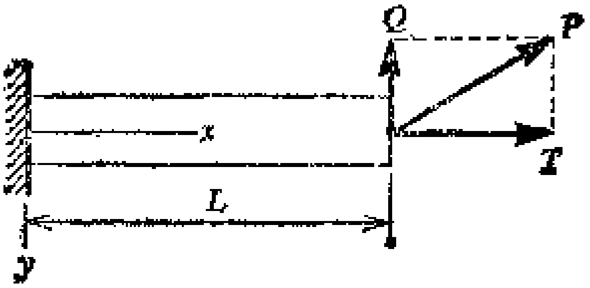
5.10 弯曲和轴向荷载的组合

现在让我们讨论同时承受弯曲荷载和轴向荷载的杆之分析。图 5-32a 中表示这种型式的简单例子。该图描述作用有斜力 P 的悬臂梁。此荷载可以分解为两个分量：横向弯曲力 Q 和轴向力 T。在确定这些力使杆中所产生的应力时，需要区别这样两种可能性：(1) 梁的长度与其高度相比可能相当短，因而该梁就受弯来说是相当刚硬的。杆的横向挠度很小，而仅顺轴向力作用线方向产生不重要的变化。在这种情况下，我们可以得到由于 T 和 Q 彼此独立产生的应力，并将它们叠加起来。(2) 杆件可能相当细长易于弯曲。在这种情况下，其弯曲挠度可能足够大，致使沿力 T 作用线产生变化。于是此力 T 对梁将产生附加弯矩；因此，轴向效应和弯曲效应之间存在相互影响或组合作用[2]。本章将只讨论相当刚硬和符合(1)中所述情况的杆件。

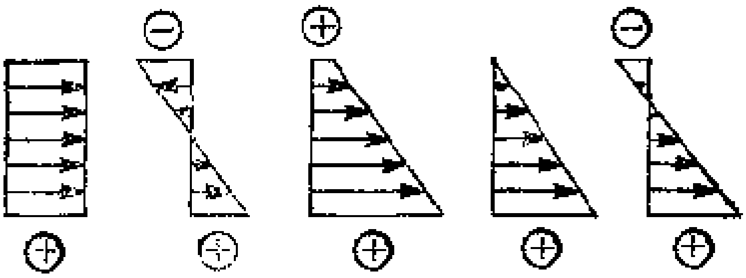
---

1) 原书没有注明 x 轴，这里的 x 一字是译者添加的。——译者注

2) 这后一种情况在第十章关于柱的方面作了讨论，在《高等材料力学》中也作了讨论



(a)



(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

图 5-32　弯曲与轴向荷载组合

图 5-32 a 中梁的任一横截面处的合成应力，是藉叠加 T 所产生的轴向应力和 Q 所产生的弯曲应力而求得. 这些应力的分布分别示于图 5-32 b 和 c 中. 其最终应力示于图 5-32 d 中，它们可根据下列方程求得：

$$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{My}{I} \tag{5-44}$$

式中 N 为所讨论截面处的轴向力，M 为其弯矩. 对于图中的悬臂梁，我们得 $N=T$, $M=Q(L-x)$. 注意当 N 产生拉伸时为正，而 M 则根据梁的正负号规则确定其正值（见图 4-3）. 在这些条件下，方程(5-44)中法向应力 σ 的符号对于拉伸为正，对于压缩为负. 其最终应力的分布取决于方程中诸项的相对代数值. 其分布可以是这样的：整个横截面受拉，如图 5-32 d 所示，或者，其应力分布可能为三角形（图 5-32 e)，或者截面上可能一部分受拉一部分受压（图 5-32 f). 如果轴向力 N 为压力，也可能全部受压. 在弯曲荷载与轴向

荷载组合的所有情况中，显然横截面的中性轴（亦即零应力线）不再通过形心，而且还可能在截面之外。

例题 有一矩形横截面简单梁（宽度为 b，高度为 h），承受如图 5-33 所示荷载的作用。假设距离 $a=2h$，试确定梁中最大的拉应力和压应力。

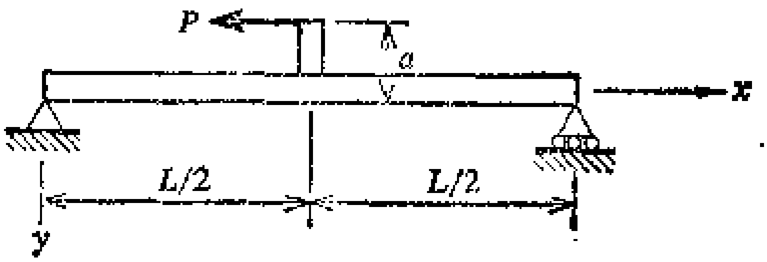


图 5-33 例题

我们首先注意到：弯矩在梁的中点处为最大值，而梁的左半边中的轴向压力等于 P。因此，在距梁的中点左边微小距离的横截面处，其轴向力和弯矩分别为：

$$N=-P \qquad M=\frac{Pa}{2}=Ph$$

所以，我们根据方程(5-44)求出梁的底面和顶面处（分别按 $y=h/2$ 和 $y=-h/2$）的应力为

$$\sigma_b=-\frac{P}{bh}+\frac{6P}{bh}=\frac{5P}{bh} \qquad \sigma_t=-\frac{P}{bh}-\frac{6P}{bh}=-\frac{7P}{bh}$$

类似地，在紧邻梁中点右边的横截面处（该处 $M=-Ph$ 而 $N=0$），其应力为

$$\sigma_b=-\frac{6P}{bh} \qquad \sigma_t=\frac{6P}{bh}$$

比较这些不同的应力，我们看出：梁中最大拉应力为 $6P/bh$，最大压应力为 $-7P/bh$。

偏心轴向力 当杆承受偏心作用的轴向荷载时（见图

5-34)，发生一种实用上所关心的特殊情况. 偏心力的作用与施加于形心处的力 P 加上弯曲力偶 Pe 是等效的. 因此，横截面中任一点处的应力为

$$\sigma=\frac{P}{A}+\frac{Pey}{I} \tag{5-45}$$

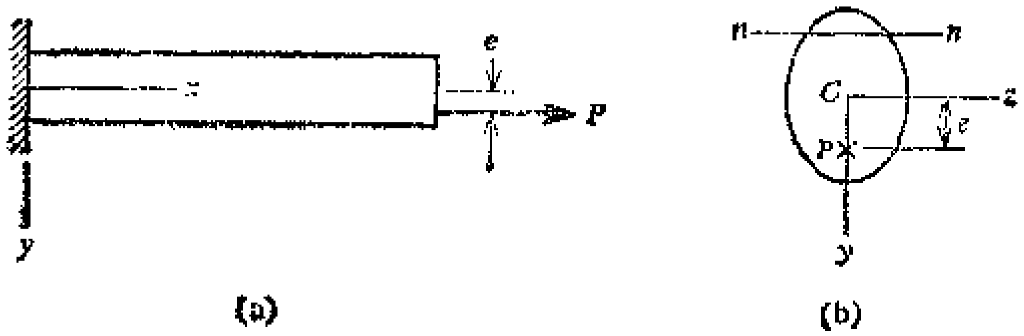


图 5-34

其中性轴方程(图 5-34 b 中 nn 线)可藉令方程(5-45)中的 σ 等于零来求得，这样：

$$y=-\frac{I}{Ae} \tag{5-46}$$

为零应力线方程. 此方程中的负号表明：当荷载 P 为作用于 z 轴以下的拉力时，中性轴位于 z 轴之上. 如果偏心 e 减小，中性轴则远离形心；如果 e 加大，中性轴将靠近形心.

当偏心拉力 P 的作用点不在横截面两个主轴的任一主轴上时，则将同时对二主轴弯曲. 以 e_y 和 e_z 代表 P 的作用点的坐标(见图 5-35 a)，我们看出：绕 y 和 z 轴的弯矩在数值上分别等于 Pe_z 和 Pe_y. 横截面中任一点处(用坐标 y 和 z 所定义的一点)的合成法向应力 σ 则为

$$\sigma=\frac{P}{A}+\frac{Pe_zz}{I_y}+\frac{Pe_yy}{I_z} \tag{5-47}$$

式中 I_y 和 I_z 为分别对 y 轴和 z 轴的惯性矩. 当 P 位于 y 轴上而 e_z 等于零时，此方程简化为方程(5-45). 另外，中性

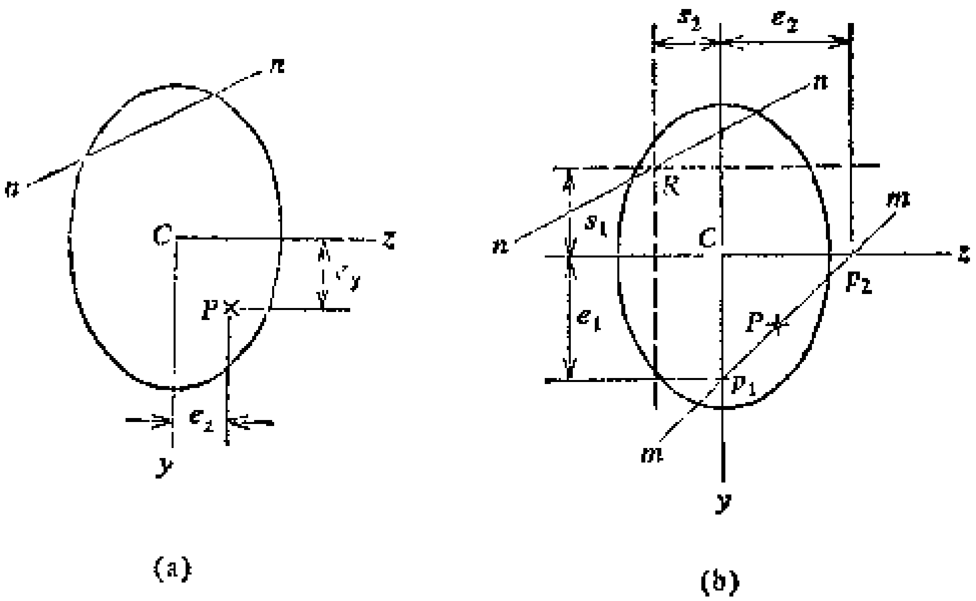


图 5-35 偏心轴向力对二主轴产生弯曲

轴的方程可藉令 σ 等于零来求得，其方程为

$$\frac{Ae_y}{I_z}y+\frac{Ae_z}{I_y}z+1=0 \tag{5-48}$$

该式为 y 和 z 的线性方程，因而其中性轴为一直线．如图 5-35 a 中的 nn 线．此线可以与截面相交也可以不相交，取决于横截面的形状和轴向力 P 的作用点位置．nn 线与 y 轴和 z 轴的交点可藉分别令方程(5-48)中的 z 和 y 等于零，对其交点进行求解来获得．

力 P 的作用点与中性轴位置之间存在一种有趣的关系，就是：当力 P 沿任一直线 mm 移动时，其中性轴绕固定点 R 旋转(见图 5-35 b)．为了说明这个事实，我们首先观察力 P 可以分解为作用于 p_1 处和另外作用于 p_2 的两个平行分力．p_1 处的分力作用于弯曲主平面内，因此，相应的零应力线平行于 z 轴，且离 z 轴的距离 $s_1=\frac{I_z}{Ae_1}$（见图 5-35 b 和方程 5-46)．类似地，p_2 处的分力产生绕 y 轴弯曲，其零应力线位于离 y 轴的距离 $s_2=\frac{I_y}{Ae_2}$处．位于图中两条虚线交点处的 R 点，总是位于

中性轴 nn 上，当荷载的两个分力同时作用时它就存在。因此，当荷载 P 沿 mm 线移动时，B 点保持其位置固定，而且中性轴总是通过它。

横截面的核心　当所作用的轴向荷载 P 的偏心（图 5-34）很小时，其中性轴将位于横截面之外。这意味着整个横截面上的法向应力将具有同样的正负号。当在抗拉很弱的材料上（如陶土材料或混凝土）作用压缩荷载时，这种情况往往是很重要的。在这种情况中，需要保证其横截面中任何一点都不产生拉伸。围绕着形心有一很小区域，当压缩荷载 P 作用于此区域以内时，整个横截面将产生压应力。这个区域称为截面的核心。

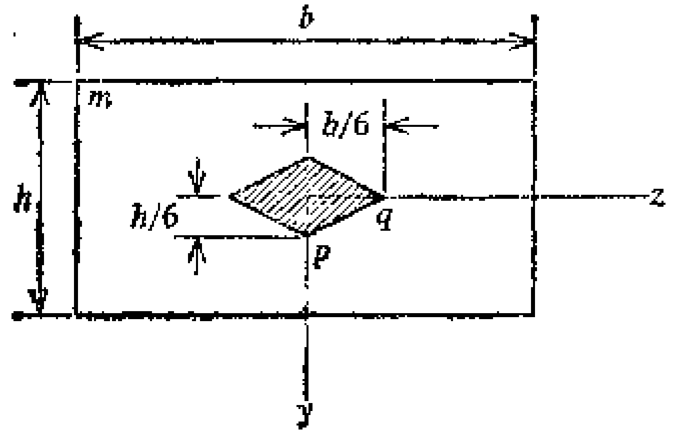


图 5-36　矩形横截面的核心

矩形横截面的核心可按下列方法求出。如果荷载位于正的 y 轴上（图 5-36），当荷载处于离形心距离为 e_1 的 p 点上时，其中性轴将与该截面的顶缘相重合。此距离 e_1，可根据方程（5-46），代入 $y=-h/2, I=bh^3/12$ 和 $A=bh$ 来求出，因而 $e_1=h/6$，如图所示。用同样方式，当荷载 P 作用于正的 z 轴上离形心距离为 $b/6$ 的 q 点处时，其中性轴与截面左缘相重合。当荷载沿 p 和 q 点之间的直线移动时，其中性轴将绕矩形横截面角点 m 旋转。因此，pq 线为核心的一条边。其它三条边可藉对称性来确定，而且我们看出，其核心为对角线等于 $b/3$ 和 $h/3$ 的菱形。只要压缩荷载 P 的作用点在此菱形以内，其中性轴就不与横截面相交，而且整个截面将处于受压状态。其它形状的横截面核心可用对于矩形所

述的相同方法来求得[1]。

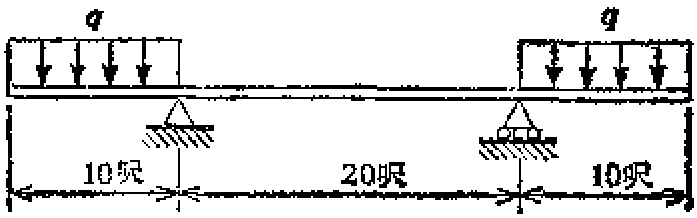
习 题

5.1-1 当直径 $d=1/32$ 吋的钢丝绕直径为 20 吋的滑轮卷线时，确定该钢丝中产生的最大应力($E=30\times10^6$磅/吋^2)。

5.1-2 有一横截面尺寸为 1/32 吋 ×1 吋、长度 $L=10$ 吋的薄钢尺($E=30\times10^6$磅/吋^2)，由于端点处力偶作用弯成中心角为 60° 所张的圆弧。试问尺中最大应力是多少？

5.1-3 有一根 10 吋 ×10 吋方形横截面的木梁，所承受的荷载和支承的情况如图 5-5 所示。如果 $L=6$ 呎，$a=1$ 吋，$E=1.5\times10^6$ 磅/吋^2，而且梁中的最大容许应力 $\sigma_w=1000$ 磅/吋^2，试确定其容许荷载 P 和跨中处的挠度 δ。

5.1-4 有一带有挑臂端的梁（见图），在每一挑臂上承受强度 $q=10$ 千磅/呎的均匀荷载。假设该梁的截面为 W 30×172，$E=30\times10^6$磅/吋^2，试确定梁中最大法向应力和中点向上的挠度。



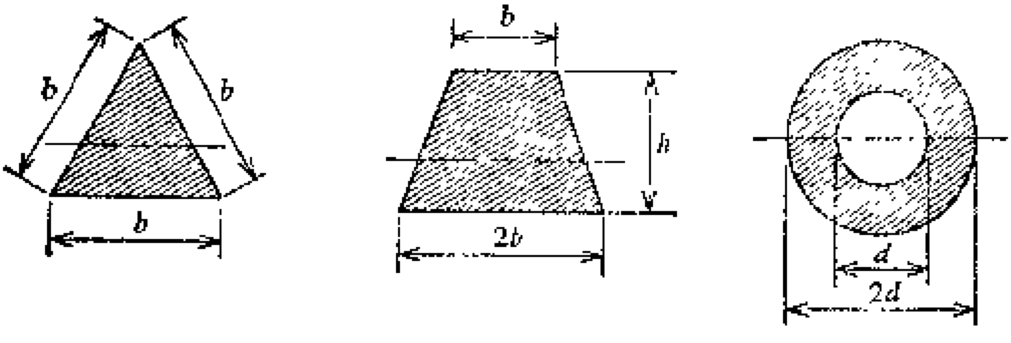
习题 5.1-

5.1-5 如果容许应力(拉力或压力)为 σ_w，试问图中所示每一种横截面能承受的最大弯矩 M_{max} 是多少？

5.1-6 试确定矩形横截面简支梁(跨长为 L)在沿其截面高度 h 承受非均匀加热时的曲率 k 和最大挠度 δ。假设梁顶面的温度为 T_1，梁底面的温度为 $T_2(T_2>T_1)$，而顶面与底面之间温度呈直线变化(材料的热膨胀系数为 α，弹性模量为 E)。

5.1-7 有一跨长 $L=14$ 呎的简单梁，承受强度 $q=250$ 磅/呎的均匀荷载。如果梁为宽度 $b=5\frac{5}{8}$吋、高度 $h=7\frac{5}{8}$吋的矩形横截面，

1) 横截面核心的概念是 Bresse 于 1854 年提出的(见参考文献 5-15)。

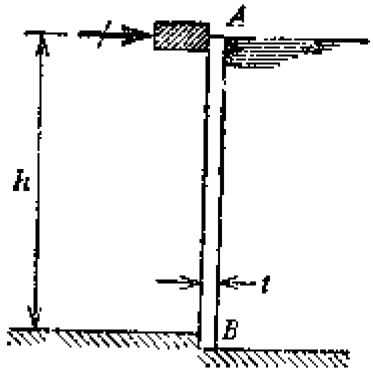


(a) (b) (c)

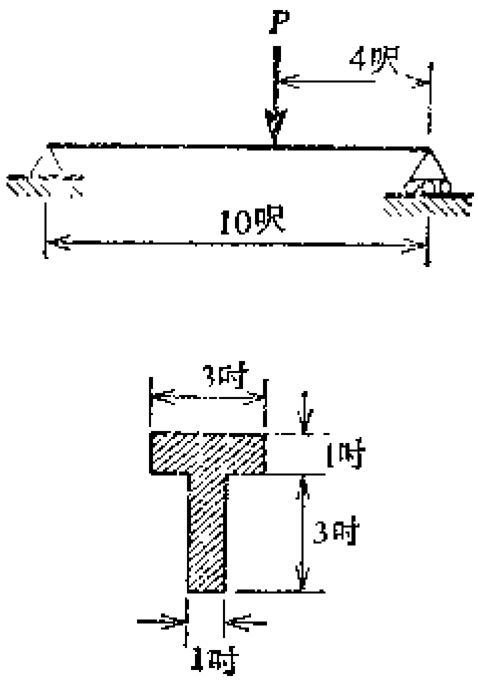
习题 5.1-5

试计算最大弯曲应力。

5.1-8 有一高度 $h=18$ 呎的木闸（见图），由厚度 $t=12$ 吋、上下端简支柱的竖直梁 AB 所构成。假设水的单位重为 62.4 磅/呎^3，试确定梁中最大弯曲应力。



习题 5.1-8



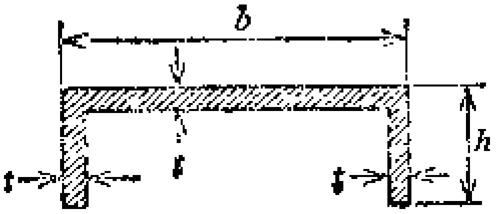
习题 5.1-9

5.1-9 试确定图中所示简单梁由于弯曲产生的最大法向应力，假设 $P=1200$ 磅，其横截面尺寸示于略图中。

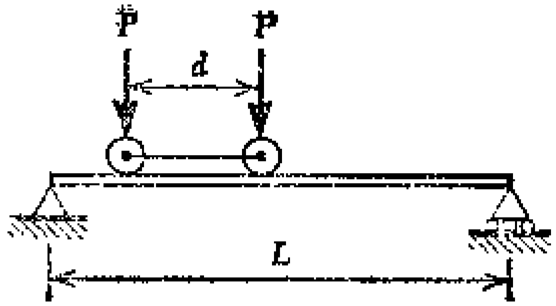
5.1-10 有一槽形梁，其横截面形状如图所示，该梁的端头为简支，梁的中点作用有集中力 P。如果挠曲时容许拉应力为 20,000 磅/

吋^2，容许压应力为 12,000 磅/吋^2，试确定其容许荷载 P（假设 $b=24$ 吋，$h=10$ 吋，$t=2$ 吋，$L=10$ 呎）。

5.1-11　有一简单梁承受两个相互距离 $d=6$ 呎的轮载（见图）。每一轮传递荷载 $P=3$ 千磅，车架可位于梁上任一位置处。跨度 $L=24$ 呎。如果它为 $S\ 8\times23$ 型截面，试确定梁中最大弯曲应力。

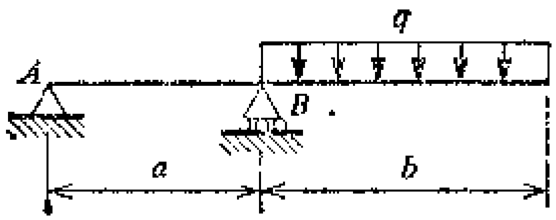


习题 5.1-10



习题 5.1-11

5.2-1　有一圆截面木梁，支于 A 处和 B 处，沿其挑臂作用有 $q=300$ 磅/呎的均匀荷载（见图）。如果 $\sigma_a=1200$ 磅/吋^2，$a=3$ 呎，$b=6$ 呎，试确定所需要的直径 d。梁的重量略去不计。

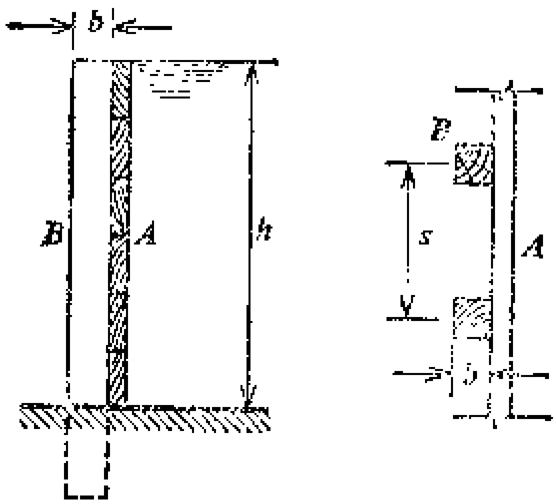


习题 5.2-1

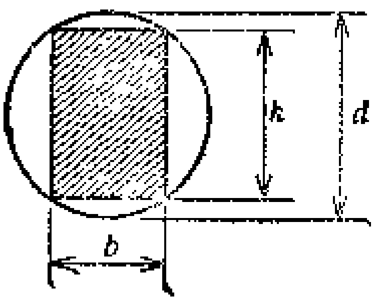
5.2-2　有一由下端嵌固的竖直梁 B 与被它所支承的水平板组成的木坝（见图），如果水深 $h=6$ 呎，梁的间距 $s=3$ 呎，$\sigma_a=500$ 磅/吋^2，试确定竖直梁方形截面所需尺寸 b。

5.2-3　有一矩形木梁，是由直径为 d 的圆木切割而成（见图）。试问为了得出最强的梁，其尺寸 b 和 h 应为多少？

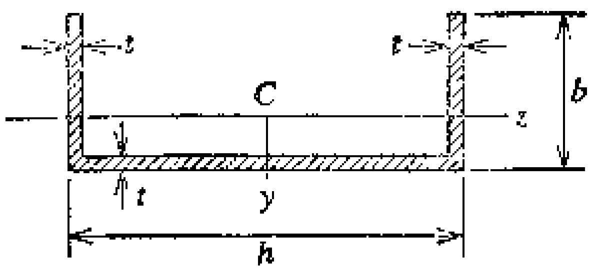
5.2-4　有一槽形横截面梁（见图），承受绕 z 轴的弯矩作用。如果 $b=3$ 吋，$h=8$ 吋，试问为使该截面顶面和底面的弯曲应力比为 3:1 时，所需 t 的厚度是多少？



习题 5.2-2



习题 5.2-3



习题 5.2-4

5.2-5　根据附录 C 中的表选择承受图 5-1 a 所示荷载的宽翼缘梁。假设 $P=8000$ 磅，$a=6$ 呎，$\sigma_w=20,000$ 磅/吋²，梁重忽略不计。

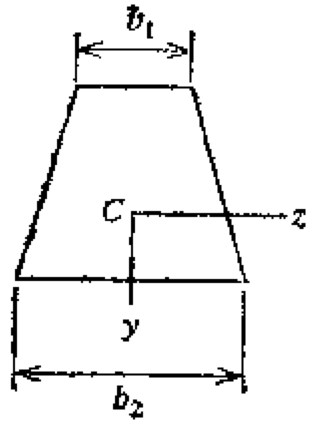
5.2-6　(a) 有一长度为 15 呎的简单梁，承受了均匀荷载 400 磅/呎和作用于中点处的集中荷载 4000 磅，试确定所需的截面模量。假设 $\sigma_w=16,000$ 磅/吋²，梁的重量略去不计。(b) 根据附录中的表，加上梁的重量，选择适当的宽翼缘梁。

5.2-7　(a) 有一悬臂梁，承受均匀荷载 $q=200$ 磅/呎和作用于自由端处的集中荷载 $P=500$ 磅，如果 $L=5$ 呎，$\sigma_w=15,000$ 磅/吋²，试确定该梁所需截面模量 S。梁重略去不计。(b) 根据附录中表 C-2，加上梁的重量，选择适当的 I 梁。

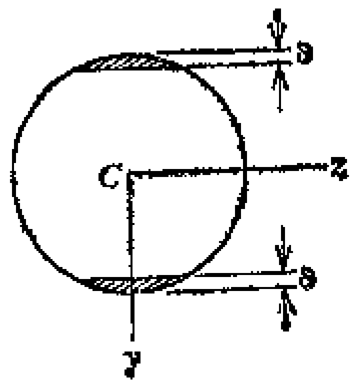
5.2-8　假如第一根梁为实心圆形截面(直径为 d_1)，第二根梁为外径等于 d_2 的圆管，试确定这两根横截面积相同的梁之截面模量比 S_2/S_1。

5.2-9　有一具有梯形横截面的纯弯棱柱形梁(见图)，其顶面受压。如果容许资用拉应力和资用压应力之比为 $\sigma_t/\sigma_c=\beta$，试求算最小重量时其上下边的比值。

5.2-10　有一圆形横截面(d=直径)的梁，绕 z 轴弯曲(见图)。从梁上切掉高度为 δ 的微小阴影部分，以便增大它的截面模量。试求使截面模量为最大时的 δ 值。

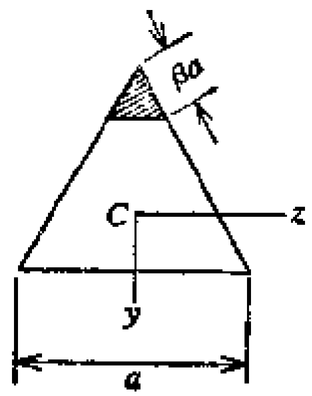


习题 5.2-9



习题 5.2-10

5.2-11　试确定从等边三角形(见图)横截面中切除一部分使它成为受弯时最强横截面的系数 β。



习题 5.2-11

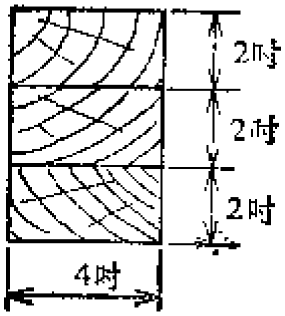
5.3-1　从应用矩形梁剪应力 τ 的表达式(方程 5-19)着手，藉对整个横截面积分来证明其合成剪力等于 V。

5.3-2　试确定承受均匀荷载 q=1000 磅/呎的简单梁的最大剪应力，假设梁长为 6 呎，其横截面为宽度 b=8 吋、高度 h=10 吋的矩形截面。

5.3-3 有一矩形截面（宽度 $b=6$ 吋，高度 $h=10$ 吋）的简支木梁，中点处承受集中荷载 P。如果 $\sigma_w=1000$ 磅/吋^2，$\tau_w=160$ 磅/吋^2，跨长 $L=4$ 呎，试问容许 P 值为多少？

5.3-4 试确定习题 5.1-8 中竖直梁 AB 的最大剪应力。

5.3-5 有一根由三块 2 吋×4 吋的木板胶合成横截面为 4吋×6 吋的实心迭层木梁，如图所示。其胶合处容许剪应力为 50 磅/吋^2。如果它为 3 呎长的悬臂梁，试问自由端处的容许荷载 P 为多少？相应的最大弯曲应力为多少？



习题 5.3-5

5.3-6 求算宽翼缘梁腹板（图 5-14 a）中的最大剪应力，假设 $b=5$ 吋，$t=0.5$ 吋，$h=12$ 吋，$h_1=10.5$ 吋，$V=30,000$ 磅。将这些结果与用腹板面积去除 V 所得的近似应力相比较。

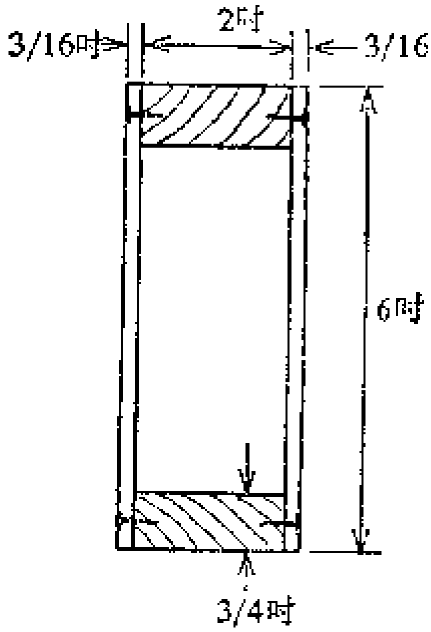
5.3-7 计算习题 5.1-4 中梁内最大剪应力。

5.3-8 确定习题 5.1-9 中梁内最大剪应力。

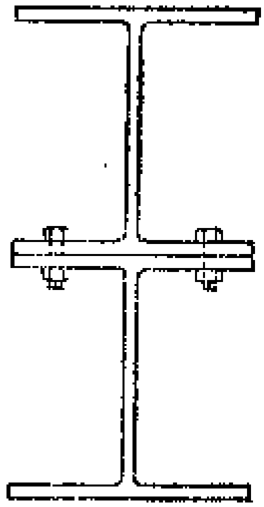
5.5-1 有一焊接板梁，其横截面如图 5-17 b所示，由两块 1吋×10 吋翼缘板和 0.5 吋厚、24 吋高的腹板所组成。如果该梁承受的总剪力为 150,000 磅，试问每一边焊接处必须传递多少力（每吋焊接长度）？

5.5-2 有一根带有胶合腹板的木梁，其横截面如图所示。胶合板用受剪容许承载力为 20 磅的小钉与上下翼缘板连接起来。试求在剪力为 100 磅和 200 磅的截面处钉的最大容许间距。

5.5-3 两根 W 10×25 截面的钢梁（见附录 C）用螺栓连在一起形成单根梁，如图所示。如果 $V=20$ 千磅，每一螺栓的受剪容许荷载为 3.1 千磅，试问最大容许螺栓间距是多少？



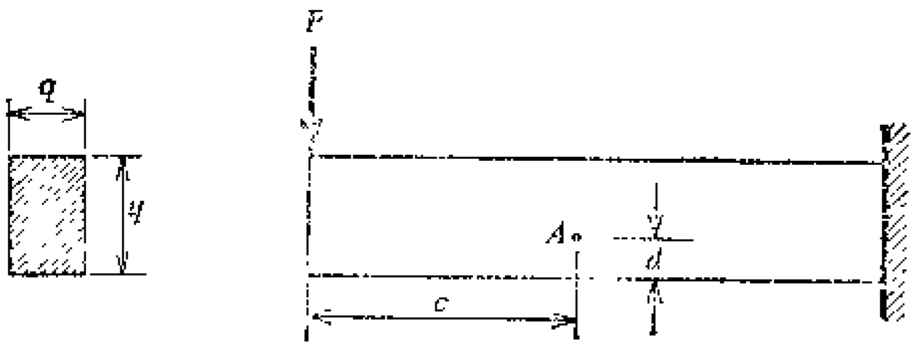
习题 5.5-2



习题 5.5-3

5.5-4 有一木制箱梁，按图 5-18 所示的相似方式构成．只是其顶面和底面木板的横截面为 1 吋×8 吋（实际尺寸），而两边杆件为 2 吋×8 吋．如果钉的纵向间距 $s=6$ 吋，每一个钉的容许剪力为 600 磅试求其横截面能承受的容许剪力 V.

5.6-1 有一矩形横截面悬臂梁，其自由端承受集中荷载 P（见图）．试确定 A 点处的主应力，并将它们表示于适当定向的单元草图上．假设 $b=4$ 吋，$h=10$ 吋，$P=1000$ 磅，$c=2$ 呎，$d=3$ 吋.



习题 5.6-1

5.6-2 按 $b=4$ 吋，$h=8$ 吋，$P=2000$ 磅，$c=3$ 呎和 $d=6$ 吋的情况求解上一习题.

5.6-3 有一矩形横截面（宽度为4吋，高度为8吋）简单梁，在10呎跨度上承受均匀荷载1000磅/呎。试求距左边支承1呎处截面中的下列主应力：(a)中性轴处，(b)中性轴以上2吋处，(c)梁的顶面处。

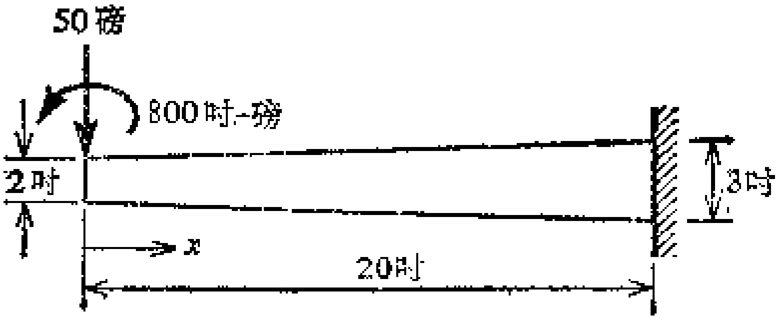
5.6-4 有一宽翼缘截面梁（见图5-14a），其尺寸如下：$b=5$吋，$t=0.5$吋，$h=12$吋，$h=10.5$吋。梁为简支、跨长$L=10$呎，承受的均匀荷载$q=6$千磅/呎。研究距左边支承3呎处横截面中梁内的主应力。讨论下面位置处的应力：(a)底表面处，(b)下翼缘与腹板连接处，(c)中性轴处。

5.7-1 试求图5-24中所示悬臂梁由于弯曲所产生的最大法向应力，假设$d_b/d_a=3$。将此应力与支承处最大应力σ_b进行比较。

5.7-2 试问d_b/d_a之比在什么值的时候，图5-24所示悬臂梁中的最大法向应力发生于支承处？

5.7-3 有一方形横截面锥形悬臂梁，受到自由端点处集中荷载P的作用。该梁的宽度和高度按直线从自由端的h变到距固定端为$2h$。梁的长度为L。试确定由于弯曲所产生的最大法向应力。

5.7-4 有一矩形横截面的锥形悬臂梁，承受图中所示荷载。梁的宽度为常数，且等于1吋，而其高度从加载端的2吋按直线变至支承处的3吋。(a)计算由于弯曲所产生的最大法向应力，(b)计算支承处的最大剪应力和最小剪应力。



习题 5.7-4

5.7-5 有一矩形横截面的悬臂梁，其高度h不变，而宽度b改变，该梁在自由端处承受集中荷载P的作用。试问为了使该梁成为全应力的梁，其宽度b作为x的函数应如何变化（x自梁的自由端度量）？只考虑由于弯曲所产生的法向应力，并假设最大容许应力为σ_w。

5.7-6　图 5-25 中所示悬臂梁应该成为什么样的形状以使它成为全应力设计？假设它承受均匀荷载 q 作用以代替原图的集中荷载。仅考虑由于弯曲产生的法向应力，并假设最大容许应力为 σ_w。

5.7-7　有一矩形横截面的简单梁(长度 $=L$)，其宽度 b 不变，而高度 h 变化，该梁承受可沿着梁作用于任何位置处的集中荷载 P，试问其高度应如何作为 x(自梁的中点度量)的函数而变，以使之成为全应力梁？仅考虑由于弯曲产生的法向应力，并假设其容许应力为 σ_w。

5.8-1　有一长度为 10 呎的简支梁，跨度中点处承受荷载 $P=1000$ 磅。该梁是由木梁(4 吋宽、6 吋高)和底面用 1 吋宽 0.5 吋厚的钢杆加强而构成。该钢杆 1 吋的这一侧面与木梁相接触，而而梁的两部分合成后的高度为 6.5 吋。如果木材的 $E_w=1.5\times10^6$ 磅/吋^2，钢的 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2，试求梁的这两部分中的最大应力。

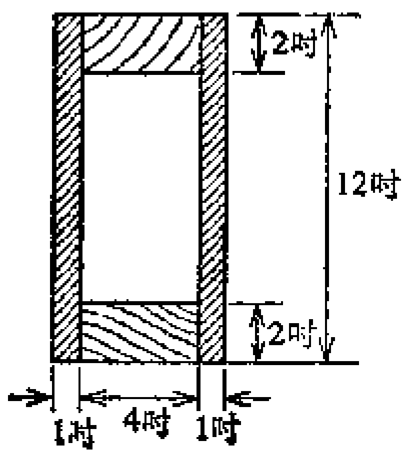
5.8-2　有一组合梁，由宽 6 吋、高8吋的木梁于底面处用 $\frac{1}{2}$ 吋 × 6 吋钢板加强构成。木材的弹性模量 $E_w=1.5\times10^6$ 磅/吋^2，而钢 $E_s=30\times10^6$ 磅/吋^2。如果木材的容许应力 $\sigma_w=1200$ 磅/吋^2，而钢 $\sigma_s=16,000$ 磅/吋^2，试求出梁的容许弯矩。

5.8-3　有一宽 8 吋、高 12 吋的木梁，其顶面和底面用 $\frac{1}{2}$ 吋 × 8 吋钢板加强。如果木材的容许应力为1200磅/吋^2，而钢为16,000磅/吋^2，试求梁的容许弯矩。假设钢和木材的弹性模量之比为 20。

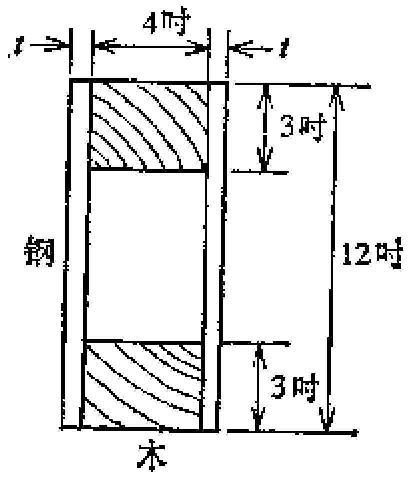
5.8-4　有一箱形梁，由道格拉斯枞木胶合板的腹板和红木的翼缘所构成，如图所示。胶合板厚 1 吋，宽 12 吋。红木翼缘为 2 吋 × 4 吋(实际尺寸)。胶合板的弹性模量为 1,600,000 磅/吋^2，而红木为 1,200,000 磅/吋^2。如果胶合板的容许应力为 2000 磅/吋^2，红木为1700 磅/吋^2，试求梁的容许弯矩。

5.8-5　有一跨长 11 呎的简单梁，承受 3200 磅/呎的均匀荷载。梁的横截面如图所示。如果钢的容许应力为 18,000 磅/吋^2，木材的容许应力为 1200 磅/吋^2，试问钢板需要的厚度是多少？假设钢和木材的弹性模量分别为 30×10^6 和 1.5×10^6 磅/吋^2。

5.8-6　图中表示了双金属窄条的横截面。假设 $E_a=42\times10^6$ 磅/



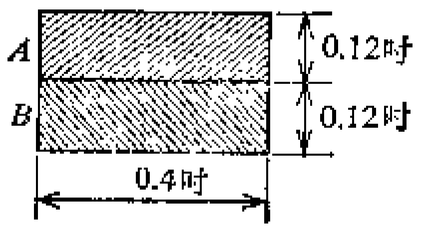
习题 5.8-4



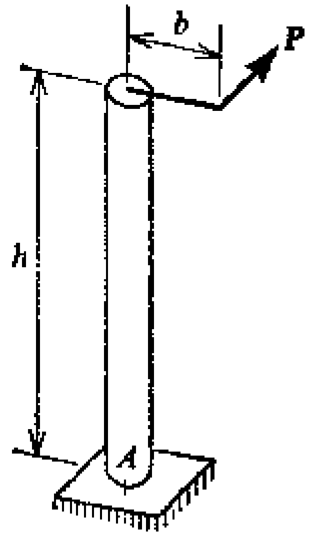
习题 5.8-5

吋^2 和 $E_b=21\times10^6$磅/吋^2，试确定梁的较小截面模量，亦即弯矩与最大弯曲应力之比。

5.9-1 有一空心圆截面柱，承受作用于离柱轴距离 $b=3$ 呎 的水平力 $P=250$ 磅(见图)。柱的高度 $h=25$ 呎，其截面模量 $S=10$ 吋^3. 试求 A 点处柱中的主拉应力和最大剪应力（见图）．A 点是弯曲单独作用时法向应力为最大的地方。



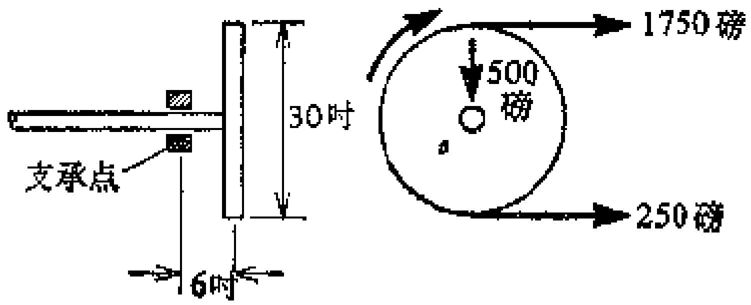
习题 5.8-6



习题 5.9-1

5.9-2 有一直径为 2.5 吋的轴，传动直径为 30 吋、重量为500磅的皮带轮(见图)．皮带的拉力(水平）为 1750 磅和 250 磅，试确定轴承处轴中的主拉应力和最大剪应力，轴承距离皮带轮为 6 吋。（提示：

组合竖直和水平荷载使之成为一个斜向作用的合力．然后将此力所产生的应力与由于扭矩所产生的应力组合起来)．

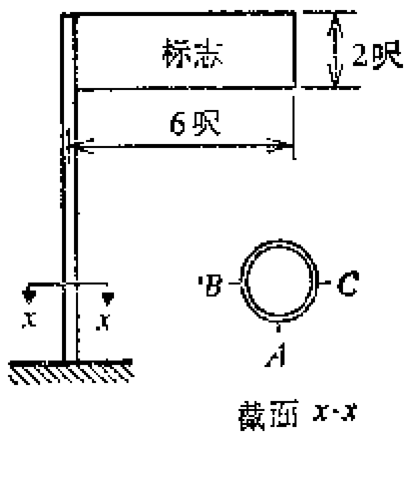


习题 5.9-2

5.9-3　图 5-31 a 中所示实心圆杆承受力 $Q=2000$ 磅、扭矩 $T=8000$ 吋·磅．杆的半径为 4 吋．计算该杆顶面 A 点处的主应力，假设从 A 点到杆的加载端的距离为 50 吋．

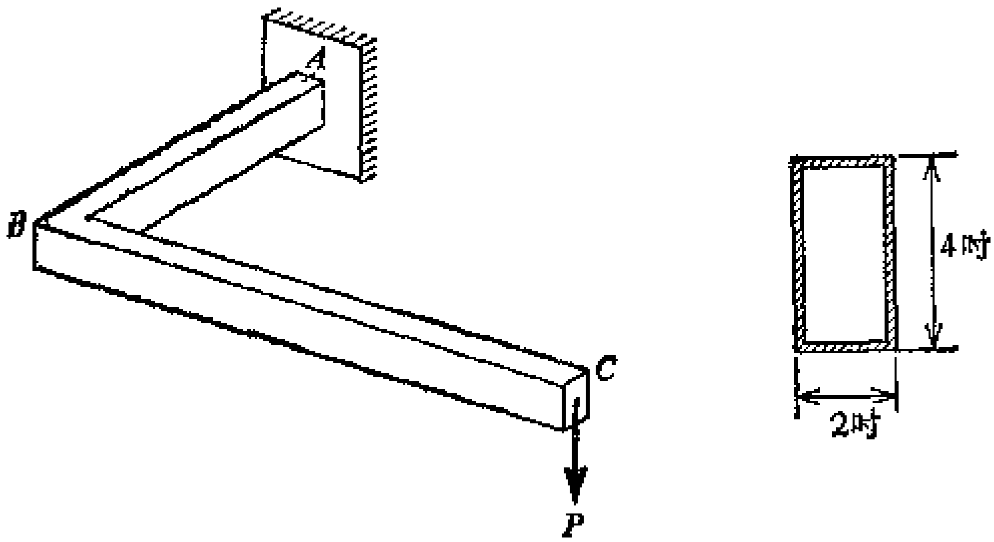
5.9-4　有一外径为 2 吋的空心管，极惯性矩等于 0.64 吋^4，其支承如图 5-31 a 所示．作用的扭矩 $T=1800$ 吋·磅，横向荷载 $Q=100$ 磅．试求其顶面 A 点处的主应力和最大剪应力，假设从 A 点到杆的加载端的距离为 36 吋．

5.9-5　作用于标志牌上的风压力为 20 磅/呎^2，该标志牌支于外径为 4 吋、内径为 3.5 吋的圆管上(见图)．标志牌的尺寸为 6 呎×2 呎，其底缘高出基底面 7 呎．试确定由于风压使管底 A、B 和 C 位置上引起的最大剪应力．



习题 5.9-5

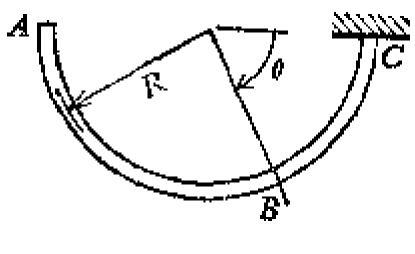
5.9-6　有一 L 形托架，水平置放，承受荷载 $P=360$ 磅(见图)。该托架的截面形式为外面尺寸为2吋×4吋的空心矩形，其壁厚为0.080吋。臂 AB 的长度为10吋，BC 的长度为20吋，试求支承处托架顶面 A 点上的主应力。



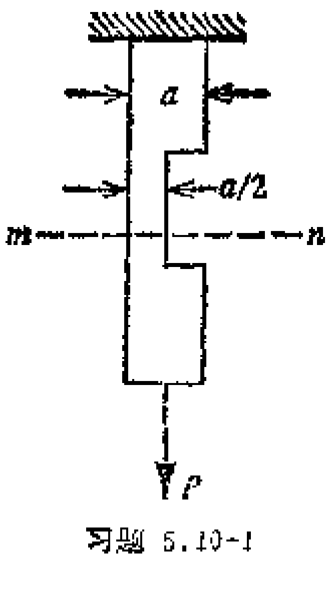
习题 5.9-6

5.9-7　有一半圆杆 ABC，置于水平面内，支于 C 点处(见图)。该杆的半径为 R，单位长度的重量为 q (杆的总重量等于 πqR)。试求以 θ 角所定义的截面 B 处的弯矩 M、剪力 V 和扭转力偶 T 的公式。

5.10-1　有一方形截面杆，在图中所示 mn 截面处其截面积减小一半。试求由于力 P 的作用在减小截面处的最大拉应力和压应力。



习题 5.9-7

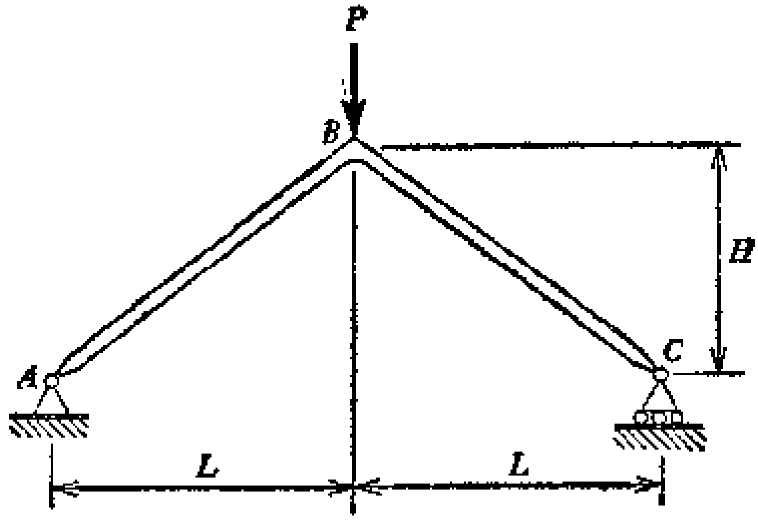


习题 5.10-1

5.10-2　求解上一习题，假设该杆为圆形横截面.

5.10-3　有一圆柱形塔，高为 h，内径为 d_1，外径为 d_2，有微小倾斜. 试问与竖直线所成最大容许斜角 α 为多少时才使塔中不产生拉力(只考虑塔的自重这一项荷载).

5.10-4　有一框架 ABC，由两根钢管焊接于 B 处. 每一根管的横截面积 $A=16.10$ 吋^2，惯性矩 $I=211.9$ 吋^4，其外径 $d=10.75$ 吋. 如果 $P=3000$ 磅，$L=8$ 呎，$H=6$ 呎，试求框架中的最大的拉应力和压应力.



习题 5.10-4

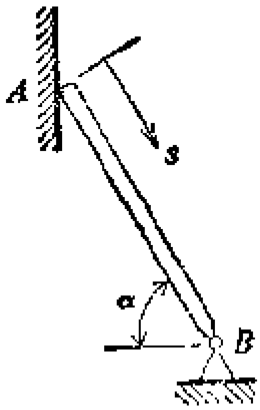
5.10-5　有一 C 6×13 槽形截面(见附录 C)的短杆，承受轴向压力 P 作用，该压力的作用线位于槽钢的腹板形心处. 容许压应力为 12,000 磅/吋^2，试求容许荷载 P.

5.10-6　假设图 5-32 a 中所示的梁为宽度等于 b、高度等于 h 的矩形横截面. 考虑在离左端 x 距离的任一横截面处，当 Q 和 T 为图中所示方向时其中性轴将在横截面形心以上. 令 s 代表形心至中性轴的距离. (a)试求出当 $Q=T$ 情况下，s 为 x 函数的表达式，(b)如果 $L=30$ 吋，$h=2$ 吋，绘出 $0\leqslant x\leqslant L$ 范围内 s 的曲线图.

5.10-7　有一座高为 4 呎、厚为 1 呎的素混凝土墙，置于牢固的基础上，用作小坝. (a) 试求当水位达到墙顶时墙底处的最大应力和最小应力(注：假设混凝土重量为 145 磅/呎^3). (b) 如果要求混凝土中没有拉应力，试问最大容许水深 d 为多少?

5.10-8　有一实心圆形横截面杆，承受 6000 磅的轴向拉力和 28,000 吋·磅的弯矩。根据 18,000 磅/吋^{2}的容许拉应力，试问该杆所需直径 d 为多少？

5.10-9　有一实心圆杆 AB，其 B 端为铰支承，其 A 端靠于光滑的竖直面上（无摩擦力，见图）。试确定 A 点至由于杆重产生最大压应力的横截面之距离 s（令 L＝长度，d＝直径，α＝杆的轴与水平线的夹角）。



习题 5.10-9

5.10-10　有一拉杆由 4 吋×4 吋×3/4 吋角形截面所构成（见附录 C），承受通过两肢中央线的交点处的拉伸荷载 $P=25$ 千磅。试问杆中最大拉应力有多大？

5.10-11　有一短柱由 W14×38 截面（见附录 C）所构成，承受作用于该横截面的外角点之一处的压缩荷载 $P=40$ 千磅。试求该柱中的最大拉应力和压应力。

5.10-12　试说明圆形横截面（半径为 r）的核心为一半径等于 $r/4$ 的同心圆。

5.10-13　试说明外半径为 r_2、内半径为 r_1 的空心圆形截面的核心为半径 $r=(r_2^2+r_1^2)/4r_2$ 的圆。另外，试问当 r_1 趋近 r_2 截面成为薄的环状时其核心的半径之极限值为多少？

5.10-14　试确定边长为 b 的等边三角形的核心。

5.10-15　试确定边长为 b 的方形薄管的核心。

5.10-16　试确定 W16×50 钢梁截面（见附录 C）的核心。

第六章　梁的挠度

6.1　挠度曲线的微分方程

作用于梁上的横向荷载将引起梁弯曲，因而梁的纵轴变形成一根曲线。在工程实践中，常常需要确定沿梁轴各点处的**挠度**。例如，挠度的计算对于静不定梁的分析就是很重要的，如下一章所述。另外一个例子是建筑物的设计，往往对最大挠度的大小规定有一个上限。

让我们先从讨论图 6-1a 中所示简单梁 AB 来开始梁的挠度的讨论。荷载 P 作用之前，梁的纵轴是直的。弯曲之后，梁轴成了曲线，用线 ACB 来表示。让我们如同前面对弯曲的讨论一样假设 xy 平面为梁的对称平面，而且所有荷载作用于此平面内。于是，被称为梁的**挠度曲线**的 ACB 曲线也就位于此平面内。

为了导出挠度曲线的微分方程，我们要利用曲率 k 和弯矩 M 之间的关系(见方程 5-9)。然而，现在我们必须看到挠曲轴的曲率的正负号与坐标轴所选择的方向有关。当假设 x 轴向右为正，y 轴向下为正，正如图 6-1a 所示，那么当梁弯曲凹面朝下时梁轴的曲率为正，而当梁弯曲凹面朝上时曲率为负。因此，图 6-1a 中所示梁为负曲率的弯曲。如果我们继续采用这样的正负号规则：正弯矩使梁的顶面产生压缩，于是我们看到正弯矩产生负的曲率，而负弯矩产生正的曲率。因此，我们将方程(5-9)重写成如下形式：

$$k=\frac{1}{\rho}=-\frac{M}{EI} \qquad (6\text{-}1)$$

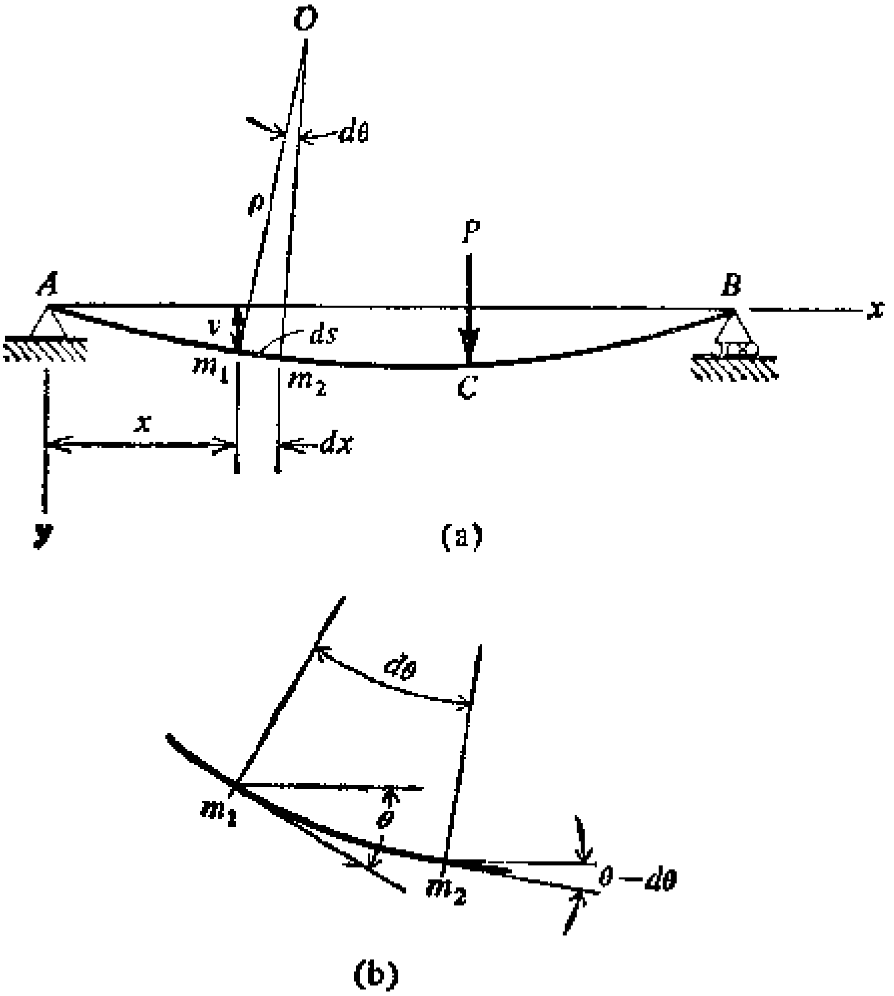


图 6-1 弯曲梁的挠度曲线

现在，曲率 k 和挠度曲线方程之间的关系可藉考虑相距 ds 的两个点 m_1 和 m_2 来求得(图 6-1 a)。在这每一点处，我们绘出曲线的切线的法线，这些法线相交于曲率中心 O 处。m_1 点处挠度曲线的切线假设与 x 轴成 θ 角(图 6-1 b)。m_2这一点处的相应角为 $\theta-d\theta$，其中 $d\theta$ 代表法线 Om_1 和 Om_2 之间的夹角。另外，我们从图上看出 $ds=\rho d\theta$ 和 $1/\rho=d\theta/ds$。因此，曲率 k 等于 θ 角对于沿挠度曲线所度量的距离 s 之变化率：

$$k=\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds} \tag{6-2}$$

对于图 6-1 b 中所绘的曲率，其 $d\theta/ds$ 值为负，因为当我们沿

挠度曲线从左向右移动时，θ 角减小.

在实际设计中的大多数情况下，梁仅发生很小的挠度. 因此，挠度曲线将是很平坦的，其 θ 角和曲线的斜度均为很小的量. 所以，我们可以假设：

$$ds \approx dx \qquad \theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{dx} \tag{6-3}$$

其中 v 为梁距其原来位置的挠度(见图 6-1 a). 将这些表达式代入方程(6-2)，我们得到

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{6-4}$$

然后与方程(6-1)合併，得

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{6-5}$$

此为梁的挠度曲线的基本微分方程. 必须根据每一种特定情况进行积分以求其挠度 v.

用于方程(6-5)的正负号规则如下：(1)图 6-1 a中所示为 x 轴和 y 轴的正方向，亦即，向右和向下时为正方向，(2) 当挠度 v 沿 y 的正方向时，v 为正，(3)当梁的顶面产生压缩时，弯矩M为正. 如果 v 或M的正负号规则与此相反(例如，取 v 向上为正)，那么方程(6-5)中的减号应变为加号.

藉方程(6-5)对于 x 微分，然后代入方程 $q = -\frac{dV}{dx}$ 和 $V = dM/dx$(见方程 4-1 和 4-2)，我们得

$$\frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{V}{EI} \tag{6-6}$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q}{EI} \tag{6-7}$$

其挠度 v 可藉求解方程(6-5)至(6-7)中的任一方程来求得，它决定于是 M，V 还是 q 为已知，也决定于数学上的方便. 剪力 V 和荷载 q 的正负号规则示于图 4-6 a 中.

为了简化后面的讨论，我们将采用字母右上角的小撇来代表微分法，因此：

$$v' \equiv \frac{dv}{dx} \quad v'' \equiv \frac{d^2v}{dx^2} \quad v''' \equiv \frac{d^3v}{dx^3} \quad v'''' \equiv \frac{d^4v}{dx^4} \tag{6-8}$$

应用这些符号，我们可以将上面已得到的微分方程表示成为下列形式：

$$EIv'' = -M \quad EIv''' = -V \quad EIv'''' = q \quad \text{(6-9 a, b, c)}$$

在下面两节中，我们将应用这些方程去求梁的挠度。其程序包括方程的逐次积分，并按梁的边界条件算出积分常数。根据方程的推导，我们看到：只有当虎克定律适用于其材料，且当挠度曲线的斜度非常小时，它们才能成立。另外，应认识到其方程的导得是仅限于考虑由纯弯产生的变形，而忽略了剪切变形。即使在极少数时候可能需要考虑由于剪切效应产生的附加挠度(见第 6.11 和11.4节)，但这种局限性对于大多数实用目的来说是满足的。

曲率的精确表达式　如果梁的挠度曲线具有很大的斜度，我们便不能应用方程(6-3)所作的简化。此时必须应用斜度 v' 与梁轴转角θ关系的精确表达式：

$$\tan\theta = v' \quad 或 \quad \theta = \operatorname{arctg} v'$$

所以

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\operatorname{arctg} v')}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

注意到 $ds^2 = dx^2 + dv^2$，因此

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = [1 + (v')^2]^{\frac{1}{2}}$$

还注意到

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} v') = \frac{v''}{1 + (v')^2}$$

我们得

$$k=\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds}=\frac{v''}{[1+(v')^2]^{3/2}} \tag{6-10}$$

将此式与方程(6-4)比较，我们看出平坦挠度曲线的假定相当于略去了与1相比很小的$(v')^2$项，这样使方程(6-10)中的分母成为1．当求解梁的大挠度问题时，必须用方程(6-10)来表达其曲率（见第6.12节）[1]．

6.2 简单梁

现在让我们应用挠度曲线的微分方程来求简单梁的挠度．如果梁承受强度为q的均匀荷载(见图6-2)，那么离左边支承x距离处的弯矩为$M=qLx/2-qx^2/2$，因此，根据方程(6-9a)，我们得到

$$EIv''=-\frac{qLx}{2}+\frac{qx^2}{2}$$

用dx乘此方程的两边，并积分，我们得到

$$EIv'=-\frac{qLx^2}{4}+\frac{qx^3}{6}+C_1 \tag{a}$$

式中C_1为积分常数．为了求算此常数，我们可根据对称性看

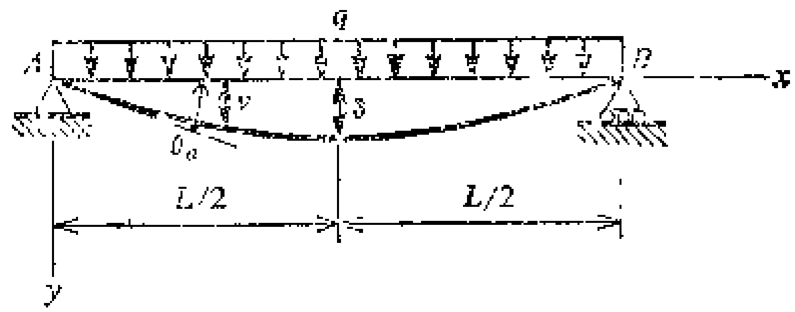


图 6-2　承受均匀荷载的简单梁的挠度曲线

1) 表明梁的曲率与弯矩成比例的基本关系，首先是由J．伯努利(Jacob Bernoulli)得到的，虽然他得出不正确的比例常数值．这种关系后来被Euler所应用，他求解了大挠度(应用曲率方程6-10)和小挠度(应用方程6-5)两者的挠度曲线微分方程．关于弹性曲线的历史，见参考文献6-1．

出跨度中央处挠度曲线的斜度为零，因而，我们得到这样的条件：

$$当\ x=L/2\ 时, \quad v'=0$$

它可较简洁地表达成：

$$v'\left(\frac{L}{2}\right)=0$$

将此条件用于方程(a)，得

$$C_1=\frac{qL^3}{24}$$

于是方程(a)成为：

$$EIv'=-\frac{qLx^2}{4}+\frac{qx^3}{6}+\frac{qL^3}{24} \tag{6-11}$$

再用 dx 乘此方程的两边，并积分，我们得

$$EIv=-\frac{qLx^3}{12}+\frac{qx^4}{24}+\frac{qL^3x}{24}+C_2 \tag{b}$$

积分常数 C_2 可根据当 $x=0$ 时 $v=0$ 的条件或 $v(0)=0$ 来求算。将此条件用于方程(b)，得 $C_2=0$，因此，挠度的方程(方程b)为

$$v=\frac{qx}{24EI}(L^3-2Lx^2+x^3) \tag{6-12}$$

根据这个方程，我们可以求出沿梁上任一点处的挠度。其最大挠度 δ 发生于跨度中央处，它藉令方程(6-12)中的 $x=L/2$ 来求得。其结果为

$$\delta=v_{\max}=\frac{5qL^4}{384EI} \tag{6-13}$$

最大斜度发生于梁的任何一端。在左端处($x=0$)，我们根据方程(6-11)[1]得到

---

1) 因为梁的挠度假设很小，所以斜度 v' 可以等于转角 θ，如前面方程(6-3)中所示一样。

$$\theta_a = v'_{\max} = \frac{qL^3}{24\,EI} \tag{6-14}$$

对于承受均匀荷载的简单梁，其挠度曲线的另一种推导，我们可以从采用四阶微分方程来开始(方程 6-9 c)：

$$EIv'''' = q$$

此方程的连续积分得出：

$$EIv''' = qx + C_1$$

$$EIv'' = \frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EIv' = \frac{qx^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EIv = \frac{qx^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

为了求算诸积分常数，需要四个边界条件．因为在梁的两端处其挠度和弯矩均为零，这四个条件如下：

$$v(0) = v(L) = 0 \qquad\qquad v''(0) = v''(L) = 0$$

从这些条件，我们得

$$C_1 = -\frac{qL}{2} \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = \frac{qL^3}{24} \qquad C_4 = 0$$

将这些常数的值代入上面的挠度方程，得

$$EIv = \frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}$$

此结果与藉求解二阶微分方程所得的方程(6-12)一致。

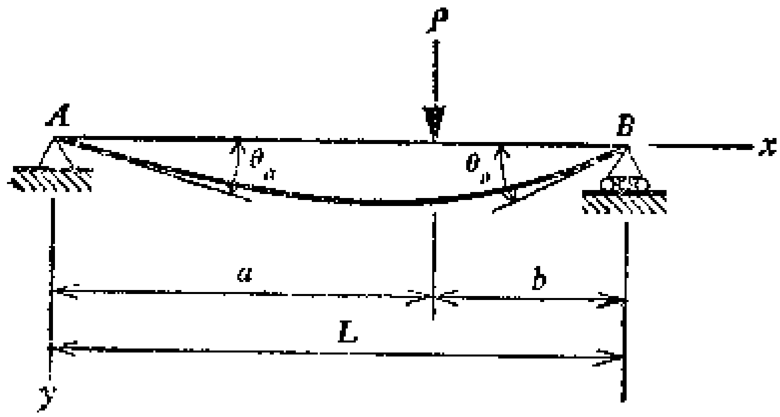


图 6-3　承受一个集中荷载的简单梁

现在让我们讨论带有集中荷载 P 的简单梁(见图 6-3)。荷载的位置用距端点的距离 a 和 b 来定义。在此例中对其弯矩有两个不同的表达式,一个是对荷载左边的梁部,另一个是对荷载右边的梁部。所以,我们必须对梁的各部分别写出方程(6-9 a):

$$EIv'' = -Pbx/L \qquad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

$$EIv'' = -Pbx/L + P(x-a) \qquad (a \leqslant x \leqslant L)$$

将这两个方程积分得到

$$EIv' = -Pbx^2/2L + C_1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{c}$$

$$EIv' = -Pbx^2/2L + P(x-a)^2/2 + C_2 \qquad (a \leqslant x \leqslant L) \tag{d}$$

现在进行第二次积分,我们得到

$$EIv = -Pbx^3/6L + C_1x + C_3 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{e}$$

$$EIv = -Pbx^3/6L + P(x-a)^3/6 + C_2x + C_4 \qquad (a \leqslant x \leqslant L) \tag{f}$$

上面方程中出现的四个积分常数,可根据下面的条件来求得:(1) 在 $x=a$ 处,两部分梁的斜度必须相等,(2) 在 $x=a$ 处,两部分梁的挠度必须相等,(3) 在 $x=0$ 处,挠度为零,(4) 在 $x=L$ 处,挠度为零。根据第一个条件,我们看出:当 $x=a$ 时,斜度的表达式(c)和(d)必须相等。这就得出:

$$-Pba^2/2L + C_1 = -Pba^2/2L + C_2$$

根据它得到 $C_1=C_2$。第二个条件意味着表达式(e)和(f)对于 $x=a$ 的情况可以相等:

$$-Pba^3/6L + C_1a + C_3 = -Pba^3/6L + C_2a + C_4$$

从它得到 $C_3=C_4$。最后,当条件(3)和(4)分别用于表达式(e)和(f)时,我们得出:

$$C_3 = 0 \quad 和 \quad -PbL^2/6 + Pb^3/6 + C_2L = 0$$

根据上面所有结果,我们看出

$$C_1 = C_2 = Pb(L^2-b^2)/6L \qquad C_3 = C_4 = 0$$

将这些值代入方程(e)和(f)，得出挠度曲线方程：

$$EIv=\frac{Pbx}{6L}(L^2-b^2-x^2) \quad (0\leqslant x\leqslant a) \qquad (6\text{-}15\,a)$$

$$EIv=\frac{Pbx}{6L}(L^2-b^2-x^2)+\frac{P(x-a)^3}{6}$$

$$(a\leqslant x\leqslant L) \qquad (6\text{-}15\,b)$$

这些方程的第一个方程得出荷载 P 的左边梁部的挠度曲线，而第二个方程得出荷载右边梁部的挠度曲线.

这两部分梁的斜度藉将 C_1 和 C_2 值代入方程(c)和(d)求得，于是：

$$EIv'=\frac{Pb}{6L}(L^2-b^2-3x^2) \qquad (0\leqslant x\leqslant a) \qquad (6\text{-}16\,a)$$

$$EIv'=\frac{Pb}{6L}(L^2-b^2-3x^2)+\frac{P(x-a)^2}{2}$$

$$(a\leqslant x\leqslant L) \qquad (6\text{-}16\,b)$$

根据这些方程，挠度曲线任一点处的斜度可以计算出来. 常常需要梁的端点处的转角. 因此，将 $x=0$ 代入方程(6-16 a)，将 $x=L$ 代入方程(6-16 b)，并且将端点处的角用 θ_a 和 θ_b 来代表(见图6-3)，我们得到

$$\theta_a=v'(0)=\frac{Pb(L^2-b^2)}{6LEI}=\frac{Pab(L+b)}{6LEI} \qquad (6\text{-}17\,a)$$

$$\theta_b=-v'(L)=\frac{Pab(L+a)}{6LEI} \qquad (6\text{-}17b)$$

梁的最大挠度发生于挠度曲线具有水平切线的点上. 如果 $a>b$，最大挠度发生于梁的左边部分(在 $x=0$ 和 $x=a$ 之间)，我们可藉根据方程(6-16 a)的斜度 v' 为零来确定此点的位置. 用 x_1 代表梁的 A 端至最大挠度点处的距离，我们根据方程(6-16 a)得出：

$$x_1=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}} \quad (a\geqslant b) \qquad (6\text{-}18)$$

根据此方程，我们看出：当荷载 P 从梁的中央($b=L/2$)向右端移动(b 趋近 0)，其距离 x_1 从$L/2$ 变到 $L/\sqrt{3}=0.577L$. 因此，我们看出最大挠度总是发生于很靠近梁中央的地方. 藉将 x_1(根据方程 6-18)代入方程(6-15 a)，得到最大挠度：

$$v_{max}=\frac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI} \quad (a\geqslant b) \qquad (6\text{-}19)$$

梁中央处的挠度藉将 $x=L/2$ 代入方程(6-15 a)来求得，

$$v\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{Pb(3L^2-4b^2)}{48EI} \quad (a\geqslant b) \qquad (6\text{-}20)$$

因为最大挠度总是发生在靠近梁的中央处，故方程(6-20)给出最大挠度的很好的近似值. 在最不好情况下(当 b 趋近零)，最大挠度和中央处的挠度之差小于最大挠度的百分之三.

当荷载 P 位于梁的中央处时($a=b=L/2$)，上面结果得到较简单的形式，为

$$\theta_a=\theta_b=\frac{PL^2}{16EI} \qquad v_{max}=v\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{PL^3}{48EI} \qquad (6\text{-}21\ a,b)$$

6.3 悬臂梁

有一悬臂梁固定于左端，且承受图 6-4 所示强度为 q 的均匀荷载. 为了求出此梁的挠度曲线方程，我们可用与简单梁相同的方法，亦即，我们可以求解三个微分方程 (6-9) 中的

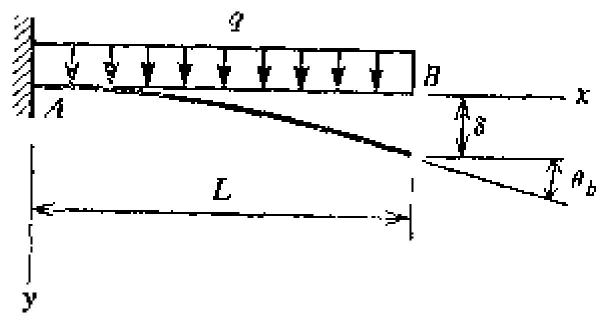


图 6-4 承受均匀荷载的悬臂梁

任一个方程。如果我们采用对于弯矩的二阶方程（方程 6-9 a）来开始，我们得到：

$$EIv''=-M=q(L-x)^2/2 \tag{a}$$

这个方程的第一次积分得出：

$$EIv'=-q(L-x)^3/6+C_1$$

其积分常数 C_1 可根据支承处梁的斜度为零这一条件来求得，因此，我们有 $v'(0)=0$，从它得到 $C_1=qL^3/6$，所以

$$v'=\frac{qx}{6EI}(3L^2-3Lx+x^2) \tag{6-22}$$

此方程的积分得到

$$v=\frac{qx^2}{24EI}(6L^2-4Lx+x^2)+C_2$$

支承处挠度的边界条件为 $v(0)=0$，它表明 $C_2=0$。这样，挠度曲线的方程为

$$v=\frac{qx^2}{24EI}(6L^2-4Lx+x^2) \tag{6-23}$$

梁的自由端处的转角 θ_b 和挠度 δ，借将 $x=L$ 代入方程(6-22)和(6-23)容易地求得如下：

$$\theta_b=v'(L)=\frac{qL^3}{6EI} \quad \delta=v(L)=\frac{qL^4}{8EI} \tag{6-24 a, b}$$

如果我们用对于剪力的微分方程（方程 6-9 b）着手此悬臂梁的分析，我们有 $V=q(L-x)$，所以

$$EIv'''=-qL+qx \tag{b}$$

积分得

$$EIv''=-qLx+qx^2/2+C_1$$

因为在 $x=L$ 处弯矩 M 为零，我们有边界条件 $v''(L)=0$；因此，$C_1=qL^2/2$，而

$$EIv''=-qLx+qx^2/2+qL^2/2$$

它与方程(a)相同。所以，求解的其余部分按前面一样进行。

另一种可能性是用四阶微分方程(方程 6-9 c)来开始：

$$EIv''''=q$$

第一次积分得

$$EIv'''=qx+C_1 \tag{c}$$

因为在 $x=L$ 处剪力为零，边界条件成为 $v'''(L)=0$，根据它得到 $C_1=-qL$。当这个 C_1 的表达式置于方程(c)中，该方程则成了等于方程(b)，因此，求解的其余部分将与早已叙述的一样。

对用以求挠度的微分方程之选择，通常是数学上的方便和个人爱好的问题。

6.4 力矩-面积法

另一种用于求梁的挠度的方法是力矩-面积法。当要求找出梁上仅一点处的挠度或斜度而不要求找出挠度曲线的整个方程时，这种方法特别有用。这种方法的名称来源于利用弯矩图的面积的缘故。

让我们从讨论一根梁的挠度曲线的 AB 部分来开始（见图 6-5）。A 点和 B 点之间的弯矩图也示于图中。梁上相距 ds 距离的两个横截面 m_1 和 m_2，在弯曲后将相交成等于 ds/ρ 的 $d\theta$ 角，其中 ρ 为曲率半径。组合方程(6-4)和(6-5)，只应用其绝对值，我们可以写出：

$$d\theta=\frac{Mdx}{EI} \tag{6-25}$$

此关系可借助图 6-5 得出如下的简单几何解释。线 m_1p_1 为挠度曲线 m_1 处的切线，线 m_2p_2 为 m_2 处的切线，这两切线之夹角为 $d\theta$。按照方程(6-25)，$d\theta$ 角等于弯矩图的面积Mdx(图中黑阴影所示)被弯曲刚度 EI 去除。

如果我们现在对 A 点与 B 点之间将方程(6-25)积分，我

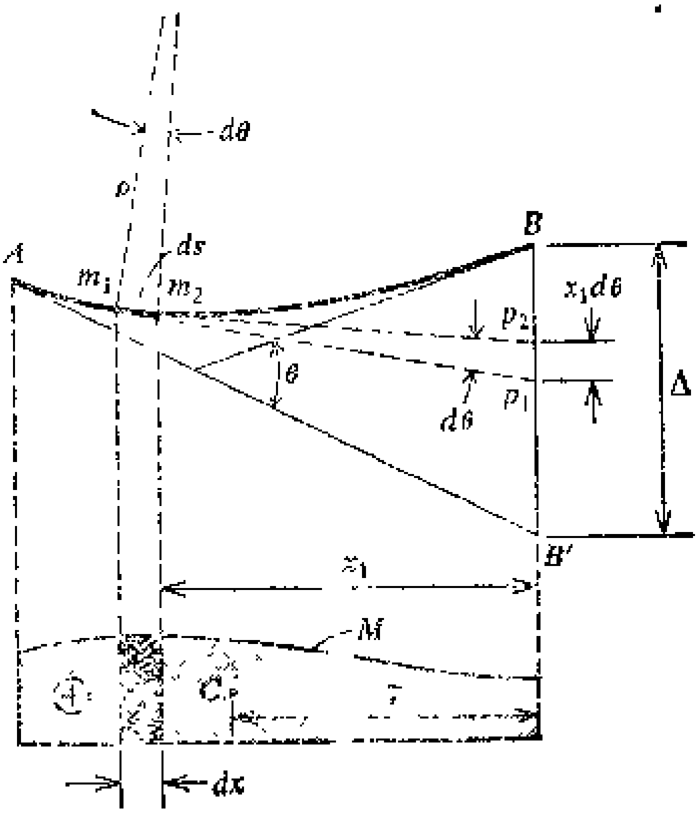


图 6-5　力矩面积法

们得到挠度曲线 A 处和 B 处切线之间的总夹角，

$$\theta=\int_A^B\frac{Mdx}{EI} \qquad (6-26)$$

此方程中的积分代表 A 和 B 之间弯矩图的面积被 EI 相除。因此，我们得出下面定理：

力矩-面积第一定理：A 与 B 两点处挠度曲线的切线夹角，等于这两点间弯矩面积被 EI 去除。

这个定理所用的正负号规则为：(1) 正弯矩对梁的顶面产生压缩；(2) 当 B 处的切线对于 A 处的切线为反时针方向旋转时，其 θ 角为正，如图 6-5 所示。如果 A 和 B 之间弯矩图有一部分为正，另一部分为负，我们必须对与负弯矩有关的面积部分加上负号。

下面我们讨论 B 点对于 A 点切线 AB' 的挠度 Δ（图 6-5）。应记住：θ 角是非常小的，我们从图中观察到：由于单元 m_1m_2 的弯曲对于距离 Δ 的影响为 $x_1d\theta$，其中 x_1 为自该单元至 B 点的距离。这个微小距离 $x_1d\theta$ 等于

$$x_1\frac{Mdx}{EI}$$

可以从几何解释为：它等于所切阴影面积 Mdx 对通过 B 点的竖直线的一次矩被 EI 去除。然后，从 A 至 B 进行积分，我们得总挠度 Δ 为：

$$\Delta=\int_A^B x_1\frac{Mdx}{EI} \tag{6-27}$$

此方程中的积分代表 A 至 B 之间弯矩图面积对 B 点的一次矩被 EI 去除。因此，我们可以叙述第二定理：

力矩-面积第二定理：**B 点距 A 点切线的挠度 Δ，等于 A 和 B 之间弯矩图的面积对 B 点的一次矩被 EI 去除。**

如果需要，面积的一次矩可取面积与 B 点至形心 C 的距离 $\bar{x}$ 之乘积来求得(见图 6-5)。当弯矩为正时，其面积必须取为正，当弯矩为负时，则取为负．注意：正面积（因此为正的一次矩)意味着 B 位于 A 处切线以上，反之，负力矩意味着 B 位于该切线的下面．

实际上经常碰到的弯矩面积为一简单的几何图形，如矩形、三角形和抛物线形式．这种图形的面积和形心的距离均列于附录 B 中．

现在，将用一些例子来说明力矩-面积定理对于求梁的转角和挠度的应用[1]．

---

1) 力矩-面积法是 Saint-Venant（参考文献 6-6 和 6-7)介绍的．这种方法由 Mohr(参考文献 6-8 和 6-9)和 Greene(参考文献 6-10）作了更完整的发展．

例题 1 有一自由端作用有集中荷载 P 的悬臂梁，试确定自由端处的转角 θ_b 和挠度 δ(见图 6-6)。其弯矩图为三角形形状，示于图的下面部分。

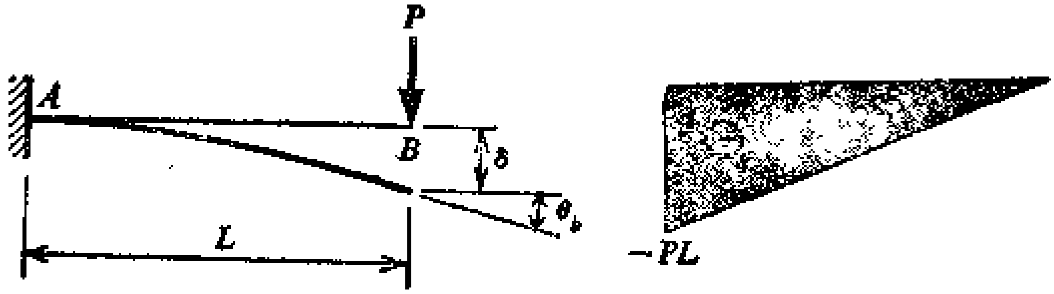


图 6-6 例题 1 承受一个集中荷载的悬臂梁

根据力矩-面积第一定理，我们观察到 A 点和 B 点之间角度之差等于弯矩图的面积被 EI 去除，该面积为 $-PL^2/2$[1)]，其负号的意思是 B 处切线是从 A 处切线顺时针方向旋转，其中 A 处切线是为水平者。所以，按图中所规定的正的角 θ_b 为

$$\theta_b=\frac{PL^2}{2\,EI}$$

梁端处的挠度 δ 可藉应用第二定理来求得。挠度曲线上 B 点至 A 点处切线的距离 Δ 等于弯矩面积绕 B 点的一次矩被 EI 去除：

$$\Delta=-\frac{PL^2}{2\,EI}\left(\frac{2\,L}{3}\right)=-\frac{PL^3}{3\,EI}$$

其负号的意思是挠度曲线上的 B 点位于 A 点处切线的下面。所以挠度 δ 为：

$$\delta=\frac{PL^3}{3\,EI}$$

例题 2 对部分跨度上作用有强度为 q 的均匀荷载的悬臂梁，试求其自由端处的挠度 δ(图 6-7)。

如上例所示，端点处的挠度 δ，数值上等于弯矩图面积绕 B 点的一次矩被 EI 去除。弯矩图面积如图中所示为一般形状的二次抛物线图形，其形心距离为 $3\,a/4$，面积为$(qa^2/2)(a/3)$，这些可从附录 B、情况11查得，由此得出 δ 的表达式为

1) 原书误写为 $-PL^2/2\,EI$。——译者注

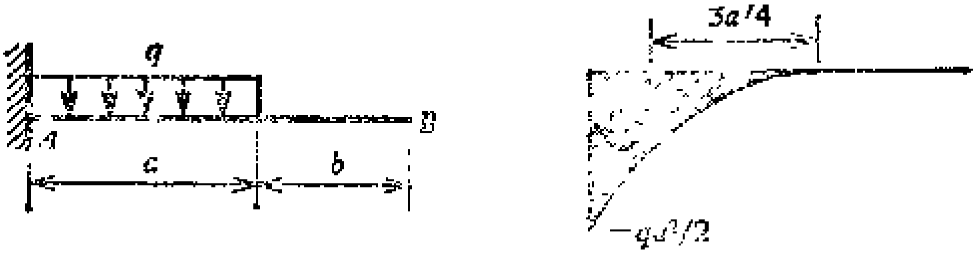


图 6-7 例题2 部分跨度上承受均匀荷载的悬臂梁

$$\delta=\frac{qa^2}{2\,EI}\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{3}{4}a+b\right)=\frac{qa^3}{24\,EI}(3\,a+4\,b)$$

例题3 有一集中荷载 P 作用于简单梁 AB 上（图 6-8）。试求 A 点处挠度曲线的转角 θ_a、荷载 P 下面的挠度，以及梁的最大挠度。

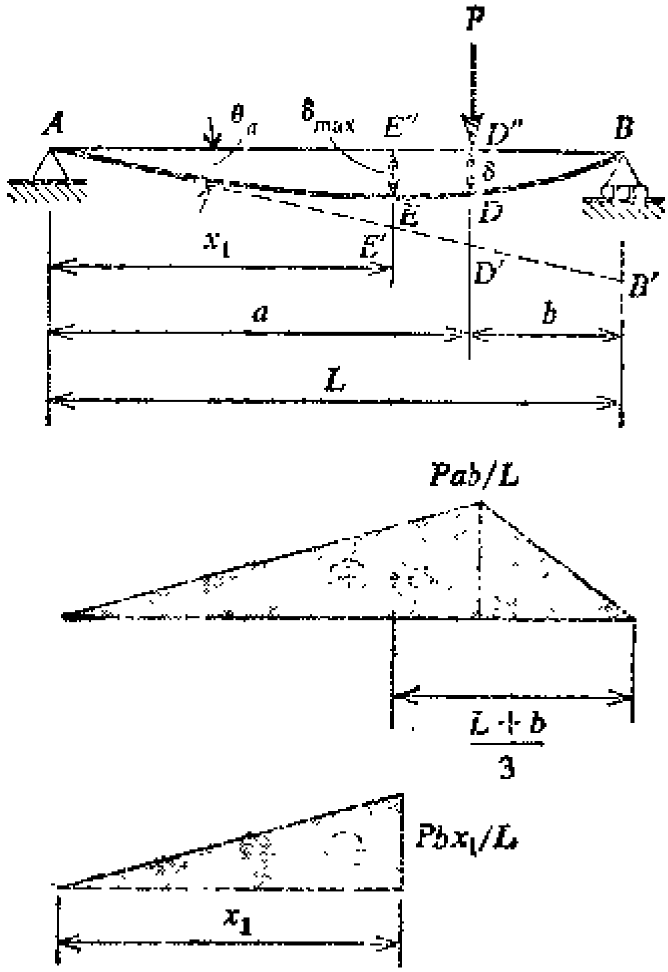


图 6-8 例题3 承受一个集中荷载的简单梁

为了求出 A 点处的角，我们首先注意：θ_a 等于距离 BB' 被长度 L 相除。其距离 BB' 为 B 点距 A 点处切线的挠度，因此它可藉取弯矩面

积绕 B 点的一次矩被 EI 去除进行计算。其力矩图的面积为 $Pab/2$，它的形心 C 距 B 点的距离为 $(L+b)/3$，是根据附录 B 中情况 3 得到的。所以

$$BB'=\frac{Pab}{2EI}\left(\frac{L+b}{3}\right)=\frac{Pab}{6EI}(L+b)$$

弯矩面积为正，意味着 B 在切线以上，这与我们所预料的一样。最后，我们得到

$$\theta_a=\frac{Pab}{6LEI}(L+b)$$

荷载 P 处挠度 δ 可按距离 $D''D'$ 减距离 DD' 来求得（见图 6-8）。距离 $D''D'$ 等于 $a\theta_a$。距离 DD' 等于 D 点距 A 点切线的挠度，它可藉力矩-面积第二定理求得：

$$DD'=\frac{Pab}{LEI}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{Pa^3b}{6LEI}$$

因而，我们得到 δ：

$$\delta=a\theta_a-\frac{Pa^3b}{6LEI}=\frac{Pa^2b^2}{3LEI}$$

梁的最大挠度发生于 E 点，该处挠度曲线有一水平切线。A 和 E 处切线之间的夹角等于 A 和 E 之间弯矩图的面积（示于图的最后部分中）被 EI 去除。此角必定与 θ_a 相同，因为 E 处的斜度为零。因此，我们求得：

$$\theta_a=\frac{x_1}{2}\left(\frac{Pbx_1}{LEI}\right)=\frac{Pbx_1^2}{2LEI}$$

式中 x_1 为 A 至最大挠度点的距离。将 θ_a 的表达式代入此方程，对 x_1 求解，得出：

$$x_1=\sqrt{\frac{a(L+b)}{3}}=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$$

最大挠度 δ_{max} 可求得如下：

$$\delta_{max}=E''E-EE'=x_1\theta_a-\frac{Pbx_1}{LEI}\left(\frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{x_1}{3}\right)$$

$$=\frac{Pb}{9\sqrt{3}LEI}(L^2-b^2)^{3/2}$$

另一种方法，我们藉观察 δ_{max} 等于 A 点在弹性曲线 E 处切线以上的挠度，可以较容易地求出 δ_{max}。这个挠度为 A 点和 E 点之间弯矩面积对 A 点的一次矩被 EI 去除，因此

$$\delta_{max}=\frac{x_1}{2}\left(\frac{Pbx_1}{LEI}\right)\left(\frac{2x_1}{3}\right)=\frac{Pb}{9\sqrt{3}LEI}(L^2-b^2)^{3/2}$$

与前面相同。上面的结果是由于 $a \geqslant b$ 的情况。

6.5 叠加法

梁的挠度曲线的微分方程(方程6-9)是为线性微分方程，亦即方程中所有包含挠度 v 或 v 的导数的所有项均仅为自乘一次幂。这个事实意味着对于各种荷载条件的方程解可以叠加起来。因此，由于若干个同时作用的不同荷载所产生梁的挠度，可用分开作用荷载所产生的挠度叠加来求得。例如，如果 v_1 代表由于荷载 q_1 产生的挠度，v_2 代表荷载 q_2 产生的挠度，那么由于 q_1 和 q_2 同时作用所产生的总挠度为 v_1+v_2。

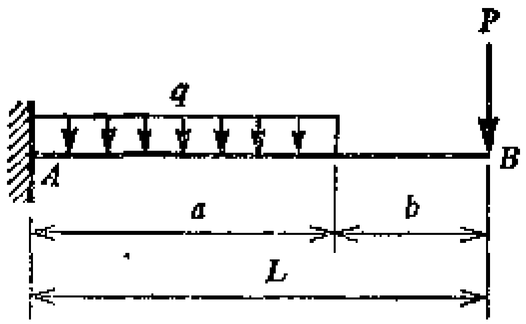


图 6-9 承受两种荷载的悬臂梁

为了说明这个概念，现讨论图 6-9 所示的悬臂梁。该梁的部分跨度上承受强度为 q 的均匀荷载和作用于端点处的集中荷载 P。让我们假设需要求自由端处的挠度 δ_b。由于荷载 P 单独作用时 B 点处的挠度为 $PL^3/3EI$，见上节中例题1所示。同样，由于均匀荷载引起 B 点处的挠度按上节例题2所得为 $qa^3(3a+4b)/24EI$。因此，我们看出：由于合成荷载所产生的挠度 δ_b 为：

$$\delta_b=\frac{PL^3}{3EI}+\frac{qa^3(3a+4b)}{24EI}$$

梁上任一点处的挠度和转角可借与此相同的方法求得.

当梁上总荷载系可以分解成早已知道其所产生的挠度之加载情况时,如刚才所介绍的例题中说明的那样,那么叠加法是特别有用的. 为了对这种情况便于应用叠加法,附录 D 中列出了梁的挠度表. 应用这些表和叠加法，我们可以去求梁在许多不同加载情况下的挠度和转角. 在本节的后面介绍了一些这方面的例子.

叠加也可以用于分布加载情况，借考虑分布荷载的单元为一集中荷载,然后对整个荷载范围进行积分. 从图 6-10 所示的例子中可以容易地理解这种方法. 作用于梁 AB 左边一半处的荷载为三角形分布，我们假设要求出中点处的挠度. 分布荷载的一个单元 qdx 可视为一个集中荷载. 由于离左端距离 x 处作用的集中荷载 P 所产生的中点挠度为

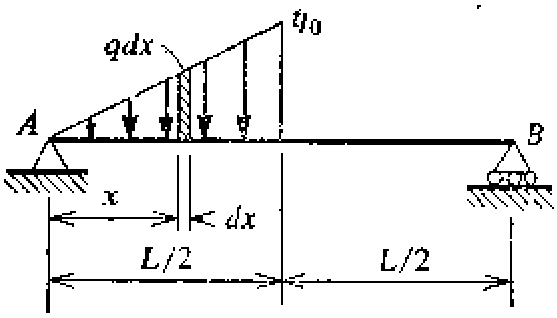


图 6-10 承受三角形荷载的简单梁

$$\frac{Px}{48EI}(3L^2-4x^2)$$

它是根据附录表 D-2 中情况 5 所得. 将 qdx 代替 P 代入此表达式,并令 $q=2q_0x/L$,我们得到其挠度为

$$\delta=\int_0^{L/2}\frac{qxdx}{48EI}(3L^2-4x^2)$$

$$=\frac{q_0}{24LEI}\int_0^{L/2}(3L^2-4x^2)x^2dx=\frac{qL^4}{240EI}$$

用这种将分布荷载单元叠加的相同方法，我们可以计算梁左端处的转角 θ_a. 由于集中荷载 P 所产生的转角之表达式(见表 D-2 中情况 5)为

$$\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

在此方程中，我们必须用 $2q_0xdx/L$ 代替 P，用 x 代替 a，用 $L-x$ 代替 b，因而

$$\theta_a=\int_0^{L/2}\frac{q_0xdx}{3L^2EI}(x)(L-x)(2L-x)=\frac{41q_0L^3}{2880EI}$$

在上面每一个例题中，我们为了求出梁的挠度，用了叠加的概念．这个概念可以用叠加原理的形式来叙述，这个原理在应用力学中用得很广，只要所需要确定的量为作用荷载的线性函数，这个原理就能成立．在这样的条件下，由于每一荷载分别作用所产生需要求的量可以求出来，然后再叠加其结果得到由于所有荷载同时作用所产生的总值．在求梁的挠度情况下，如果梁的材料服从虎克定律，而且梁的挠度很小，那么叠加原理就能成立．这里需要小挠度是保证挠度曲线的微分方程属于线性者，还保证荷载和反力的作用线对它们原来位置没有改变．

下面的例题用来进一步说明在计算梁挠度时叠加原理的应用．

例题 1　有一简单梁，其两端点处作用有力偶 M_0（见图 6-11）．试求梁端处转角 θ_a 和 θ_b 的表达式，以及中点处挠度 δ 的表达式．

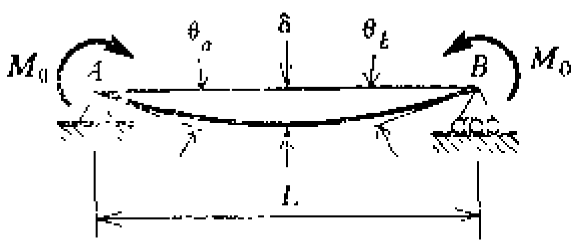


图 6-11　例题 1 端点作用力偶的简单梁

应用表 D-2 中的情况 7，我们用叠加得到：

$$\theta_a=\theta_b=\frac{M_0L}{3EI}+\frac{M_0L}{6EI}=\frac{M_0L}{2EI}$$

和

$$\delta=(2)\frac{M_0L^2}{16\,EI}=\frac{M_0L^2}{8\,EI}$$

例题 2　有一悬臂梁 AB，沿梁长右半部承受强度为 q 的均匀荷载，如图 6-12 所示。试求自由端处的挠度 δ_b 和转角 θ_b。

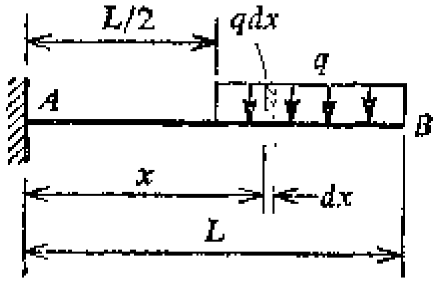


图 6-12　例题 2 部分跨度上承受均匀荷载的悬臂梁

我们从考虑作用于离支承端 x 距离处的荷载单元 qdx 来开始。此荷载单元使自由端处所产生的挠度 $d\delta$ 和角 $d\theta$ 为：

$$d\delta=\frac{(qdx)(x^2)(3\,L-x)}{6\,EI}\qquad d\theta=\frac{(qdx)(x^2)}{2\,EI}$$

它们系从表 D-1 中情况 5 查得。因此，用积分，我们得

$$\delta_b=\frac{q}{6EI}\int_{L/2}^{L}x^2(\,3\,L-x)dx=\frac{41}{384}\frac{qL^4}{EI}$$

$$\theta_b=\frac{q}{2EI}\int_{L/2}^{L}x^2dx=\frac{7}{48}\frac{qL^3}{EI}$$

应用表 D-1 中情况 3 的公式，代入 $a=b=L/2$，可以较简单地得出和这些相同的结果。

例题 3　有一带挑臂的简单梁，其受力情况如图 6-13 a 所示。试求挑臂端点处的挠度 δ_c。

C 点的挠度由两部分组成：(1)由于支点 B 处梁轴旋转所引起的挠度 δ_1，(2)由于 BC 部分按悬臂梁作用而弯曲所引起的挠度 δ_2。为了得到挠度的第一部分，我们观察到梁的 AB 部分，处于与承受均匀荷载、作用于右端处的一个力偶 M_b(等于 $qa^2/2$)和一个竖直荷载(等于 qa)的简单梁的相同情况，如图 6-13 b 所示。B 端处的角 θ_b 为(见表 D-2 中情况 1 和情况 7)：

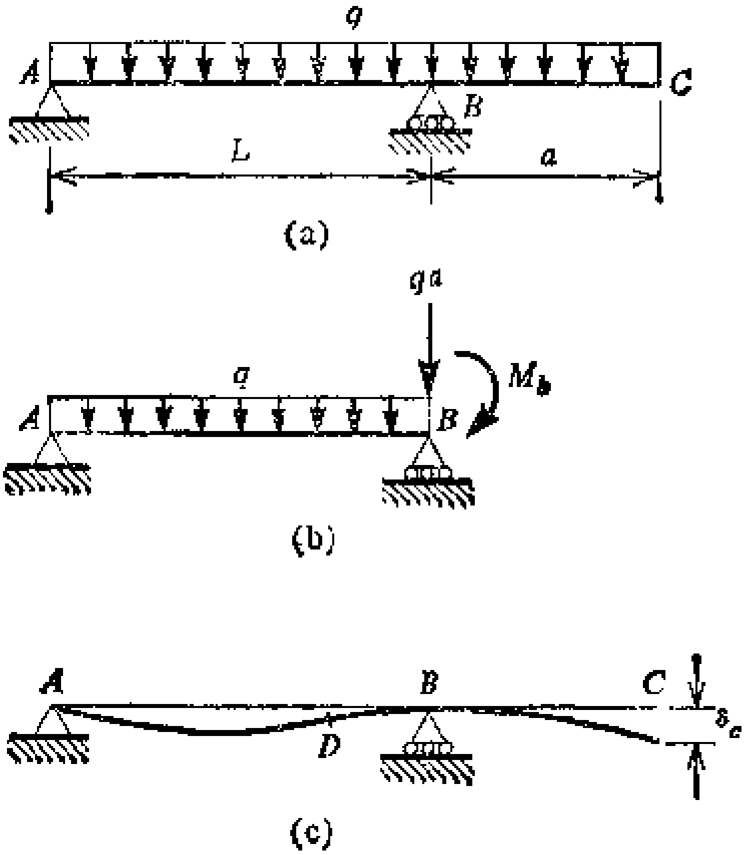


图 6-13 例题 3 带挑臂的简单梁

$$\theta_b = \frac{qL^3}{24\,EI} - \frac{M_b L}{3EI} = \frac{qL(L^2-4\,a^2)}{24\,EI}$$

由于 B 点旋转使 C 点产生的挠度 δ_1 等于 $a\theta_b$，或

$$\delta_1 = \frac{qaL(L^2-4\,a^2)}{24\,EI}$$

当向上时此挠度为正，因为当 θ_b 反时针方向旋转时假设该角为正。

挑臂本身挠曲引起 C 点向下的挠度 δ_2。此向下挠度与长度为 a 的悬臂梁之挠度相同（见表 D-1 中的情况 1）：

$$\delta_2 = \frac{qa^4}{8EI}$$

C 点的总挠度为（假设向下时为正）：

$$\delta_c = \delta_2 - \delta_1 = \frac{qa}{24\,EI}(3\,a^3 + 4\,a^2L - L^3) \tag{a}$$

从这个结果，我们看出：当 a 与 L 比较 a 为很小时，挠度 δ_c 成为负值，C 点向上变位。

本例中梁的挠度曲线形状示于图 6-13 c 中，该图表示 a 有足够大(大约 $a>0.43\ L$)以致 C 点产生向下的挠度，而 a 又为足够小以致能保证 A 点反力向上 ($a<L$) 的情况。在这些条件下，该梁从 A 到某一点(如 D 处)具有正弯矩，因此在梁的这一部分内，其挠度曲线朝下凸出。从 D 到 C，其弯矩为负，挠度曲线朝上凸出。D 点处梁轴的曲率为零(因为弯矩为零)，这个点称为拐点或反弯点。挠度曲线的曲率于拐点处改变正负号。

例题 4 试确定图 6-14 中所示结构中铰 B 处的挠度 δ_b。注意：该结构由两部分组成：(1)简单支承于 A 点处的 AB 梁，(2)固定于C点处的 BC 悬臂梁。这两根梁借铰于 B 点处连接起来。

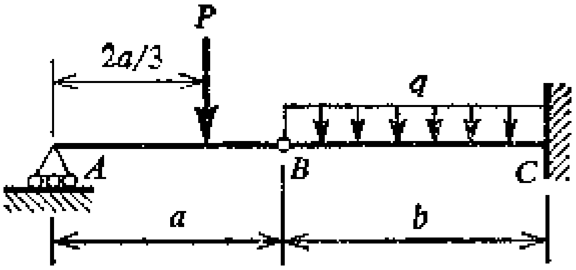


图 6-14 例题 4 带铰的梁

将 AB 梁考虑为自由体，我们看出：它的 A 端和 B 端分别存在竖向反力 $P/3$ 和 $2\ P/3$。所以，BC 梁相当于承受强度为 q 的均匀荷载和端点处作用有等于 $2\ P/3$ 的集中荷载之悬臂梁。此悬臂梁端点挠度与铰的挠度相同，为

$$\delta_b=\frac{qb^4}{8EI}+\frac{2\ Pb^3}{9\ EI}$$

6.6 非棱柱形梁

上节中对于计算棱柱形梁的挠度所介绍的方法，可容易地使之适用于求非棱柱形梁的挠度。这后一种梁包括不同部分具有不同横截面面积的梁和锥形梁(见图 6-15 a 和图 6-16 的实例)。当梁的横截面尺寸有突然变化时，在截面尺寸发生变化的诸点处将存在局部应力集中；然而，这种局部应力对于

挠度的计算不会有显著的影响．对于锥形梁，应用前面对棱柱形梁所导出的弯曲理论，将得到满意的结果，只要其锥体角很小。

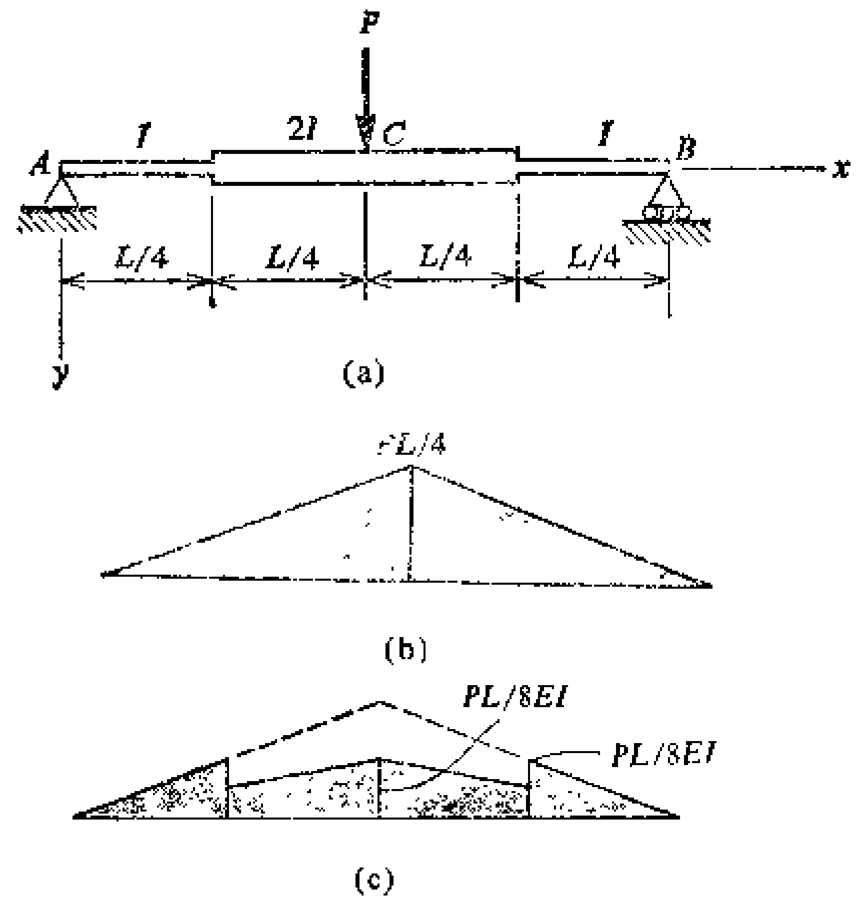


图 6-15　具有两种不同惯性矩的简单梁

挠度曲线的微分方程有时可用来求得非棱柱形梁的挠度和旋转角．现在讨论图6-15a所示的例子．假设该梁沿其中间范围加强，使梁中这一部分的惯性矩为其端头范围内惯性矩的两倍．梁左半部的挠度曲线微分方程（方程6-9d）必须按两部分来写：

$$EIv'' = -\frac{Px}{2} \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{4}\right) \tag{a}$$

$$E(2I)v'' = -\frac{Px}{2} \qquad \left(\frac{L}{4} \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}\right) \tag{b}$$

这每一个方程可以积分得出斜度和挠度的表达式. 这里将出现四个积分常数，这些常数可根据下列条件求出：(1)在$x=0$处，$v=0$；(2)在$x=L/2$处，$v'=0$；(3)在$x=L/4$处，根据方程(a)所得梁的斜度等于根据方程(b)所得的斜度；(4)在$x=L/4$处，根据方程(a)所得的挠度等于根据方程(b)所得的挠度. 有了按这些条件所求得的积分常数之后，于是我们就会知道所研究的两区段中每一区段上梁的挠度曲线. 这种求挠度曲线的方法只有当要求解的微分方程的个数限于一个或两个时，且仅当方程中出现的函数容易积分时才是实用的.

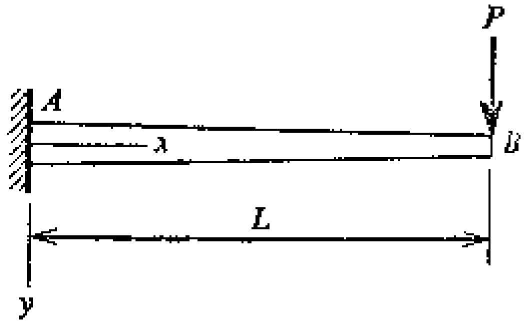


图 6-16 锥形悬臂梁

对于锥形梁的情况(图6-16)，用前面的数学方法难以求解其微分方程，理由是：其惯性矩为x的函数的表达式往往是复杂的，而且所得的方程在求解上是麻烦的.

力矩-面积法对求非棱柱形梁的挠度之应用在图6-15中作了说明. 其弯矩图示于图6-15b中，而M/EI图示于图6-15c内. M/EI图中各个部分的面积和一次矩可以用来求其转角和挠度. 例如，让我们求左边支承处的转角和中央处的挠度. 根据梁的对称性，我们知道：中心C处挠度曲线的切线是水平者. 根据力矩-面积第一定理得出左边支承处的旋转角θ_a等于A点和C点之间M/EI图的面积. 所以，其转角得出如下：

$$\theta_a=(\text{三角形的面积})+(\text{梯形的面积})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{PL}{8EI}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{16EI}+\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right)=\frac{5PL^2}{128EI}$$

A 点距 C 点处挠度曲线的切线之挠度等于梁中央处的挠度 δ_c，按照力矩-面积第二定理，它藉取 A 和 C 之间 M/EI 的面积对通过 A 的竖直线的一次矩来求得．因此

$$\delta_c = (\text{三角形的一次矩}) + (\text{梯形的一次矩})$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{PL^2}{64\,EI}\right) + \left[\frac{L}{4} + \frac{5}{9}\left(\frac{L}{4}\right)\right]\left[\frac{3\,PL^2}{128\,EI}\right]$$

$$= \frac{3\,PL^3}{256\,EI} \tag{c}$$

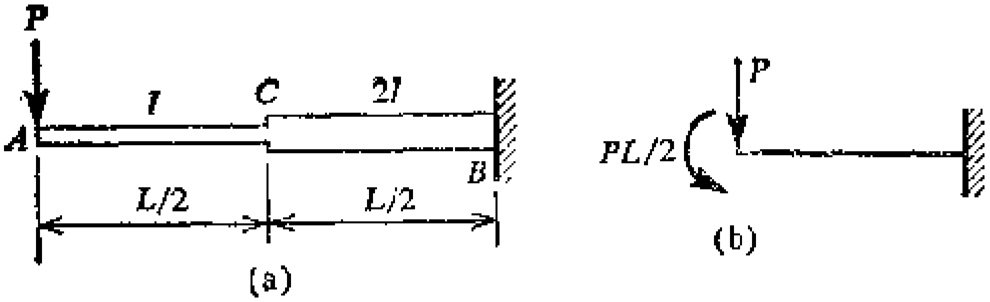


图 6-17　具有两种不同惯性矩的悬臂梁

求挠度和旋转角的另一种途径，是运用迭加方法，以图6-17a 所示悬臂梁的例子来说明．譬如，假设需要求出自由端的挠度 δ．如果我们设想梁的中点 C 坚固地固定住，这样既不变位，也不转动，于是自由端的挠度 δ_1 将与长度为 $L/2$、惯性矩为 I 的悬臂相同：

$$\delta_1 = \frac{P(L/2)^3}{3\,EI} = \frac{PL^3}{24\,EI}$$

然而，梁的 CB 部分仍象一悬臂梁（图 6-17 b）那样工作，且影响 A 点的挠度．此悬臂梁自由端的挠度 δ_c 和转角 θ_c 为：

$$\delta_c = \frac{P(L/2)^3}{3(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)^2}{2(2\,EI)} = \frac{5\,PL^3}{96\,EI}$$

$$\theta_c = \frac{P(L/2)^2}{2(2EI)} + \frac{(PL/2)(L/2)}{2\,EI} = \frac{3\,PL^2}{16\,EI}$$

挠度 δ_c 和转角 θ_c 对荷载 P 处的挠度有如下的附加影响 δ_2：

$$\delta_2=\delta_c+\theta_c\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{7}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

所以，自由端 A 的总挠度为：

$$\delta=\delta_1+\delta_2=\frac{3}{16}\frac{PL^3}{EI} \tag{d}$$

根据上述例题，我们看出，当梁为非棱柱形时、求梁挠度的任一标准方法都可以应用。其方法的选择及程序的细节则与被求解的问题有关。

6.7 有限差分法

有限差分法是一种数值法，它可用于求梁的挠度。当作用于梁上的荷载不规则时，或当梁为非棱柱形时，它特别有用。该方法的基本概念是用挠度曲线的差分近似法代替挠度曲线的微分方程（方程 6-5），然后按代数方法求解沿梁长若干点处所得的有限差分方程。方程的解由各不同点处挠度的近似值所组成。

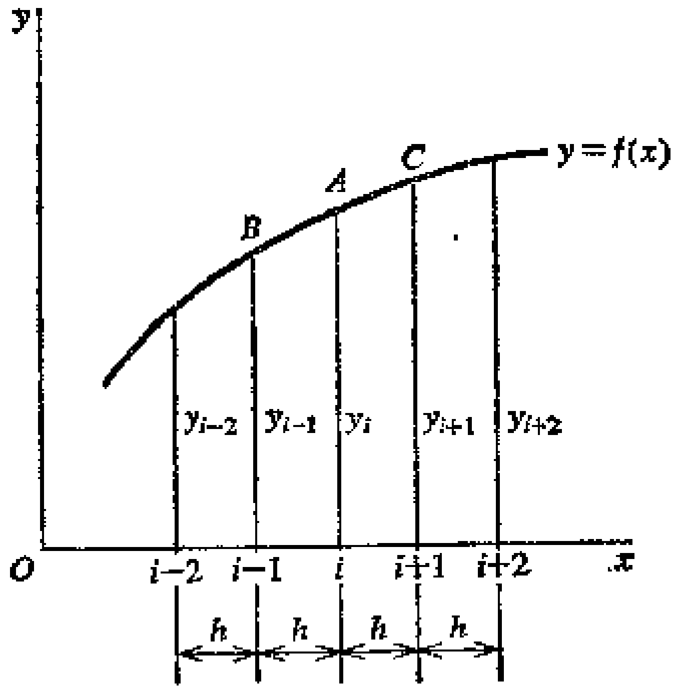


图 6-18 有限差分法

为了说明该方法，让我们从讨论图 6-18 中用图形表示的一般函数 $y=f(x)$ 来开始．其 x 轴可以分成相等间距的一系列区段，从左向右连续地将各区段端点标以号码．曲线上对应于这些点子的纵坐标用脚注来标明，这些脚注为其相应点的编号．例如在 $i-2$，$i-1$，i，$i+1$ 等点处，其纵距分别为 y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1} 等．虽然在较普遍情况下，诸点之间的距离不需要全部都相同，但在这里讨论中相邻点之间的距离均取为 h．

现在讨论相应于 x 轴第 i 点上（图 6-18）A 点处函数 y 的一阶导数 dy/dx．此导数等于 A 点处曲线的斜度，也近似地等于连接 B 点和 C 点的弦线之斜度．所以，我们得出

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} \qquad (6\text{-}28)$$

二阶导数 d^2y/dx^2 代表一阶导数的变化率．因此，在 i 点处，它可藉计算 i 点右面的斜度减 i 点左面的斜度，然后用其区段长度去除它面近似地求得．这种方法得出下列表达式：

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i \approx \frac{\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}-\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h}}{h}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} \qquad (6\text{-}29)$$

方程(6-28)和(6-29)得出一阶导数和二阶导数的有限差分表示法．这些表达式称为中心差分，因为它们包括 i 点两侧的纵距．也有可能得到（除 i 处纵距外）只包括 i 的右边的纵距或只包括 i 的左边纵距的表达式．这两种表达式分别称为前向差分和后向差分．此外，二阶以上的高阶导数也可表达成差分形式．然而，上面所得的差分公式将足以用于求梁的挠度[1]．

---

1) 对于有限差分法更完整的讨论，应参考数值方法方面的教科书（例如，见参考文献 6-11）．

结合二阶导数的差分表达式（方程 6-29）和挠度曲线的微分方程（方程 6-5），我们得到梁的有限差分方程：

$$\frac{v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}}{h^2}=-\frac{M_i}{(EI)_i}$$

或

$$v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}=-h^2\frac{M_i}{(EI)_i} \qquad (6\text{-}30)$$

在此方程中，其弯矩 M 和弯曲刚度 EI 加上脚注 i，以便标明这些量为梁 x 轴上 i 点处所求算的量。

为了应用方程(6-30)，需要沿着梁选择一系列点，然后对这些点写出有限差分方程。所得的方程组可以求解所选择点处的挠度，见下面例题所述。后面在第 7.5 节中将说明这种方法对于静不定梁分析的应用。

例题 1　　为了具体说明有限差分法，让我们讨论承受均匀荷载的简单梁的挠度计算问题(图 6-19 a)。

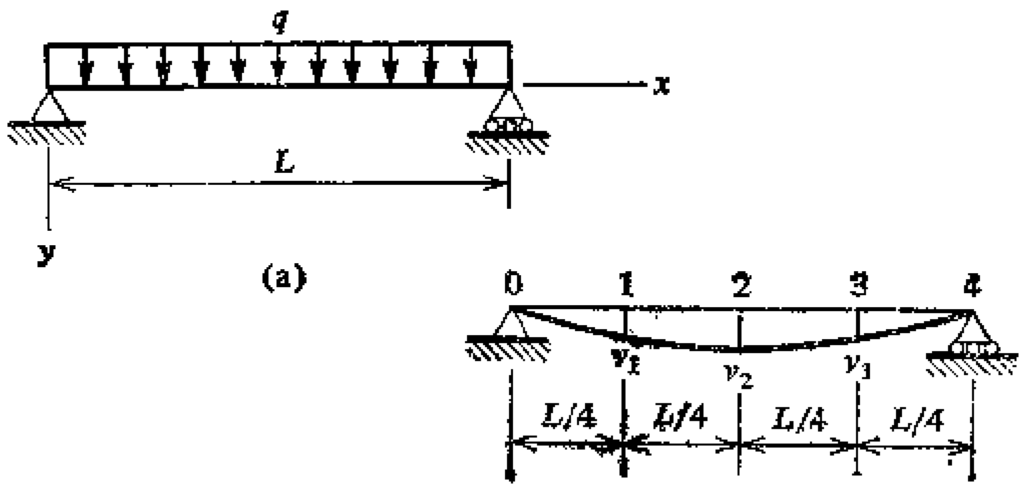


图 6-19　例题 1

假设该梁具有常数弯曲刚度 EI，其长度为 L。本例中将梁分为四个相等间隔(图 6-19 b)，所以必须确定 1,2,3 三点处的挠度。然而，由

于对称，知道这些挠度中有两个值是相同的（$v_1=v_3$），因而这些挠度中只有两个值考虑为方程中的未知量。

点 1 处由于 $h=L/4$，$M_1=3qL^2/32$，其有限差分方程（方程 6-30）成为

$$v_0-2v_1+v_2=-\left(\frac{L}{4}\right)^2\left(\frac{3qL^2}{32EI}\right)$$

此外，因为梁端处挠度为零（$v_0=0$），上述方程简化为

$$2v_1-v_2=\frac{3qL^4}{512EI} \quad \text{(a)}$$

点 2 处，弯矩 M_2 为 $qL^2/8$，差分方程成为

$$v_1-2v_2+v_3=-\left(\frac{L}{4}\right)^2\left(\frac{qL^2}{8EI}\right)$$

或，因为 $v_1=v_3$

$$v_1-v_2=-\frac{qL^4}{256EI} \quad \text{(b)}$$

现在，我们可以从方程(a)和方程(b)求解出挠度：

$$v_1=v_3=\frac{5qL^4}{512EI}=0.00977\frac{qL^4}{EI}$$

$$v_2=\frac{7qL^4}{512EI}=0.01367\frac{qL^4}{EI}$$

这些挠度的精确结果为

$$v_1=v_3=\frac{19qL^4}{2048EI}=0.00928\frac{qL^4}{EI}$$

$$v_2=\frac{5qL^4}{384EI}=0.01302\frac{qL^4}{EI}$$

比较上面所得的值，我们看出：有限差分的结果大约比精确结果要高百分之五，这对于沿梁长只采用四个区段是合理的精确度．将梁分成较多的区段，求解相应地较多的方程，可以提高其精确度（见习题 6.7-1）。

例题 2　本例题为图 6-20 a 所示非棱柱形悬臂梁。注意梁 AB 范围内的惯性矩为 BC 范围的两倍．试确定梁自由端处的挠度。

当梁分成三个相等区段时，需要求出三个未知挠度（见图 6-20 b）。0 点，1 点和 2 点处的弯矩为

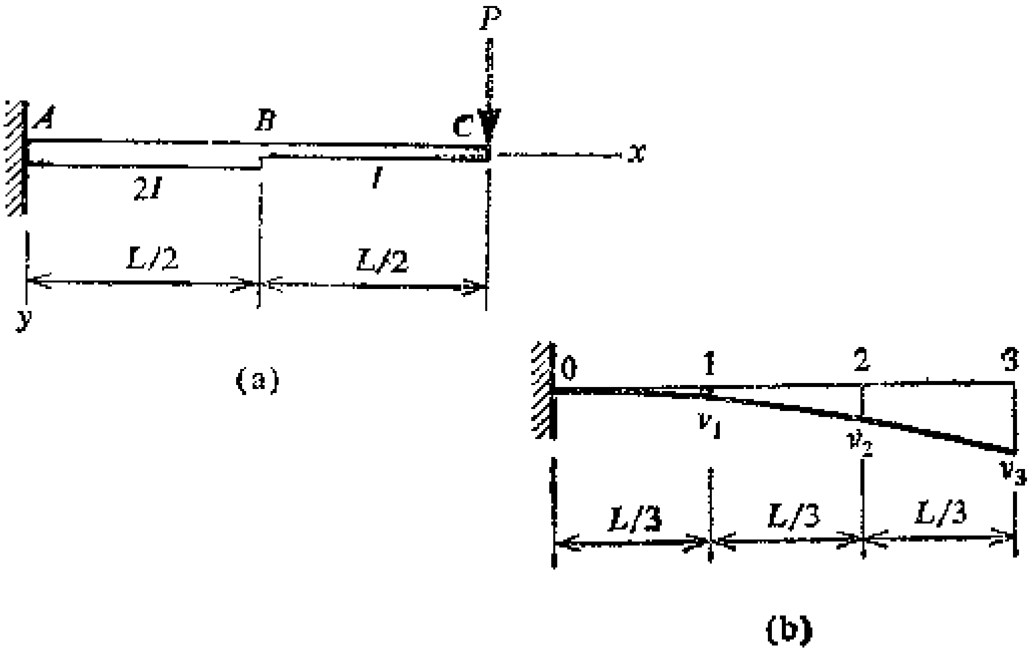


图 6-20　例题 2

$$M_0=-PL,\quad M_1=-\frac{2\,PL}{3},\quad M_2=-\frac{PL}{3}$$

因此，0 点，1 点和 2 点处的有限差分方程为：

$$v_{-1}-2\,v_0+v_1=-\left(\frac{L}{3}\right)^2\left(-\frac{PL}{2\,EI}\right) \tag{c}$$

$$v_0-2\,v_1+v_2=-\left(\frac{L}{3}\right)^2\left(-\frac{2\,PL}{3\,EI}\right) \qquad \text{(d)}[1]$$

$$v_1-2\,v_2+v_3=-\left(\frac{L}{3}\right)^2\left(-\frac{PL}{3\,EI}\right) \tag{e}$$

在这些方程的第一个方程中，出现位于固定支承左边假想点处的虚构挠度 v_{-1}。这个虚构挠度可藉应用固定支承的边界条件之一，亦即其斜度为零，以真实挠度来表达。任一函数的一阶导数按方程 (6-28) 求得其有限差分式，当将此方程用于 0 点以得出梁的斜度时，我们得到：

$$v_1-v_{-1}=0\ \text{或}\ v_{-1}=v_1 \tag{f}$$

于是，挠度 v_{-1} 已经用梁的实际挠度表示了。

固定支承处的第二个边界条件为 $v_0=0$。当用了这两个边界条件，

1) 原书误为 $v_0-2\,v_1+v_2=-\left(\frac{L}{3}\right)^2\left(-\frac{PL}{3\,EI}\right)$。——译者注

则方程(c)简化为

$$v_1=\frac{PL^3}{36\,EI}$$

现在求解剩下的有限差分方程(d)和(e)就是一件简单的事了，得出：

$$v_2=\frac{5\,PL^3}{54\,EI}\qquad v_3=\frac{7\,PL^3}{36\,EI}=0.1944\frac{PL^3}{EI}$$

按上节方程(d)得出梁自由端处的精确挠度为：

$$v_3=\frac{3\,PL^3}{16\,EI}=0.1875\frac{PL^3}{EI}$$

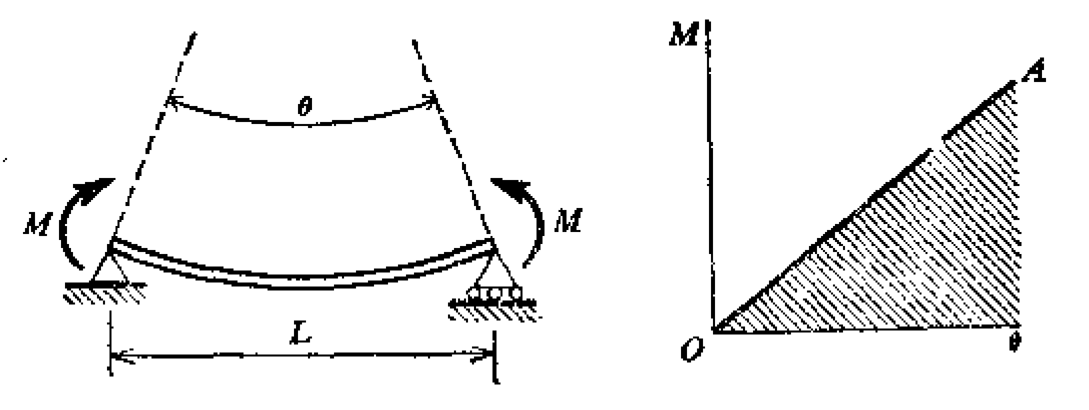
将前面所得的 v_3 值进行比较。因面，沿着梁只用三区段所得的结果仅比精确结果高百分之四。

6.8 弯曲应变能

让我们以纯弯梁的例子(图 6-21 a)并假设梁中的应力低于比例极限来开始我们对应变能的讨论. 因为该梁的弯矩M为常数，梁将弯曲成曲率为 M/EI 的圆弧. 此圆弧所张角θ

$$\theta=\frac{ML}{EI}\tag{6-31}$$

此角θ与荷载M的线性关系的图解用线OA示于图6-21 b



(a)　　　　(b)

图 6-21　(a)纯弯下的梁；(b)力矩与转角之间呈线性关系的图

中．当力偶M值自零逐渐增大到它们的最大值时，它们做了功，此功用荷载-挠度图下面的面积来表示（图 6-21 b 中阴影线所示）．这个功等于梁中所储存的应变能U，为

$$U=\frac{M\theta}{2} \tag{6-32}$$

此表达式类似于因力作用于受拉杆件上所产生的应变能的方程(1-15)，也类似因扭矩作用于轴上所产生的应变能的方程(3-15)。

现在合併方程(6-31)和(6-32)，我们可以用下面任一形式表达纯弯梁中所储存的应变能：

$$U=\frac{M^2L}{2EI} \quad 或 \quad U=\frac{EI\theta^2}{2L} \qquad (6\text{-}33\text{ a,b})$$

这些方程中的第一个方程得出以荷载M表示的应变能，而第二个方程得出以角θ表示的应变能．

如果梁不是纯弯和弯矩M沿梁的长度变化，我们可以藉考虑长度为dx的梁的单元，然后进行积分来求得其应变能．单元的两边的夹角$d\theta$为(见方程 6-4 和 6-5)：

$$d\theta=-\frac{M\,dx}{EI}=\frac{d^2v}{dx^2}dx$$

因此，该单元中所储存的应变能为：

$$dU=\frac{M^2dx}{2EI} \quad 或 \quad dU=\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2dx$$

从而，梁的总应变能为：

$$U=\int\frac{M^2dx}{2EI} \quad 或 \quad U=\int\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2dx$$

(6-34 a, b)

式中的积分是对梁的整个长度进行．

应变能的方程(6-34)仅考虑了梁中弯矩的影响．此外每一单元中还将储存有一定的剪切应变能．这后一种应变能将

在后面第 6.11 节中讨论。然而，对于细长的梁，其剪切应变能与大得多的弯曲应变能相比，可略去不计。

应变能的概念在结构分析和承受动力荷载或冲击荷载的结构设计中，具有重要的地位。然而，本节中我们只用少数简单的例子来说明如何求算梁中应变能以及如何去处理被理想化的冲击问题。

例题 1　试确定长度为 L 的悬臂梁在其自由端处集中荷载作用下该梁所储存的应变能(见图 6-6)，并求出梁端处的挠度 δ。

该悬臂梁任一横截面处的弯矩 $M=-Px$，其中 x 为离自由端的距离。将此式代入方程(6-34 a)得出：

$$U=\int_0^L \frac{P^2x^2dx}{2\,EI}=\frac{P^2L^3}{6\,EI}$$

荷载所做的功为 $P\delta/2$，令此功等于应变能 U，得：

$$\delta=\frac{PL^3}{3\,EI}$$

此表达式与前面结果一致(见第 6.4 节例题 1)。

例题 2　应用承受均匀荷载简单梁的挠度曲线(见图 6-2)方程求出梁所储存的应变能 U 的表达式。

梁的挠度曲线藉方程(6-12)求出。求该方程的二阶导数，得

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{qx}{2\,EI}(x-L)$$

现在将它代入方程(6-34 b)，并积分，我们得出：

$$U=\int_0^L \frac{q^2x^2(x-L)^2}{8\,EI}dx=\frac{q^2L^5}{240\,EI}$$

由于冲击产生的挠度　承受冲击荷载的梁的动力挠度，可藉该荷载所做功等于梁中所储存的应变能来确定。为了说明此问题，现在来讨论一简支梁，被重量为 W 的落下物打击于该梁中点处(图 6-22)。假设碰撞过程中没有能量损失，

而且梁的质量与落下物的质量相比可以略去不计. 换句话说,重量W在它下落过程中所做的功完全转变为梁的弹性应变能,而梁由于其位置改变所产生的位能略去不计.

由于重量下落经过距离 $h+\delta$ 所做的功(其中 h 为重量位于梁以上的初始高度, δ 为梁的最大挠度)为

$$W(h+\delta) \qquad \text{(a)}$$

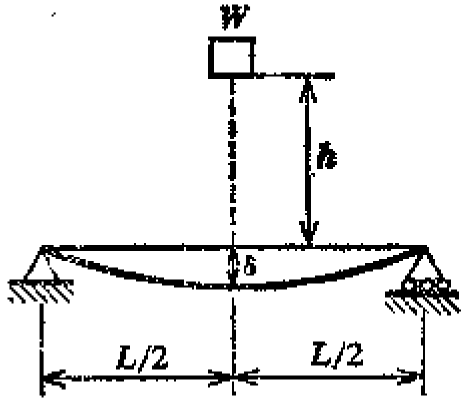


图 6-22 由于冲击使梁产生的挠度

如果我们以 P 代表当梁的挠度为最大时梁上所作用的力,并假设梁的挠曲形式与荷载 P 按静力作用时的挠曲形式相同,于是力 P 为

$$P=\frac{48\,EI\delta}{L^3}$$

梁的相应总应变能为

$$U=\frac{P\delta}{2}=\frac{24\,EI\delta^2}{L^3} \qquad \text{(b)}$$

令落下重量所做的功(见表达式 a)等于应变能(方程 b),得

$$\delta^2-2\,\delta_{st}\delta-2\,h\delta_{st}=0$$

式中 $\delta_{st}=WL^3/48\,EI$ 为荷载W按静力作用时梁的挠度. 根据上面的方程,我们可得到最大挠度:

$$\delta=\delta_{st}+\sqrt{\delta_{st}^2+2\,h\delta_{st}} \qquad \text{(6-35)}$$

根据此方程我们观察到动力挠度 δ 总是大于静力挠度 δ_{st}. 如果高度 $h=0$,意味着荷载 W 是突然作用的,而没有任何自由降落,其挠度为静力挠度的两倍. 如果高度 h 非常大,那么方程(6-35)中包括 h 的一项是主要的,该方程可以简化为 $\delta=\sqrt{2\,h\delta_{st}}$. 所有这些观察类似于前面讨论受拉杆冲击中所遇见的情况(见第 1.10 节).

根据方程(6-35)所计算的挠度 δ 代表其上限值，它是基于冲击中没有能量损失这一假定之上的. 例如，在接触表面处局部变形将会产生能量损失. 因此，梁的应变能减小，同时其最大挠度小于用方程(6-35)所推测的挠度[1].

6.9 与挠度成比例的荷载

上面梁挠度的全部讨论，均假设荷载为已知量. 然而，这里有另外各种情况，其荷载与挠度有关，而此荷载的确定成为分析的一部分. 支承着在表面上有液体聚集的梁为其一例. 当梁挠曲时，形成沉降，其中充满液体，形成池子. 池子的出现增大了荷载，因而也就增大挠度，所以更多的液体聚集在那里. 这样，其挠度将继续增大，直到梁破坏或梁达到不再有附加挠度发生的平衡位置为止. 这种状态的最普通的一个例子是在平屋顶上聚集雨水，我们称这种情况为**汇聚**问题.

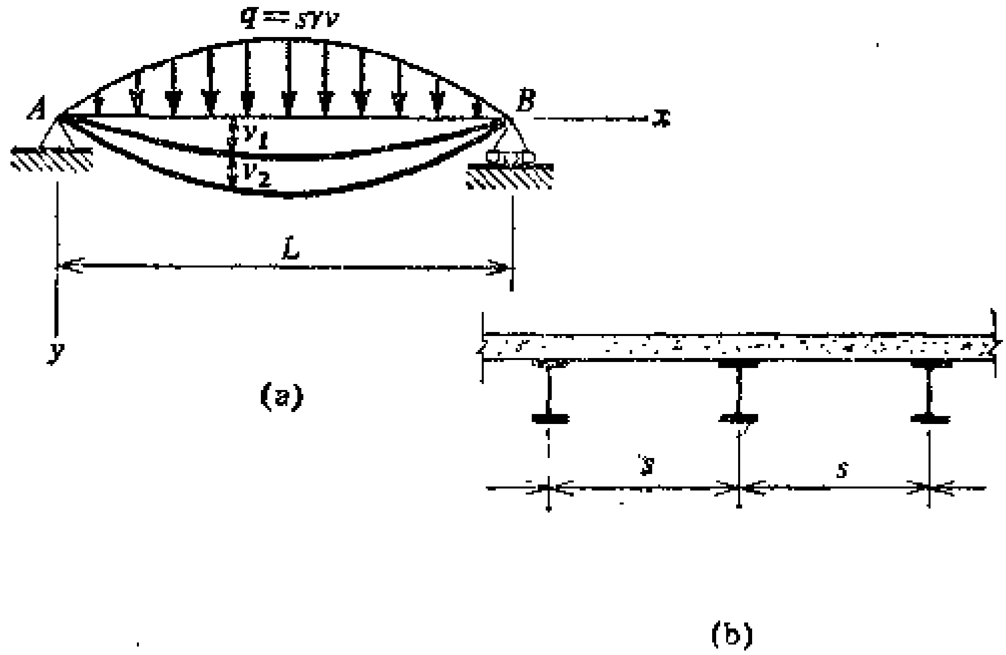


图 6-23 简单梁上的汇聚荷载

1) 如果我们考虑梁的质量，其挠度也减小，见参考文献 1-16 和 1-17.

让我们假设梁 AB(图 6-23 a)简支于端点处，它为支承平板或桥面的平行梁体系的一部分(见图 6-23 b)。在任何汇聚发生之前，假设梁具有下面表达式所表示的初始挠度 v_1：

$$v_1 = v_0 \sin \frac{\pi x}{L} \tag{a}$$

如果现在液体汇聚在板上，那么沿梁长单位距离的荷载强度将为：

$$q = s\gamma v \tag{b}$$

式中 s 为梁的间距，γ 为液体的单位体积重，v 为梁的总挠度。总挠度 v 为初始挠度 v_1 和由于汇聚液体重所产生的附加挠度 v_2 之和(图 6-23 a)。

现在，该梁可藉求解梁挠度的四阶微分方程(方程 6-9c)来分析。此方程成为：

$$EIv_2'''' = q = s\gamma v$$

将 $v = v_1 + v_2$ 代入上面方程，并从方程(a)采用 v_1，我们得出

$$EIv_2'''' - s\gamma v_2 = s\gamma v_0 \sin \frac{\pi x}{L}$$

现在用 EI 去除，并引进下面符号：

$$a^4 = \frac{s\gamma}{EI} \tag{6-36}$$

我们发现该微分方程成为：

$$v_2'''' - a^4 v_2 = a^4 v_0 \sin \frac{\pi x}{L} \tag{6-37}$$

上述微分方程具有由齐次解和特解两部分组成的通解。其中前一个解是删去右边项而代以零所得齐次方程的解；后一个解是当它代入左边时能得出右边这样的解。用求解微分方程的一般方法，我们求出齐次解：

$$(v_2)_H = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + C_3 \operatorname{ch} ax + C_4 \operatorname{sh} ax \tag{c}$$

它包括四个任意常数。这个解的确实性可藉直接代入齐次微

分方程容易地得到检验．其特解为：

$$(v_2)_p=\frac{bv_0}{1-b}\sin\frac{\pi x}{L} \tag{d}$$

式中 b 为一无量纲参数：

$$b=\frac{a^4L^4}{\pi^4}=\frac{s\gamma L^4}{\pi^4EI} \tag{6-38}$$

该特解也可藉代入微分方程来检验．

现在方程(6-37)的通解可藉组合其齐次解和特解来得到：

$$v_2=C_1\cos ax+C_2\sin ax+C_3\operatorname{ch}ax+C_4\operatorname{sh}ax+\frac{bv_0}{1-b}\sin\frac{\pi x}{L} \tag{e}$$

此解中的四个积分常数可根据下列四个边界条件来求出：(1) $x=0, v_2=0$；(2) $x=0$，$v_2''=0$；(3) $x=L, v_2=0$；(4) $x=L$，$v_2''=0$。根据前两个条件，我们求出 $C_1=C_3=0$，根据后两个条件，我们求出 $C_2=C_4=0$。因而，挠度 v_2 的最终方程仅为用方程(d)所得的特解．于是梁的总挠度 v 成为：

$$v=v_1+v_2=v_0\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{bv_0}{1-b}\sin\frac{\pi x}{L}$$

或

$$v=\frac{v_0}{1-b}\sin\frac{\pi x}{L}=\frac{v_1}{1-b} \tag{f}$$

这个最后结果表明：由于汇聚，初始挠度 v_1 按放大系数 $1/(1-b)$ 放大．当 $b=0$，此系数等于1，当 b 接近1时它将无限增大．因而，我们可以叙述为：对小于1的 b 值，亦即，对于

$$\frac{s\gamma L^4}{\pi^4EI}<1 \tag{6-39}$$

其挠度 v 具有一定值，且该梁到达平衡位置。如果 $b\geqslant1$，梁在汇聚荷载下是不稳定的，其挠度在理论上成为无限大．自然，

必须记住：微分方程限于微小的挠度和线性弹性状态的梁，因此上面的结果对于大挠度是不能成立的。

作为汇聚问题的第二个例题，让我们假设有一原来是直的简单梁，承受强度 q_0 的均匀荷载。由于汇聚，产生附加荷载 $q_1=s\gamma v$，其中 v 为梁的总挠度。所以，总荷载为 $q=q_0+s\gamma v$，其挠度曲线的微分方程成为：

$$EIv''''=q_0+s\gamma v$$

或

$$v''''-a^4v=\frac{q_0}{EI} \tag{g}$$

此方程具有与前面相同的齐次解(见方程 c)并具有下列特解

$$(v)_p=-\frac{q_0}{s\gamma} \tag{h}$$

将四个边界条件用于通解，我们得到积分常数为：

$$C_1=C_3=\frac{q_0}{2s\gamma}\qquad C_2=\frac{q_0}{2s\gamma}\operatorname{tg}\frac{aL}{2}\qquad C_4=-\frac{q_0}{2s\gamma}\operatorname{th}\frac{aL}{2}$$

知道这些常数后，挠度 v 的通解可以容易地写出来，根据它可以求算梁上任一特定截面处的挠度。例如，在梁中心处，其挠度为：

$$v_c=\frac{q_0}{2s\gamma}\left(\sec\frac{aL}{2}+\operatorname{sech}\frac{aL}{2}-2\right)$$

回忆：由于均匀荷载 q_0 单独作用时使中心处所产生的挠度(亦即没有汇聚的挠度)为 $5q_0L^4/384EI$，我们用下列形式重新表示上面的挠度：

$$v_c=\frac{5q_0L^4}{384EI}\psi_1 \tag{i}$$

其中

$$\psi_1=\frac{192}{5a^4L^4}\left(\sec\frac{aL}{2}+\operatorname{sech}\frac{aL}{2}-2\right) \tag{j}$$

系数 ψ_1 为无量纲放大系数，当 $aL=0$ 时，其值为 1；当 aL 趋近 π 时，它趋近无穷大。因而，我们再次发现：这里存在着一个临界值，当低于此值时，梁是稳定的，且到达平衡位置。此临界值用方程 $aL=\pi$ 或 $b=1$ 来得到，其稳定的条件与前面所得相同(见方程 6-39)。一般地，此适用于简单梁的稳定条件，与引起初始挠度的荷载类型无关。

藉保证梁具有足够的弯曲刚度 EI 或藉提供足够的拱度(或初始向上挠度),可以避免因汇聚产生破坏。对于有关屋顶体系变形的特殊设计,见参考文献 6-12 和 6-13,其中有附加参考文献。

对于集中荷载的大小与荷载处的挠度有关的那些情况(习题 6.9-1 和 6.9-2 属于这种类型的例子),通常可作为比上面汇聚问题性质要简单得多的另一分析类型。

6.10 热效应

温度均匀增加引起非约束杆或梁的长度产生下列增长值:

$$\Delta L=\alpha L\Delta T \tag{6-40}$$

式中 ΔL 代表长度的增长值,α 为热膨胀系数[1],L 为原来的长度,ΔT 为温度的增高值. 如果梁以这样的方式支承着,其纵向膨胀可以自由地产生,如本章中已讨论过的所有梁的情况那样,那么温度均匀变化将不会使梁中产生任何应力. 这种梁不会存在任何横向挠度,因为没有使梁弯曲的趋势.

如果温度沿梁的高度不是常数,梁的状态则完全不同。例如,假设有一简单梁,原来是直的,处于均匀温度 T_0 下,然后其顶面温度变为 T_1,底面温度变为 T_2,如图 6-24a 所示. 如果我们假定梁顶和梁底之间的温度为直线变化,那么梁的平均温度为 $T_{aver}=(T_1+T_2)/2$,发生于一半高度处。此平均温度和其初始温度 T_0 之间的任何差异,将引起梁的长度改变,如上段所述. 梁顶与梁底之间的温度差 $\Delta T=T_2-T_1$ 将引起梁轴弯曲,这意味着产生横向挠度.

为了研究此横向挠度,我们可讨论长度为 dx 的单元的变形(图 6-24b)。该单元底面和顶面长度的变化分别为 $\alpha(T_2-T_0)dx$ 和 $\alpha(T_1-T_0)dx$。如果 T_2 大于 T_1,那么该单元的两

1) α 值的表给于第 1.7 节中.

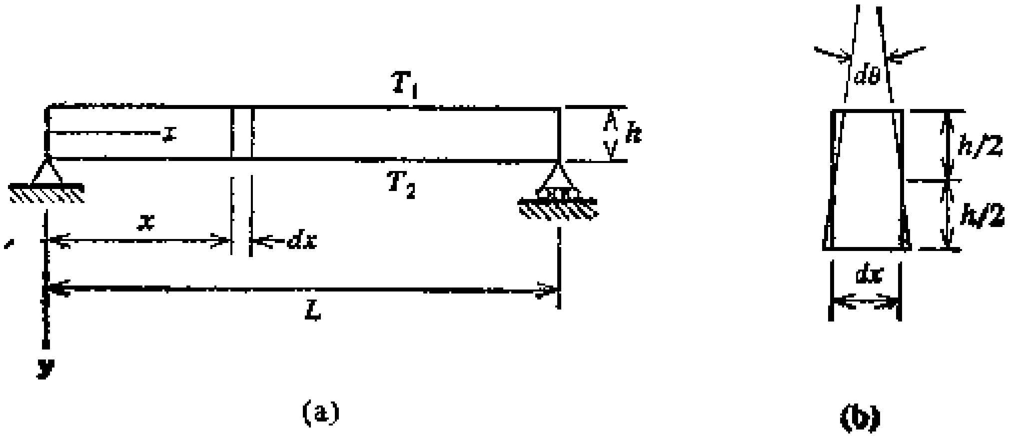


图 6-24　梁内的热效应

侧边将彼此相对地旋转 $d\theta$ 角，如图 6-24 b 所示．此 $d\theta$ 角藉按图示几何关系所得的下列方程与其尺寸的变化联系起来：

$$hd\theta=\alpha(T_2-T_0)dx-\alpha(T_1-T_0)dx$$

或

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{\alpha(T_2-T_1)}{h} \tag{6-41}$$

式中 h 为梁的高度．我们已知道：$d\theta/dx$ 这个量代表梁的挠度曲线的曲率，所以，我们导出挠度曲线的微分方程：

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{\alpha(T_2-T_1)}{h} \tag{6-42}$$

此方程中的减号是为了保持前面所采用的正负号规则所需要的；注意：当 T_2 大于 T_1 时，其曲率将为负值．$\frac{\alpha(T_2-T_1)}{h}$ 这个量为 $\frac{M}{EI}$ 一量的对应物，后面这个量已出现于前面挠度曲线的微分方程中．

现在，我们已建立方程(6-42)，它为梁顶和梁底之间温度变化下梁的基本微分方程，我们可以应用对于弯矩效应已述的相同方法来求解此方程．亦即，我们可以连续地积分此方程得到 dv/dx 和 v，然后，我们应用边界条件去求其积分常

数。或者，可以应用力矩-面积法的定理，在这些定理中全部用 $\alpha(T_2-T_1)/h$ 去代替 M/EI。习题6.10-1至习题6.10-3可用这些方法中的任一个方法求解。

6.11 剪切变形的效应

在本章上述部分中，求挠度时只考虑了弯曲变形的影响。由于剪切变形产生附加挠度，这种剪切变形对于矩形横截面梁引起长度为 dx 的梁的单元发生如图 6-25 a 所示的变形。因为剪应力沿梁的高度而变，梁的横截面将形成曲线形。该图仅说明由于剪切所产生的变形，因此图中将弯曲变形和作用于该单元上的弯矩省略了。mn 线代表梁的原来轴线，假设此线是水平者，而 mp 线表示原来轴线在剪切变形产生之后的位置。如果假设 m 点和 n 点处该单元的侧边保持竖直，那么梁的顶缘和底缘将平行于 mp 线，该 mp 线与水平线成 γ_c 角(γ_c 为中性轴处的剪切应变)。如果将该单元分成许多层，每一层假设处于纯剪，那么该单元的变形可以容易地使之形象化（图 6-25 b）。在第 1 层中，其剪切应变为 γ_c，但是，第 2 层和第 3 层中的剪切应变 γ 将小于 γ_c。最外第 4 层中的剪切应变必定为零，因此，此层的侧边成直角。

由于剪切单独作用所产生的梁的挠度曲线之斜度，近似地等于中性轴处的剪切应变(见图 6-25 a)。因而，用 v_s 代表由于剪切单独作用所产生的挠度，我们得到下列斜度表达式：

$$\frac{dv_s}{dx}=\gamma_c=\frac{\alpha_s V}{GA} \tag{6-43}$$

式中 V/A 为剪力被梁的横截面积去除所得的平均剪应力；α_s 为一数值因数（或**剪切系数**），用它与平均剪应力相乘得到横截面形心处的剪应力；G 为剪切弹性模量。对于矩形横截面 $\alpha_s=\frac{3}{2}$(见方程 5-20)，对于圆形横截面 $\alpha_s=\frac{4}{3}$(见方程 5-23)，对于 I 梁 α_s 近似地等于 A/A_w，其中 A_w 为梁的腹板面积。GA/α_s 这个量称为梁的**剪切刚度**[1)]。

1) 梁的剪切刚度在用虚功法确定时为 GA/f_s，其中 f_s（称为剪切的**形式系数**）可以与剪切系数 α_s 不相同，见第 11.4 节。

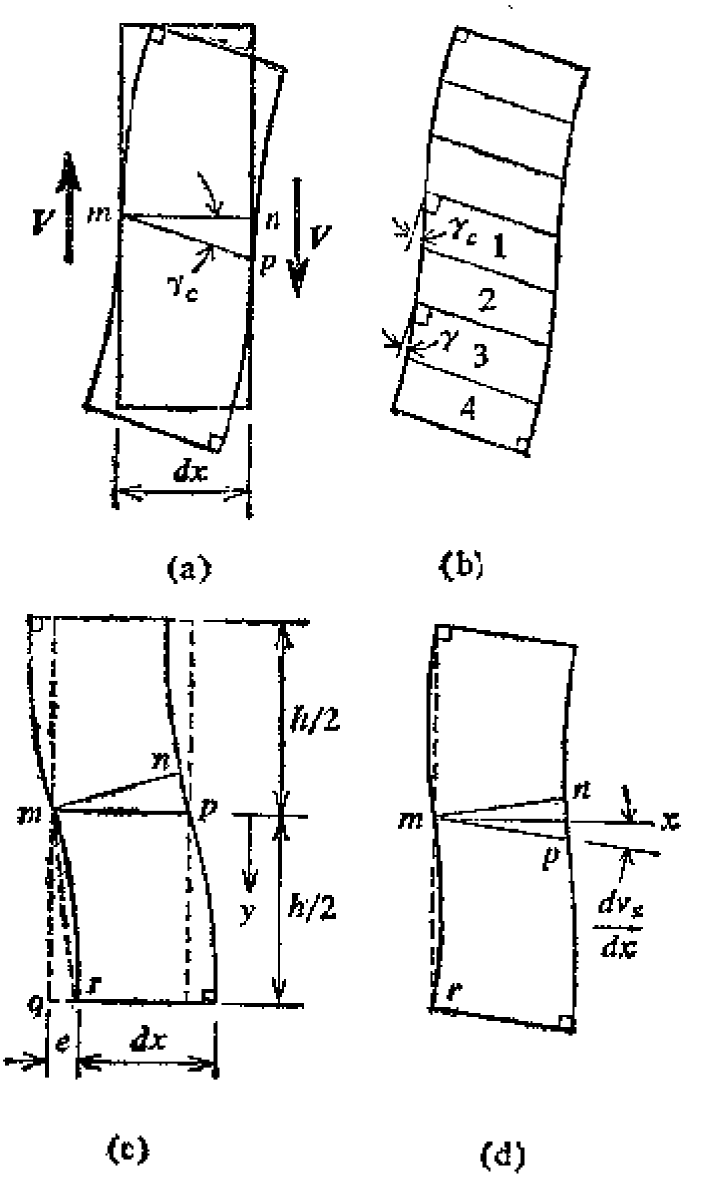


图 6-25 梁内的剪切变形

当梁上作用有连续分布荷载 q 时，其剪力 V 为连续函数，可对 x 进行微分. 于是由于剪切单独作用所引起的曲率为

$$\frac{d^2v_s}{dx^2}=\frac{\alpha_s}{GA}\frac{dV}{dx}=-\frac{\alpha_s q}{GA} \tag{a}$$

梁的总挠度为本章上节叙述中所求得的弯曲挠度 v_b 和剪切挠度 v_s 之和；因而 $v=v_b+v_s$. 所以，总曲率为：

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2v_b}{dx^2}+\frac{d^2v_s}{dx^2}=-\frac{M}{EI}-\frac{\alpha_s q}{GA} \tag{6-44}$$

此方程可藉连续积分去求解，以确定出必须考虑剪切影响情况下的梁

的挠度。

梁的端点条件可用来求算方程(6-44)的解中所出现的积分常数。例如，在简单支承处，挠度为零($v=v_b=v_s=0$)。在固定支承处，挠度也为零，但是斜度条件与梁端头是如何固定的有关。如果中性轴处单元的侧边保持竖直(如图 6-25 a 中所示)，那么斜度的条件为

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=\gamma_c \tag{b}$$

因为在这种情况下，支承处梁的轴线由于弯曲变形所引起的斜度为零，而由于剪切变形产生的斜度为 γ_c。如果梁以端点处总挠度曲线的斜度为零这样的方式约束住，那么其条件为

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=0 \tag{c}$$

梁端用 mp 线为水平来定其位置，如图 6-25 c 所示。

另一种可能性是梁的顶部和底部保持在一竖直线上(图 6-25 d)。在这种情况中，mn 线和 mp 线均不保持水平。而其斜度 dv_s/dx 可藉顺时针旋转图 6-25 c 中的单元直到 mr 成竖直线为止来求得。其旋转角为 qmr，等于 e 被 $h/2$ 去除。显然距离 e 为

$$e=\int_0^{h/2}\gamma dy \tag{d}$$

式中 γ 为离中性轴距离 y 处(图 6-25 c)的剪切应变(图 6-25 b)。对于这种情况的边界条件现在可以叙述如下：

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=\frac{2e}{h} \tag{e}$$

对于任一特定形状的横截面，方程(d)所表达的 e 量都可以求算出来。对于宽度为 b 的矩形横截面梁，我们得：

$$e=\int_0^{h/2}\gamma dy=\frac{1}{G}\int_0^{h/2}\tau dy=\frac{1}{bG}\int_0^{h/2}\tau b dy=\frac{V}{2bG} \tag{f}$$

条件(e)成为

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=\frac{V}{GA} \tag{g}$$

式中 $A=bh$ 为横截面面积。对于 I 梁，腹板几乎承受剪力的全部，沿整个腹板高度上的剪应力接近于均匀，因此我们得

$$e=\int_0^{h/2}\gamma dy=\frac{1}{G}\int_0^{h/2}\tau dy=\frac{1}{t_wG}\int_0^{h/2}\tau t_w dy\approx\frac{V}{2t_wG} \qquad \text{(h)}$$

其条件成为

$$\frac{dv_b}{dx}=0 \qquad \frac{dv_s}{dx}=\frac{V}{GA_w} \qquad \text{(i)}$$

式中 $A_w\approx ht_w$ 为梁的腹板面积。

为了说明剪切挠度的计算，让我们以作用有均匀荷载 q 的简单梁(见图 6-2)作为第一个例子。该梁的曲率方程为(见方程 6-44)：

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{q}{2EI}(xL-x^2)-\frac{\alpha_s q}{GA}$$

连续两次积分后，得出挠度 v：

$$v=\frac{q}{24EI}(x^4-2x^3L)-\frac{\alpha_s q}{2GA}x^2+C_1x+C_2$$

梁端处($x=0$ 和 $x=L$)其挠度 v 为零，从而得出 C_1 和 C_2 的下列表达式：

$$C_1=\frac{qL^3}{24EI}+\frac{\alpha_s qL}{2GA} \qquad C_2=0$$

所以，梁的挠度曲线为

$$v=\frac{qL^4}{24EI}\left(\frac{x}{L}\right)\left(\frac{x^3}{L^3}-2\frac{x^2}{L^2}+1\right)+\frac{\alpha_s qL^2}{2GA}\left(\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{x}{L}\right) \qquad \text{(6-45)}$$

此方程的右边有两项，第一项为由于弯曲产生的挠度（与方程 6-12 相比较），第二项给出由于剪切变形所产生的附加挠度。

在梁的中心处($x=L/2$)，其挠度为

$$v_c=\frac{5qL^4}{384EI}+\frac{\alpha_s qL^2}{8GA}=\frac{5qL^4}{384EI}\left(1+\frac{48}{5}\frac{\alpha_s EI}{GAL^2}\right) \qquad \text{(6-46)}$$

剪切效应的相对重要性可藉研究此方程中最后一项来判断。如果剪切变形略去不计，那么其效应与我们假设梁在受剪上为无穷大刚度（$GA/\alpha_s=\infty$）一样，因此上述方程中最后一项变为零，只留下弯曲挠度。当计入剪切效应时，最后一项就要保留着，我们发现其挠度增大。对于实心梁，譬如对于矩形横截面梁，其最后一项的值与 1 相比是很小的，但是对于其它的梁，譬如对于夹层梁，它可能非常大。

为了得出一些数字结果，现讨论高度为 h、$E/G=2.5$ 的矩形横截

面梁（因而 $\alpha_s=1.5$，$I/A=h^2/12$），对于这种情况，其中心处挠度为

$$v_c=\frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}\left(1+3\frac{h^2}{L^2}\right) \tag{6-47}$$

可以看出：对于 $L/h=10$ 的情况，剪切变形的效应为使其挠度增大百分之三。对于L/h 为较小的比值，亦即对于短梁、高梁，此效应增大。对于 I 梁，其效应与对矩形梁相似，只是剪切挠度的大小通常大两倍或三倍。对于夹层构造梁，由于剪切所产生的挠度可能增大到百分之50.

上面求解剪切挠度所用的微分方程是在梁的每一横截面可以自由扭曲（如图 6-25 a 所示）的假定之上推导出来的。均匀加载的简单梁是近于满足这个假定的一种情况。在梁的中央处，其横截面可以没有扭曲（由于对称）。然而，由于中央处 $V=0$，该截面处没有扭曲的趋势。扭曲从梁中央处向梁端逐渐增大，如同剪力从中央处向梁端逐渐增大一样。这样，由扭曲提供的抵制其挠度的附加约束仅有较小的效应。然而，可以看出约束扭曲的效应减小上面所计算的挠度。

精弹性理论方法的应用，对于承受均匀荷载的矩形横截面简单梁，其挠度曲线已经确定（参考文献 6-14）。当泊松比 $\nu=0.25$ 时，中央处的挠度求出为：

$$v_c=\frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}\left(1+2.2\frac{h^2}{L^2}\right) \tag{6-48}$$

从它所得的挠度稍小于根据方程(6-47)所得的挠度。在上述结果中的第二项不仅考虑剪切效应，而且还考虑竖直方向应力 σ_y 的效应（因作用于梁顶的均匀荷载 q 所产生）。

第二个例子我们将讨论在中央处作用有集中荷载 P 的简单梁。在梁的左半部，其弯矩、剪力和荷载的强度分别为 $M=Px/2$，$V=P/2$ 和 $q=0$。因此，由于弯曲和剪切产生的曲率方程成为：

$$\frac{d^2v_b}{dx^2}=-\frac{Px}{2EI} \qquad \frac{d^2v_s}{dx^2}=0 \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}\right)$$

这两个方程必须分别积分，而不象第一个例子采用合在一起的形式，因为与弯曲挠度和剪切挠度有关的斜度边界条件在梁中央处是不同的。

对于v_b的微分方程两次连续积分，应用$x=\dfrac{L}{2}$处$\dfrac{dv_b}{dx}=0$ 和 $x=0$ 处 $v_b=0$

这一事实作为边界条件，得出弯曲挠度为：

$$v_b=\frac{PL^3}{48EI}\left(\frac{x}{L}\right)\left(3-4\frac{x^2}{L^2}\right)\qquad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}\right)$$

对于 v_s 的微分方程之积分，得出

$$\frac{dv_s}{dx}=C_1$$

它表明：由于剪切产生的斜度在整个梁的左半部为常数．此斜度等于 $\alpha_s V/GA$，如方程(6-43)所示。第二次积分，结合 $x=0$ 时，$v_s=0$ 的条件，得出由于剪切单独作用所产生的挠度方程：

$$v_s=\frac{\alpha_s P x}{2GA}\qquad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}\right)$$

总挠度$\left(\text{对于 } 0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}\right)$为

$$v=v_b+v_s=\frac{PL^3}{48EI}\left(\frac{x}{L}\right)\left(3-4\frac{x^2}{L^2}\right)+\frac{\alpha_s Px}{2GA}\tag{6-49}$$

而在梁中心处，我们得

$$v_c=\frac{PL^3}{48EI}\left(1+\frac{12\alpha_s EI}{GAL^2}\right)\tag{6-50}$$

每一种特定情况下剪切变形的相对重要性也可以藉用数值求算括号内最后一项来确定．

根据求解微分方程所得上述解(方程 6-49)给出太大的挠度，因为忽视了扭曲效应，正如前面所指出那样。根据对称性，我们知道梁的中央横截面必定保持为平面，该处没有扭曲发生．然而贴近中央的左面和右面截面上分别承受剪力 $P/2$ 和 $-P/2$，这些截面将会发生扭曲．因为它们趋于向相反方向扭曲，但在此过程中受到约束，必定产生附加应力．附加的扭曲约束将阻碍梁的挠度，因此实际剪切挠度将小于上面所确定的挠度．

对于 $E/G=2.5$ 的矩形横截面梁，按方程(6-50)所得的中央处挠度为

$$v_c=\frac{PL^3}{48EI}\left(1+3.75\frac{h^2}{L^2}\right)\tag{6-51}$$

它可以用来与 $\nu=0.25$，$E/G=2.5$ 情况下按弹性理论所得的下列较为精确的结果(参考文献 6-15)进行比较：

$$v_c=\frac{PL^3}{48\,EI}\left(1+2.78\frac{h^3}{L^3}-0.84\frac{h^4}{L^3}\right) \tag{6-52}$$

这后一个方程得出的挠度比方程(6-51)所得的要小，因为它考虑了靠近荷载所作用的梁中心处的局部应力。

第三个例子考虑左端固定、自由端处承受集中荷载 P 的悬臂梁(见图 6-6)。其弯曲挠度 v_b 前面已经求出(见第 6.4 节例题 1)，这里只要讨论剪切挠度 v_s。因为剪力为常数，由于剪切所产生梁的斜度 dv_s/dx 也为常数。此斜度的大小与梁的左端是如何支承有关。如果单元的侧边在中性轴处保持竖直，而梁的端头自由扭曲(见图 6-25 a)，那么其斜度为

$$\frac{dv_s}{dx}=\frac{\alpha_s P}{GA}$$

剪切挠度为

$$v_s=\frac{\alpha_s P}{GA}x \tag{j}$$

如果挠度曲线在支承处保持水平，而端横截面扭曲成如图 6-25 c 所示，那么 $dv_s/dx=0$，且无剪切挠度 v_s。最后，如果支承处梁的顶缘和底缘彼此保持在竖直线上，梁扭曲如图 6-25 d 所示，那么由于剪切产生的斜度为

$$\frac{dv_s}{dx}=\frac{2\,e}{h}$$

由于剪切单独产生的挠度曲线为

$$v_s=\frac{2\,e}{h}x \tag{k}$$

悬臂梁自由端处的总挠度藉将 $x=L$ 代入上面 v_s 方程，将其结果加上 $PL^3/3EI$(此项是由于弯曲使自由端处产生的挠度)来求得。

藉弹性理论方法所求悬臂梁端处的挠度可从上面对于中央处作用有集中荷载的简支梁所得的公式以 2 P 代替 P 和以 2 L 代替 L 来求出(见方程 6-52)。所得的挠度对于具有阻止扭曲的固定端(亦即端点横截面假设保持为平面)的悬臂梁是能成立的[1]。

---

1) 剪切对于梁的挠曲公式之效应是由 Poncelet 介绍的(参考文献 6-16)。

在上面所有推导中，我们采用了剪切系数 α_s，它定义为中性轴处剪应力(或应变)与其横截面上平均剪应力(或应变)之比。按这种方法所确定的 α_s 值是为了用于计算剪切刚度 GA/α_s。然而，剪切刚度的较精确的确定藉应用弹性理论已经求出来了。下面的 α_s 公式摘自参考文献 6-17，该文献还包括有剪切系数这个课题方面的参考文献目录。对于实心矩形横截面和实心圆形横截面，其系数分别为

$$\alpha_s=\frac{12+11\nu}{10(1+\nu)} \qquad \alpha_s=\frac{7+6\nu}{6(1+\nu)} \qquad (6\text{-}53\text{ a, b})$$

在 $\nu=0.3$ 的情况下，我们根据这些方程对矩形和圆形分别得出 $\alpha_s=1.18$ 和 $\alpha_s=1.13$。将这两个新的值(而不是 3/2 和 4/3 值)用于前面所推导的剪切挠度方程，我们得出较小的挠度值。自然，必须时常记住：对于静力挠度问题，计算剪切挠度时，不需要高的精确度，因为它只占总挠度的百分之几。

确定梁的剪切挠度的另一种方法是单位荷载法(见第 11.4 节)，它是建立于虚功原理之上的。这种方法对于矩形梁的剪切挠度一般得出的结果要比应用剪切系数 3/2 从微分方程所得的要稍微小一些，但是很接近应用 $\alpha_s=1.18$ 所得的结果。藉单位荷载法求梁的剪切挠度之讨论叙于第 11.4 节内，对于各种加载条件下梁的剪切挠度公式表载于参考文献 6-18 中。

在求夹层梁的挠度时(见第 5.8 节)，通常需要考虑剪切变形的效应，因为芯子材料的剪切模量 G_c 通常很小，因此其剪切刚度就小。本节中已经叙述过的方法可以用来计算这种梁的挠度。梁的弯曲刚度 EI 用 E_fI_f 代替，其中 E_f 为表面材料的弹性模量，I_f 为它们的惯性矩(见方程 5-37)。其剪切刚度 GA/α_s 成为 G_cA_c，而为我们可以假设剪应力沿整个芯子面积 A_c 为均匀分布，因此，其剪切系数 α_s 变为等于 1。在实际应用中，由于夹层梁中所用的材料是多样的，经常碰到弯曲刚度和剪切刚度不能用计算求得，因为缺乏准确的数据。在这种情况下，对于特定材料和所用结构类型必须用实验来确定这些刚度。

剪切应变能　梁中单元由于剪力 V 的效应所储存的能量表达式可以容易地求得。从图 6-25 a，我们看出由于剪力所做的功等于该单元中所储存的应变能 dU_s：

$$dU_s=\frac{V\gamma_c dx}{2}$$

应用方程(6-43)，我们可以将此表达式再写成：

$$dU_s=\frac{\alpha_s V^2 dx}{2GA}$$

从而，单独由于剪切效应使梁中储存的总应变能为：

$$U_s=\int\frac{\alpha_s V^2 dx}{2GA} \qquad (6-54)$$

剪切应变能可以与弯曲应变能(方程 6-34)相加得出总应变能。自然，在大多数情况下，剪切应变能与弯曲应变能相比是可以忽略不计的[1]。

6.12 梁的大挠度

本章中前面所确定的梁之挠度是藉求解近似的微分方程 $EIv''=-M$ 而得到的，只要梁的斜度很小，这样做是满意的。当斜度很大时，其挠度也变为很大，就必须应用挠度曲线的精确微分方程。这种方程建立于梁的材料保持线性弹性的假定上，它为(见方程 6-1 和 6-2)：

$$EI\frac{d\theta}{ds}=-M \qquad (6-55)$$

$d\theta/ds$ 这个量代表梁的曲率，亦即 θ (挠度曲线的旋转角) 的变化对 s (沿曲线本身度量的距离) 的变化之比率。当旋转很小时，距离 s 就与距离 x 相同，其旋转角与斜度 dv/dx 相同；因此，$d\theta/ds$ 近似地等于 d^2v/dx^2。然而，对于大挠度，这种简化是不能成立的，而必须求解方程(6-55)。根据此方程所求得的弹性曲线的精确形状称为**弹性线**。

对于许多不同类型梁和不同的加载情况，已经求得了其弹性线问题的数学解。因为其解很长，这里不予详细列

---

1) 虚功法导出与方程(6-54)相似的梁中剪切应变能之表达式，只是剪切系数 α_s 用形式系数 f_s 来代替，见方程(11-17)。

出．然而我们将给出实用所关心的一个例子的最终结果以及说明能够求得其它解的参考文献[1]．

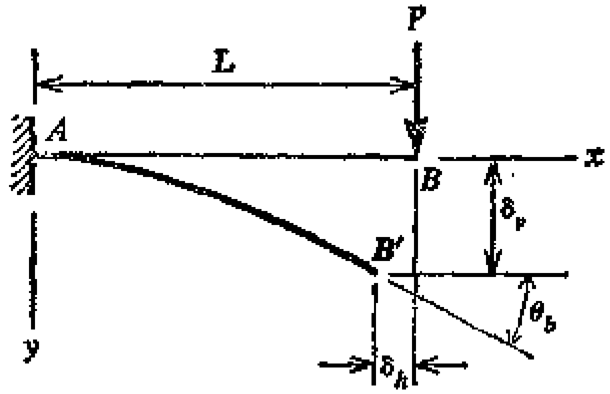


图 6-26 悬臂梁的大挠度

让我们讨论图6-26中所示的悬臂梁 AB．假设荷载 P 使梁产生大挠度，使梁端从 B 点移到 B' 点．以 θ_b 表示梁端的旋转角，分别以 δ_h 和 δ_v 表示水平位移和竖直位移．挠度曲线的长度 AB' 等于原来的长度 L，因为略去了由于直接拉伸所引起的长度轴向变化．由于该梁是静定者，其弯矩 M 的表达式可以容易地求得，并代入方程(6-55)．于是，在方程的大量操作之后，包括因变量的变换，以及应用适当的边界条件，方可以得出以椭圆函数来表示的方程的解[2]．根据这个解，得到求 θ_b, δ_v 和 δ_h 的方程．具体地说，用于求 θ_b 角的超越方程如下：

$$F(k)-F(k,\phi)=\sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \tag{6-56}$$

---

1) 弹性线问题首先为 Jacob Bernoulli, Euler, Lagrange 和 Plana 所研究（参考文献 6-19 至 6-24）．弹性线问题的解可在参考文献 6-25 至 6-28 中找到．关于梁的大挠度的最完整的参考文献是 R. Frisch-Fay 所写的书（参考文献 6-28），其中包括有许多参考文献．另一个文献目录可在参考文献 6-29 中找到．

2) 椭圆函数在高等数学教科书中有详细的讨论，例如见参考文献 6-30．

此方程中诸项的定义如下：

$$k=\sqrt{\frac{1+\sin\theta_b}{2}} \qquad (a)$$

$$\phi=\arcsin\frac{1}{k\sqrt{2}} \qquad (b)$$

$$F(k)=\text{第一类完全椭圆积分}=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \qquad (c)$$

$$F(k,\phi)=\text{第一类椭圆积分}=\int_0^{\phi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \qquad (d)$$

许多手册中[1]列有对于各种自变量 k 和 ϕ 值的椭圆积分 $F(k)$ 和 $F(k,\phi)$ 之数值表。

由于方程(6-56)的超越性质，它必须用试凑法求解得到 θ_b。其程序如下：(1)在 0° 和 90° 之间假设一个 θ_b 值；(2) 根据方程(a)计算 k；(3) 根据椭圆函数表得到相应的 $F(k)$ 值；(4) 按方程(b)计算 ϕ；(5) 知道 k 和 ϕ 之后，查表得到 $F(k,\phi)$ 的值；(6) 根据方程(6-56) 计算荷载 P。这种方法得到相应于 θ_b 特定假设值的荷载 P。藉对 θ_b 的其它假定值重复计算，我们可以确定许多相应的 P 值和我们所需要的 θ_b 值。按这种方式所确定的一系列数值示于表 6-1 中[2]。注意：对于小的荷载值，按方程 $\theta_b=PL^2/2EI$ 所求出的旋转角是非常准确的。

悬臂梁梁端处竖直挠度的方程为：

$$\frac{\delta_v}{L}=1-\sqrt{\frac{4EI}{PL^2}}\left[E(k)-E(k,\phi)\right] \qquad (6\text{-}57)$$

---

1) 例如见参考文献 6-11 至 6-33。

2) 表 6-1 中所列的值是 Rojahn 计算的(参考文献 6-34)。

表 6-1　承受集中荷载的悬臂梁(见图 6-26)之旋转角和挠度

$\frac{PL^2}{EI}$	$\frac{\theta_b}{\pi/2}$	$\frac{\delta_v}{L}$	$\frac{\delta_h}{L}$
0	0	0	0
0.25	0.079	0.083	0.004
0.50	0.156	0.162	0.016
0.75	0.228	0.235	0.034
1	0.294	0.302	0.056
2	0.498	0.494	0.160
3	0.628	0.603	0.255
4	0.714	0.670	0.329
5	0.774	0.714	0.388
6	0.817	0.744	0.434
7	0.849	0.767	0.472
8	0.874	0.785	0.504
9	0.894	0.799	0.531
10	0.911	0.811	0.555
∞	1	1	1

其中

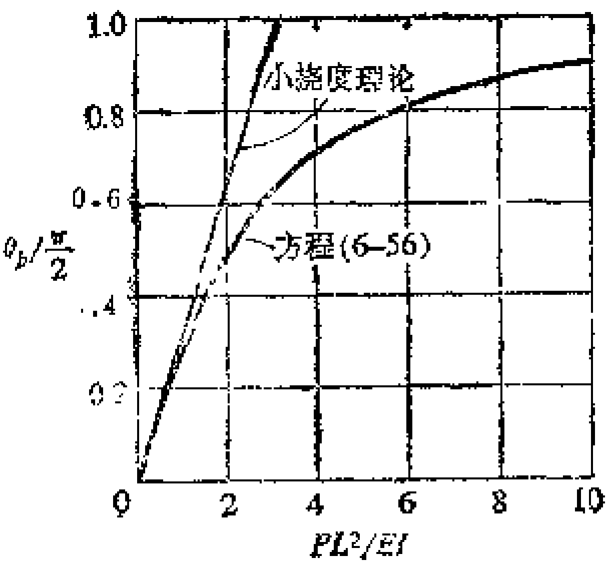
$$E(k)=\text{第二类完全椭圆积分}$$
$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \tag{e}$$
$$E(k,\phi)=\text{第二类椭圆积分}$$
$$=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \tag{f}$$

应用方程(6-56)解中已得到的 θ_b, k, ϕ 和 PL^2/EI 值，容易求解方程(6-57)。唯一额外的步骤是按表确定 $E(k)$和 $E(k,\phi)$，然后将这些值直接代入方程(6-57)。表 6-1 中给出了一些最终的结果。

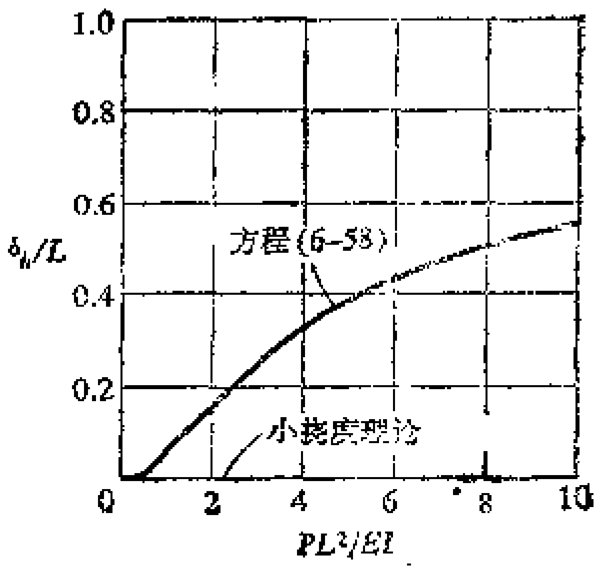
最后，根据下列方程我们可以求得水平挠度：

$$\frac{\delta_h}{L}=1-\sqrt{\frac{2EI\sin\theta_b}{PL^2}} \qquad (6\text{-}58)$$

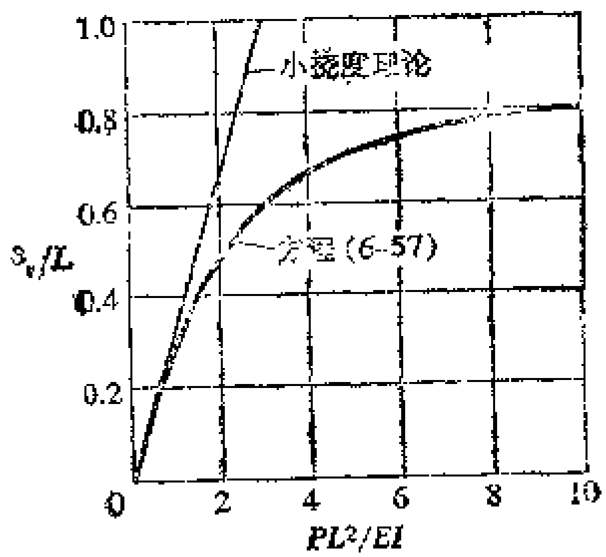
对于这种情况的结果示于表 6-1 中的最后一行内．其旋转角 θ_b，挠度 δ_v 以及 δ_h 还用图解示于图 6-27 a，b 和 c 中。在每一种情况下，当荷载接近于零时，大挠度的结果与按小挠度理论所得的结果合併到一起．



(a)



(c)



(b)

图 6-27图 6-26所示悬臂梁内挠度：
(a) 转角 θ_b，(b) 竖直挠度 δ_v；
(c)水平挠度 δ_h

端点作用有竖直荷载的悬臂梁，其完全解示于参考文献 6-28，6-35 和 6-36 中。承受均匀荷载的悬臂梁的挠度，示于参考文献 6-37 中。将简单梁的半边部分视为与悬臂梁一样，这样可使悬臂梁的解适用于对称加载的简支梁。许多大挠度的其它情况已叙于参考文献 6-28 中.

在端点处力偶和力引起梁弯曲的一般三维情况下，其弹性线的微分方程与一重物绕一固定点运动的微分方程具有相同的形式。这种比拟是克希霍夫于 1859 年观察到的，它被称为克希霍夫动力比拟（参考文献 6-38）。在杆端处仅有轴向力的特殊情况下，弹性线的微分方程变得与具有大转角的普通摆的微分方程相同。关于弹性系统与动力系统之间的克希霍夫比拟的资料可参阅参考文献 6-39。

习　题

6.2-1　藉对均匀荷载作用下简单梁的挠度曲线方程（方程 6-12）进行连续微分，试求该梁的弯矩 M、剪力 V 和荷载 q 的表达式（见方程 6-9）。藉与第 4.4 节中方程 (i) 进行比较来说明所得的表达式是正确的。

6.2-2　假设有一跨度 $L=10$ 呎、作用均匀荷载 $q=400$ 磅/呎且梁中最大法向应力为 1000 磅/吋^2 的简单梁，试求算该梁的最大挠度 δ。该梁为方形横截面，且由弹性模量 $E=1.5\times10^6$ 磅/吋^2 的木材所构成。

6.2-3　有一承受均匀荷载的宽翼缘简支钢梁，其最大挠度为 5/16 吋，端点处最大斜度为 0.01 弧度。如果最大法向应力为 18,000 磅/吋^2，试求算梁的高度 h。假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2。

6.2-4　有一矩形横截面的简支梁，承受均匀分布荷载作用，梁中心处挠曲了 2.0 吋。该梁用相同材料且仍为矩形横截面的另一根梁来置换，但此梁的宽度仅为原来梁的一半宽度。如果新梁在同样荷载下仅挠曲了 0.5 吋，试问新梁的高度 h_2 与原来梁的高度 h_1 之比值是多少？

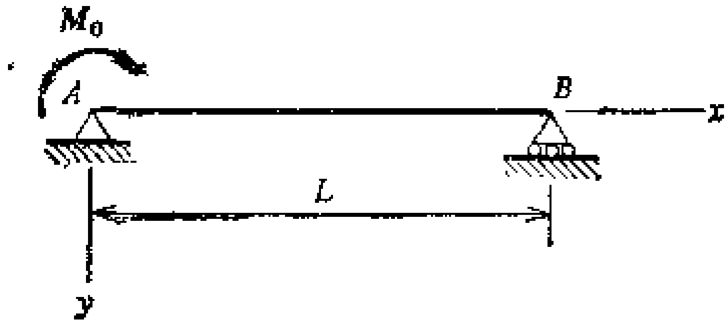
6.2-5　如果图 6-3 中所示两端转角数值之比值 $\theta_a/\theta_b=3/4$，试求荷载 P 的位置。

6.2-6　试求图 6-3 中所示梁的最大挠度与其中央处挠度之比

值，假设$a=L/3$。

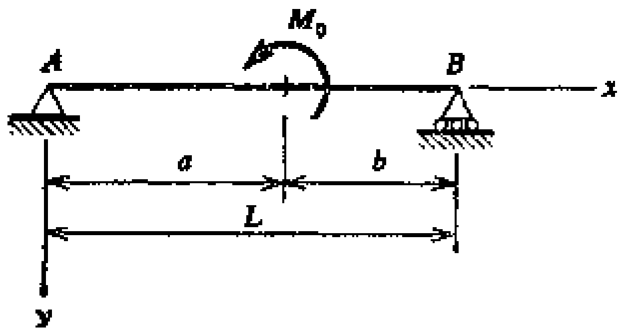
习题 6.2-7 至 6.2-10 藉对挠度曲线微分方程进行积分来求解

6.2-7 导出简支梁在端点力偶 M_0 作用下的挠度曲线方程（见图）。试问梁的最大挠度是多少？



习题 6.2-7

6.2-8 导出离左端距离 a 处作用力偶 M_0 的简单梁的挠度曲线方程(见图)。

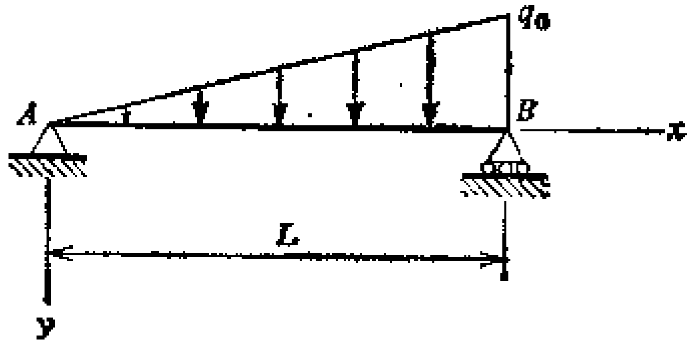


习题 6.2-8

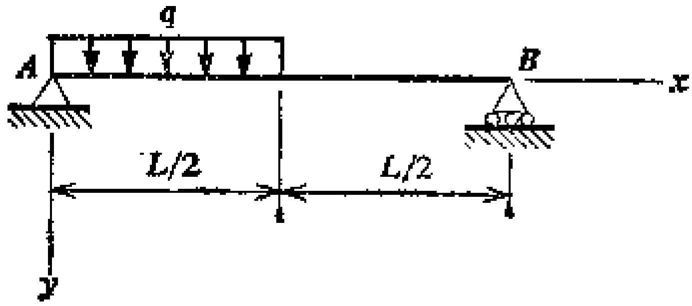
6.2-9 导出承受最大强度为 q_0 的三角形分布荷载的简单梁挠度曲线方程(见图)。从四阶微分方程的推导来开始(方程 6-9 c)。

6.2-10 导出左半跨承受均匀荷载的简单梁的挠度曲线方程(见图)。

6.3-1 有一承受均匀荷载的悬臂梁(图 6-4)，其自由端处的挠度等于 βL，这里 β 为一很小的数，L 为梁的长度。试问自由端处挠度曲线的旋转角是多少？



习题 6.2-9

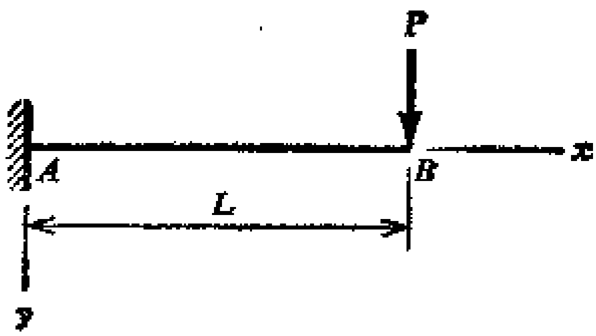


习题 6.2-10

6.3-2 有一承受均匀荷载的悬臂梁(见图 6-4)，其高度 h 等于跨度 L 的十分之一．该梁为 $E=30\times10^6$磅/吋^{2}的宽翼缘截面型钢制成，其受拉和受压容许资用应力为 20,000 磅/吋^2．试计算梁上全部加载时端点处挠度与其长度之比率 δ/L，

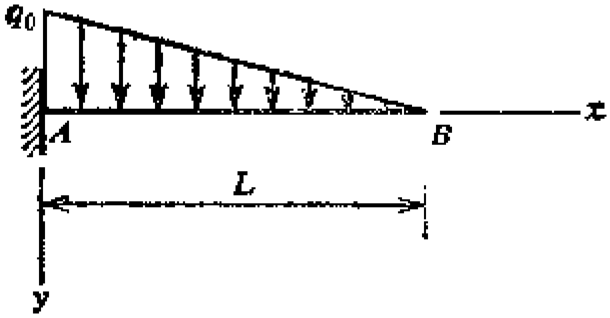
习题 6.3-3 至 6.3-6 借对挠度曲线微分方程进行积分来求解

6.3-3 导出自由端处作用集中荷载 P 的悬臂梁的挠度曲线方程(见图)，并确定自由端处的挠度 δ 和旋转角 θ_b。



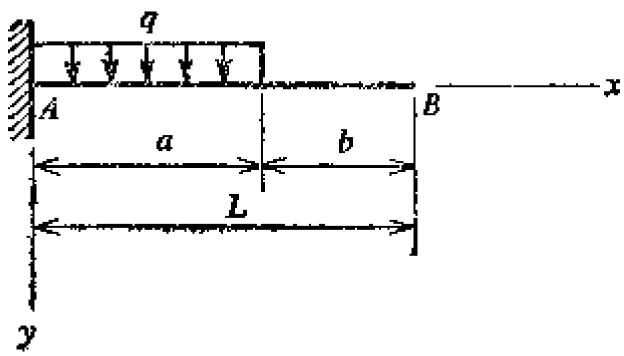
习题 6.3-3

6.3-4　有一悬臂梁承受最大强度为 q_0 的三角形分布荷载，如图所示，试求其端点处挠度 δ 的公式和旋转角 θ_b 的公式。



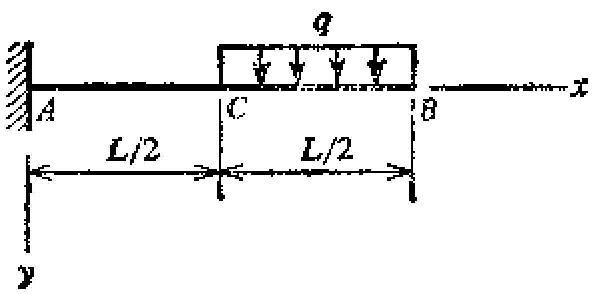
习题 6.3-4

6.3-5　试求承受图中所示荷载的悬臂梁的挠度曲线方程。



习题 6.3-5

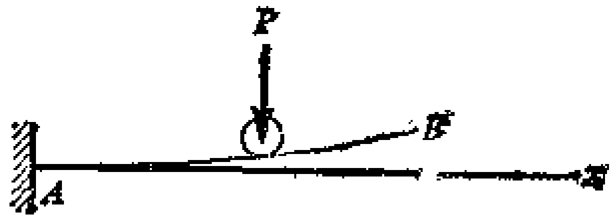
6.3-6　试确定承受图中所示荷载的悬臂梁上 B 点和 C 点处的挠度。



习题 6.3-6

6.3-7　今有一曲杆 AB(见图)，为了荷载 P 沿杆上移动时使

P始终保持在同一水平，试问在荷载作用之前该杆的轴线方程应该是怎样的。



习题 6.3-7

习题 6.4-1 至6.4-8 用力矩-面积法求解

6.4-1 有一悬臂梁，整个长度上承受强度为 q 的均匀荷载(图6-4)。试求自由端处的转角 θ_b 和挠度 δ。

6.4-2 有一悬臂梁，作用有三角形分布荷载(见习题6.3-4中的图)，试确定自由端处的转角 θ_b 和挠度 δ。

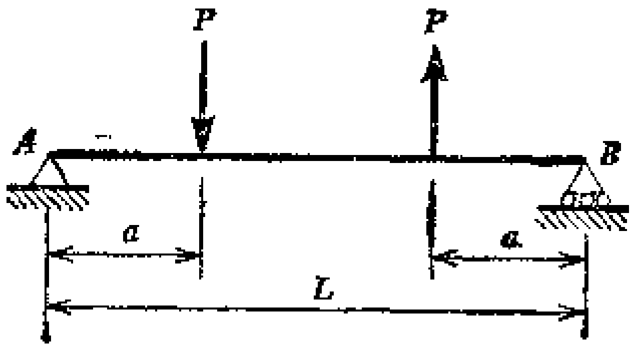
6.4-3 试求解习题 6.3-6。

6.4-4 试求承受图 6-2 所示均匀荷载的简单梁的转角 θ_a 和中央处的挠度 δ。

6.4-5 试求一端处承受力偶 M_0 的简单梁的最大挠度 δ_{max}(见习题 6.2-7 中的图)。

6.4-6 试确定图 5-1 a 所绘梁的左边支承处的转角 θ_a 和中央处的挠度 δ_{max}。

6.4-7 图中所示梁承受两个集中荷载，一个向下作用，另一个向上作用。试求左端处的转角 θ_a、向下荷载处的挠度 δ_1 和中央处的挠度 δ_2。



习题 6.4-7

6.4-8　有一简单梁，承受三角形分布荷载（见习题 6.2-9 中的图）。试求左边支承处的转角 θ_a 和最大挠度 δ_{max}。

习题 6.5-1 至 6.5-15　用迭加法求解

6.5-1　试求图 6-9 中所示悬臂梁中点处的挠度 δ 和转角 θ，假设 $a=3L/4$ 和 $P=qL$。

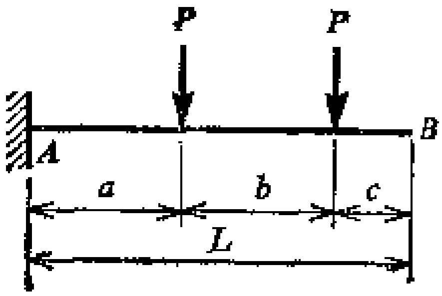
6.5-2　试求出图 6-13a 所示挑臂梁左边支承处的转角 θ_a。

6.5-3　有一悬臂梁 AB 承受两个集中荷载如图所示。试求自由端的挠度 δ_b，假设 $a=b=c=L/3$。

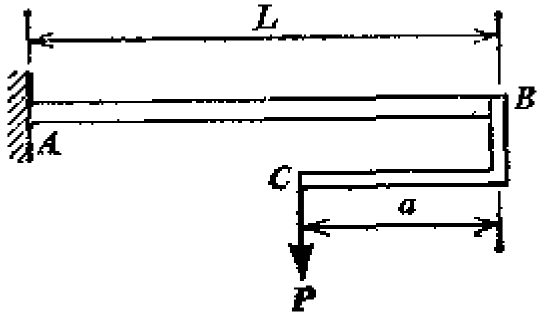
6.5-4　有一简单梁，承受三个沿跨度相等间距的集中荷载。第一个荷载位于离左边支承距离为 $L/4$ 处，第二个荷载位于跨中，第三个荷载位于离右边支承距离为 $L/4$ 处。假设每一荷载均等于 P，试求梁中央处的挠度 δ。

6.5-5　有一长度为 L 的悬臂梁，其左端 A 处固定，右端 B 处自由，该梁自由端处承受向下的集中荷载 P 和反时针方向的力偶 M_0。(a)试求使梁的自由端斜度为零时的 M_0 值(以 P 和 L 表示)。(b)试问此时自由端处挠度 δ 为多少？

6.5-6　图示悬臂梁 AB 上有一弯架 BC 附于其自由端，有一力 P 作用于弯架的端点处，试求使 B 点竖直挠度为零时 a/L 的比值。



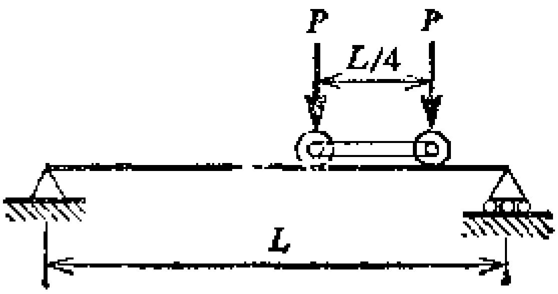
习题 6.5-3



习题 6.5-6

6.5-7　有两根同样材料的棱柱形梁，它们的几何图形彼此相似，第二根梁的每一尺寸为第一根梁相应尺寸的 n 倍。这两根梁以同样的方式支承住，唯一的荷载是梁的自重。试求第二根梁的挠度与第一根梁的挠度之比值 δ_2/δ_1。

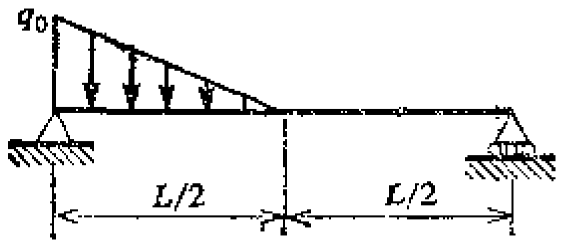
6.5-8　有两个相距 $L/4$ 的轮轴荷载，缓慢地在长度为 L 的简单梁上移动(见图)。试确定梁中央处挠度的最大值。



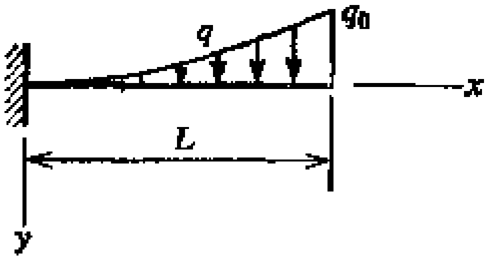
习题 6.5-8

6.5-9　试求图示简单梁中央处的挠度 δ。

6.5-10　有一悬臂梁承受着按抛物线变化的荷载，如图所示。该荷载强度的方程为 $q=q_0x^2/L^2$。试问梁的最大斜度是多少？



习题 6.5-9



习题 6.5-10

6.5-11　有一根带有挑臂的梁，承受两个集中荷载，如图所示，试求 $Q=0$ 时 C 点处的挠度和 D 点处的挠度。

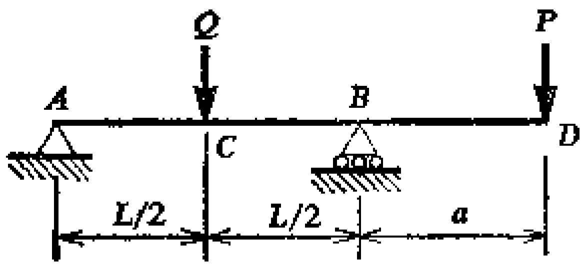
6.5-12　试求图示挑臂梁的支承 A 处之转角 θ_a，假设 $Q=2P$ 和 $a=L/2$。

6.5-13　试求图示梁上使荷载 P 处的挠度为零时两荷载之比值 P/Q。

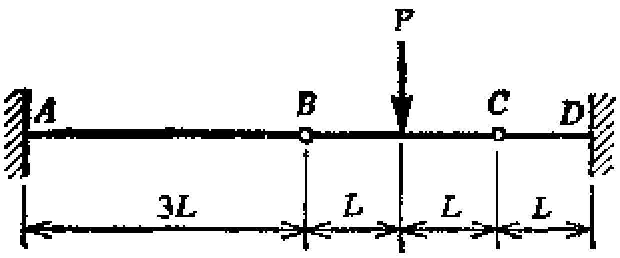
6.5-14　在图中所示的梁上，其 A 处和 D 处为固定支承，该梁由 B 处和 C 处铰接到一起的三根杆所组成。试求荷载 P 处的挠度 δ。

6.5-15　试求图示框架 ABC 中 C 端处挠度的水平分量和竖直分量，假设 EI 为常数(略去轴向变形的影响，仅考虑挠曲影响)。

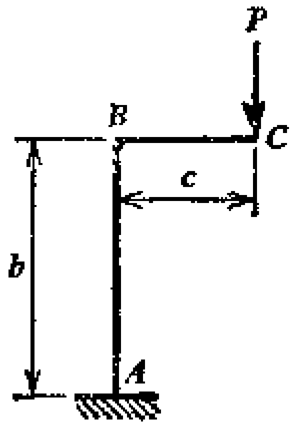
6.6-1　藉求解挠度曲线的微分方程，得出图 6-15 a 所示简单梁左半部分挠度 v 的方程。



习题 6.5-11，6.5-12和6.5-13



习题 6.5-14



习题 6.5-15

6.6-2　试求图 6-17 a 所示悬臂梁自由端 A 处的转角 θ。

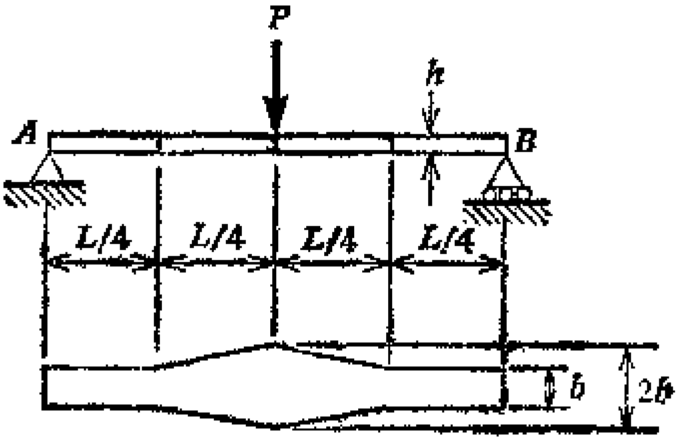
6.6-3　引用图 6-15 a 中所示简单梁，假设其两端范围内的惯性矩为 I_1，而中间范围为 I_2。试求该梁中央处的挠度 δ_c。

6.6-4　假设图 6-17 a 所示悬臂梁的左半部的惯性矩为 I_1，而右半部的惯性矩为 I_2。还假设梁上的荷载为沿整个长度上强度为 q 的均匀荷载(而 $P=0$)。试确定梁的自由端 A 处的挠度 δ_a。

6.6-5　试确定图中所示简单梁 AB 中央处的挠度 δ。该梁的高度 h 为一常数，但其宽度是变化的，如图下部所示。

6.6-6　假设图 6-16 所示锥形悬臂梁具有等宽为 b 的矩形横截面。梁的高度自 A 端的 d_a 按直线变至 B 端的 d_b。试求自由端处的挠度 δ_b，假设 $d_a=2d_b$。

6.6-7　假设图 6-16 所示锥形悬臂梁具有等厚 t 的薄壁空心圆形横截面。A 端处直径 d_a 为 B 端处直径 d_b 的两倍。试求梁的自由端处的挠度 δ_b。



习题 6.6-5

习题 6.7-1至6.7-8 用有限差分法求解

6.7-1 将图 6-19 a 中所示简单梁分成六个等长的区段，试求中央处的挠度 δ。将此挠度与第 6.7 节例题 1 所得的结果进行比较。

6.7-2 有一中央处承受集中荷载 P 的简单梁，试求中央处的挠度。将梁分成四个相等区段，并假设 EI 为常数。

6.7-3 试求简单梁上集中荷载作用点处的挠度 δ，假设荷载 P 作用于离梁左端距离等于 $L/4$ 的地方。将梁分成四个相等区段，并假设 EI 为常数。

6.7-4 试计算具有常数 EI 的悬臂梁自由端处的挠度 δ，假设自由端处承受集中荷载 P，沿梁采用三个相等区段。

6.7-5 试求出作用有强度为 q 的均匀荷载的悬臂梁自由端处的挠度 δ，假设 EI 为常数，且将梁分为四个相等区段。

6.7-6 试确定作用有三角形荷载的悬臂梁自由端处的挠度 δ_b（见习题 6.3-4），假设 EI 为常数，且将梁分为四个相等区段。

6.7-7 试求图 6-15 a 所示非棱柱形简单梁中央处的挠度 δ_c。沿梁采用六个等长区段。

6.7-8 试确定图 6-16 中所示锥形悬臂梁自由端处的挠度 δ_b。沿梁采用三个区段。该梁为常数宽度 b 的矩形横截面，而 A 端处梁的高度 d_a 为 B 端处高度 d_b 的两倍。

6.8-1 试导出用梁中最大法向应力 σ_{max} 表示的纯弯下梁中所储存的应变能 U 的表达式(图 6-21 a)。假设该梁为矩形横截面(宽度为 b,高度为 h)。(表达 U 为最大应力 σ_{max}、弹性模量 E 和梁的尺寸的函数)。

6.8-2 试确定长度为 L、中央处承受集中荷载 P 的简单梁中所储存的应变能。根据此结果求出梁中央处的挠度 δ。

6.8-3 有一长度为 L 的简单梁,按这样的方式受力:梁的挠度曲线用方程 $v=\delta\sin\frac{\pi x}{L}$ 给出,这里 δ 为中央处的挠度。试求梁中储存的应变能 U。

6.8-4 有一长度为 L 的简单梁,承受两个集中荷载,如图 5-1 a 所示。假设 $a=L/4$,试求梁中所储存的应变能。应用此结果确定荷载之一处的挠度 δ。

6.8-5 有两根矩形横截面的简单梁,由同样的材料构成,并同样地加载。这两根梁的宽度相同,但第一根梁的高度为第二根梁高度的两倍。试求这两根梁所储存应变能之比值 $U_1:U_2$。

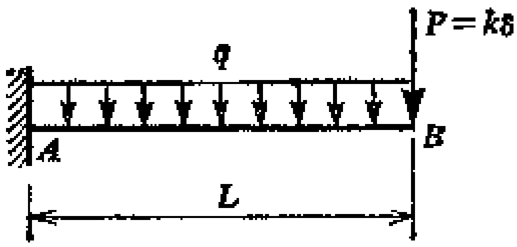
6.8-6 有一矩形横截面(宽 5 吋,高 8 吋)的木悬臂梁,其长度为 6 呎,承受 $q=200$ 磅/呎的均匀荷载。试确定梁中所储存的应变能,假设 $E=1.5\times10^6$磅/吋^2。

6.8-7 有一重量 W 从高度 h 处落到简单梁上(见图 6-22)。该梁具有截面积为 A 的矩形横截面,梁长为 L。假设高度 h 与 W 所产生的梁的静力挠度相比要大得多,试导出梁中最大法向应力 σ_{max}。

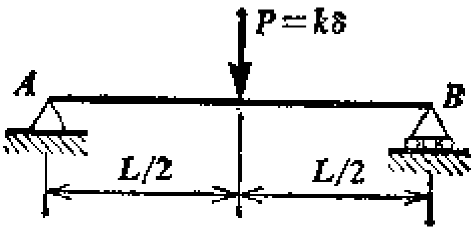
6.8-8 有一重量 $W=100$ 磅,从高度 $h=12$ 吋处落到长度 $L=10$ 呎的简单梁上(见图 6-22)。如果梁的容许法向应力 $\sigma_w=30,000$ 磅/吋^2,试从附录表 C-2 中选择满意的最轻的 I 梁。假设 $E=30\times10^6$磅/吋^2。

6.9-1 有一悬臂梁承受着等值强度 q 的均匀荷载和等于 $k\delta_b$ 的集中荷载 P,这里的 k 为一比例常数。试确定自由端 B 的挠度 δ_b(见图)。又问在什么条件下梁是稳定的?

6.9-2 有一简支梁 AB 承受等于 $k\delta$ 的集中荷载,试求梁中央处的总挠度 δ(见图)。假设该梁中心处具有初始挠度 δ_0。试问在什么条件下梁是稳定的?



习题 6.9-1



习题 6.9-2

6.9-3　试求解中心处作用有集中荷载的简单梁的汇聚问题.

6.10-1　有一长度为 L、高度为 h 的简单梁(见图 6-24 a)受到温度变化，梁的底面温度为 T_2，梁的顶面温度为 T_1。试求该梁的挠度曲线方程。

6.10-2　有一长度为 L、高度为 h 的悬臂梁，其顶面温度为 T_1，底面为 T_2。试求由于温度差 T_2-T_1 所引起梁自由端处的挠度 δ 和转角 θ。

6.10-3　有一长度为 L、高度为 h 的简单梁(见图 6-24 a)，其顶面温度为 T_1，底面温度为 T_2。温度 T_1 和 T_2 均为 x 的函数，从而 $T_2-T_1=T_0x$，这里 T_0 为一常数。试求梁的最大挠度。

第七章　静不定梁

7.1　静不定梁

本章将讨论反力数目多于静力平衡方程数目的梁之分析．这种梁被说成是静不定者，它们的分析需要考虑到挠度．前面诸章中只讨论了静定梁，对于每一种情况藉求解静力平衡方程，我们就可以立即得出梁的反力．知道了反力，我们便得到弯矩和剪力，根据弯矩和剪力就可能依次求出应力和挠度．然而，当梁为静不定时，我们不能只靠静力学去求解诸力．而我们必须考虑梁的挠度，得到协调方程以补充静力方程．这种相同的方法在第一章涉及受拉杆和受压杆静不定问题时已讨论过．

图 7-1 中说明几种静不定梁．图 (a) 中的梁固定(或嵌固)于支承 A 处，而简支于 B 处，这种梁称为有支承悬臂梁或"固定-简支"梁．该梁的反力包括 A 处的水平力和竖直力、A 处的力偶以及 B 处的竖直力．因为该梁只有三个独立的静力平衡方程，不可能用静力学计算出这所有的四个反力．超过平衡方程数目的反力数目称为静不定次数．因而，图 7-1 a 中所绘的梁为一次静不定．超过静定情况下支承某一结构所需反力数目的任何反力，都称为静力赘余力，这种赘余力的数目必然与静不定次数相同．例如，图 7-1 a 中所示反力 R_b 可视为赘余反力．注意：当它从结构上移去时，则成为悬臂梁．当赘余力放松时，所留下的静定结构称为放松结构或基本结构．用于图 7-1 a 中梁的另一种途径是把反力矩 M_a 视为赘余力，如果将它拿掉，那么放松结构为一 A 处销轴支

承、B 处为辊轴支承的简单梁.

如果梁上所有荷载均为竖直者(图 7-1 b),那么出现一种特殊情况,其水平反力为零. 然而,梁仍为一次静不定,因为现在有两个独立的静力平衡方程,但是有三个反力.

固定端梁,有时称为"固定-固定"梁,示于图 7-1 c中. 每一支承处有三个反力,因此该梁共有六个未知反力. 因为有三个平衡方程,所以该梁为三次静不定. 如果我们以某一端

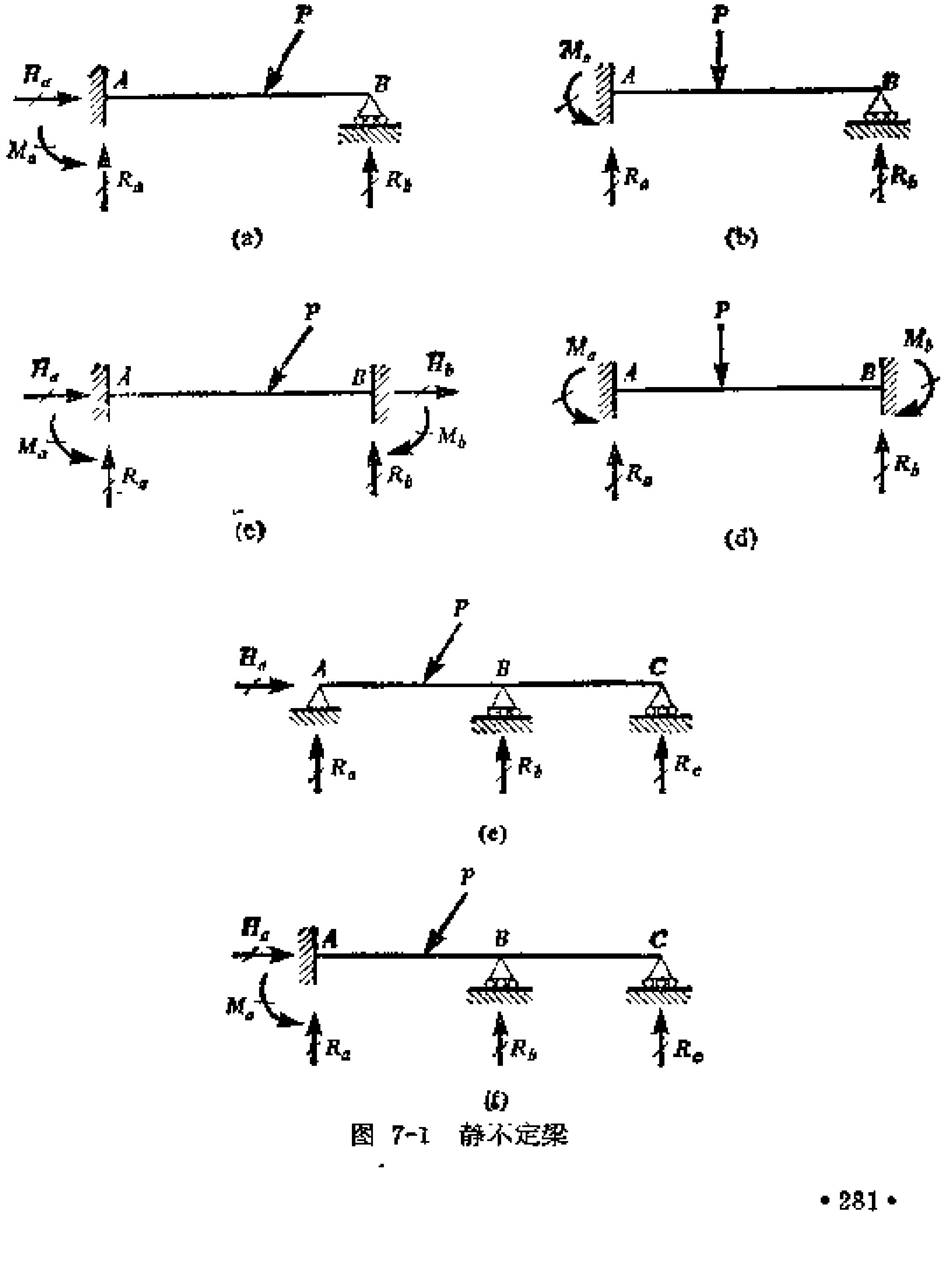


图 7-1 静不定梁

处的反力作为三个赘余力，且将它们从结构上拿去，那么留下的悬臂梁为放松结构。如果我们拿去两个固定端力矩和一个水平反力，那么放松结构为一简单梁。

再讨论只有竖直荷载的特殊情况(图 7-1 d)，我们发现现在只有四个反力需要确定。静力平衡方程的数目为二，所以该梁为两次静不定。

图 7-1 中所示的另外两根梁是为连续梁的例子，因为它们的跨数在一跨以上，而且梁在支承处是连续的，所以称为连续梁。图 7-1 e 中所示的梁为一次静不定，因为有四个反力，而只有三个静力平衡方程。如果将 R_b 选作赘余力，并假想将它从梁上移去，于是留下了静定简单梁 AB。如果将 R_c 选作赘余力，放松结构将为带有挑臂 BC 的简单梁 AB。图中所示的最后一种梁是为两次静不定梁。我们可选择 R_b 和 R_c 作为赘余反力，于是放松结构为一悬臂梁。

在下面诸节中，我们将讨论静不定梁的各种分析方法。在每一种情况下，其任务都是确定赘余反力，因为当知道它们之后，剩下的力值总是可以根据静力学求出来。应用已知的力，我们就可以确定任一点处的应力和挠度。

7.2 挠度曲线的微分方程

静不定梁可藉求解挠度曲线的微分方程得以分析。其方法本质上与静定梁相同(见第 6.1 节至 6.3 节)，包括：列出微分方程，求出方程的通解，然后应用边界条件求算积分常数。可以应用以弯矩表示的二阶方程（方程 6-9 a)，或以剪力表示的三阶方程（方程 6-9 b)，或以横向荷载强度表示的四阶方程(方程 6-9 c)。总有足够的边界条件，不仅用以确定积分常数，而且用以求出赘余反力。由于当需要求算大量常数时出现计算技术上的困难，所以该法实际仅用于加载比较

简单的情况和只有一个跨度的梁.

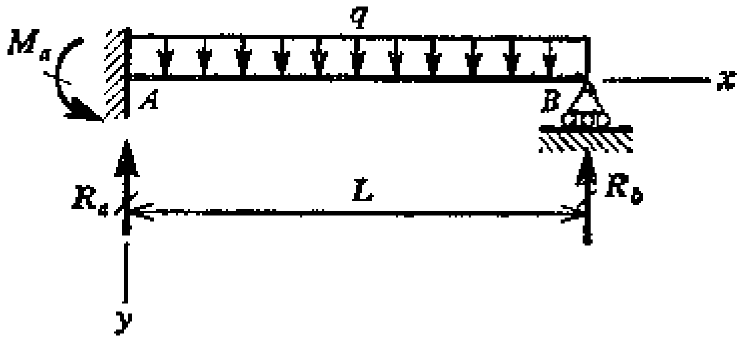


图 7-2 有支承悬臂梁

为了说明该方法，让我们分析作用如图 7-2 所示均匀荷载的有支承悬臂梁. 如果我们选择求解二阶微分方程，就需要求出梁上任一横截面处弯距 M 的表达式. 为此目的，我们需要选定一个赘余反力，然后用它来表示所有其它反力. 让我们选定反力 R_b 为赘余力，于是根据静力平衡方程，我们看出以 R_b 所表示的 A 处的反力为：

$$R_a = qL - R_b \qquad M_a = \frac{qL^2}{2} - R_b L \tag{a}$$

现在，我们可以得到用 R_b 表示弯矩的一般表达式：

$$M = R_a x - M_a - \frac{qx^2}{2} = qLx - R_b x - \frac{qL^2}{2} + R_b L - \frac{qx^2}{2}$$

于是挠度曲线的微分方程成为

$$EIv'' = -M = -qLx + R_b x + \frac{qL^2}{2} - R_b L + \frac{qx^2}{2}$$

两次连续积分，得出

$$EIv' = -\frac{qLx^2}{2} + \frac{R_b x^2}{2} + \frac{qL^2 x}{2} - R_b L x + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EIv = -\frac{qLx^3}{6} + \frac{R_b x^3}{6} + \frac{qL^2 x^2}{4} - \frac{R_b L x^2}{2} + \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

这些方程中有三个未知量(C_1, C_2 和 R_b)。该梁的三个边界条件为：

$$v(0)=0 \qquad v'(0)=0 \qquad v(L)=0$$

将这些条件用于上面方程中，得到 $C_1=0, C_2=0$ 和

$$R_b=\frac{3qL}{8} \tag{7-1}$$

应用现在所确定出的赘余力 R_b 的值，我们容易根据方程(a)求出其余的反力：

$$R_a=\frac{5qL}{8} \qquad M_a=\frac{qL^2}{8} \tag{7-2}$$

同样，我们现在可以将这些量代入挠度 v 的方程、斜度 v' 的方程以及弯矩 M 的方程，从而得到梁的完整的分析。

分析图 7-2 所示梁的另一种途径，是取反力矩 M_a 作为赘余力。于是需要以 M_a 来表示弯矩 M，将所得的表达式代入二阶微分方程，像上面一样地进行求解。还有另外一种途径是从应用四阶方程开始，此方法叙于下面例题中。

例题 藉求解挠度曲线的四阶微分方程分析图 7-3 中所示的固定端梁。

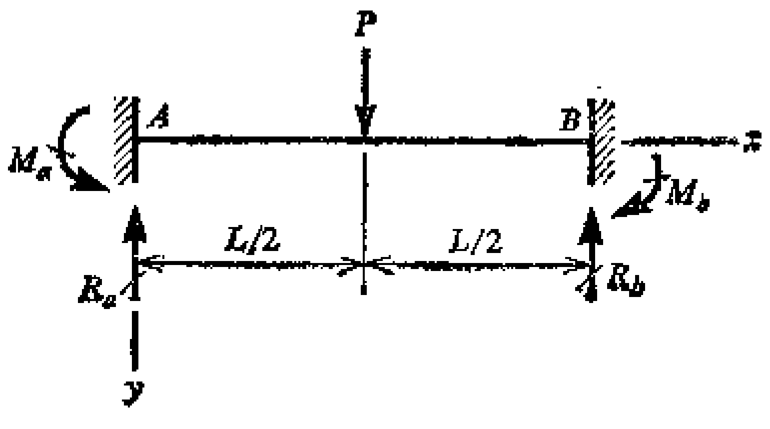


图 7-3 例题，固端梁

集中荷载 P 作用于梁的中点处，因此我们根据对称性得出结论，$M_b=M_a, R_a=R_b=P/2$。这样，只剩下一个赘余量(M_a)需要确定。在 $x=0$ 至 $x=L/2$ 的范围内，梁上没有荷载，因此，其微分方程成为

$$EIv''''=0$$

从它得出

$$EIv'''=C_1 \tag{b}$$

$$EIv''=C_1x+C_2 \tag{c}$$

$$EIv'=\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3 \tag{d}$$

$$EIv=\frac{C_1x^3}{6}+\frac{C_2x^2}{2}+C_3x+C_4 \tag{e}$$

可以用作梁的左半部的边界条件如下。首先，这部分梁上的剪力均等于 R_a，因此根据方程(b)，我们得 $C_1=-P/2$。其次，我们观察到在 $x=0$ 处其弯矩等于 $-M_a$。所以，根据方程(c)我们得出 $C_2=M_a$。对于斜度(方程 d)有两个条件，即：当 $x=0$ 和 $x=L/2$ 时 $v'=0$。这些条件得出 $C_3=0$，且

$$M_a=\frac{PL}{8} \tag{7-3}$$

因而，求得赘余力矩 M_a。最后，我们有 $x=0$ 时 $v=0$ 的条件，从而得出 $C_4=0$。组合所有这些结果，我们写出挠度曲线方程为：

$$v=\frac{Px^2}{48\,EI}(3\,L-4\,x) \qquad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}\right) \tag{7-4}$$

根据这个方程，我们可以藉微分求出斜度方程和弯矩方程。

本例确是这样，总存在足够数量的边界条件不仅用以求算积分常数，而且求算赘余反力。有时需要列出梁的一个以上区段的微分方程，然后应用诸区段之间的连续性条件，如同前面对于静定梁所做的那样[1]。

7.3 迭加法

这种方法可以认为是静不定结构分析中的最基本的手段。它可用于许多不同类型的结构，譬如桁架和框架，此外还可用于本章所涉及的基本的梁。我们在前面受拉杆和受压

1) 对于静不定梁分析最早应用微分方程出现于 Navier 的材料力学书中(参考文献 7-1 和 7-2)。

杆所组成的静不定体系分析中已应用过这种方法(见第1.6节).

迭加方法的实质可以用非常简单的说法加以叙述. 第一步是识别静力赘余力,如上节中所述. 然后将赘余约束从静不定梁上拿走,留下静定的放松结构. 此放松结构上任何需要求的位移都可以藉第六章所述的方法求得. 具体地说,荷载所引起的相应于赘余力处的位移(平移或转动)可以确定出来. 其次,将赘余力视为作用于放松结构上的作用荷载,其相应的位移可以计算出来. 根据迭加原理,我们知道: 由于实际荷载和赘余力同时作用产生的最终位移必须等于分别计算的位移之和. 在赘余约束情况下,其相应位移为零或者等于某个已知值;因此,我们可以写出表达这一事实的迭加方程. 最后,这些方程可对赘余反力值进行求解,随后可以根据静力平衡方程确定出所有其它反力.

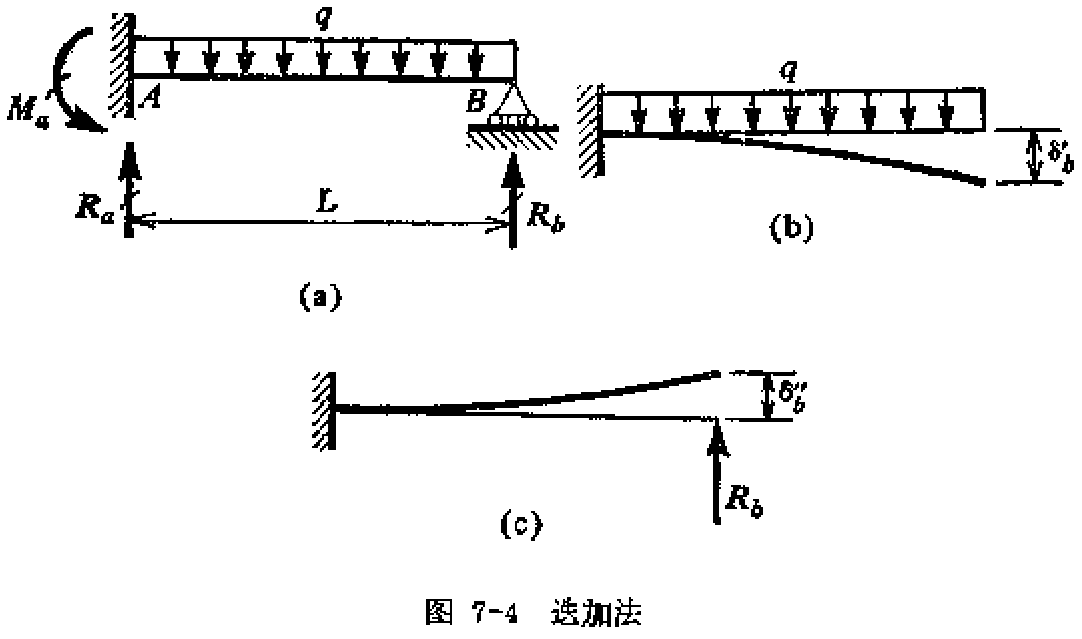


图 7-4 迭加法

上一段中所述的步骤,通过举例说明可以较为清楚一些. 让我们再次分析承受均匀荷载的有支承悬臂梁(见图7-4 a). 将反力 R_b 选作静力赘余力,并将其相应约束移去,

我们得到用作放松结构的悬臂梁．此梁因均匀荷载所引起相应于赘余力处的挠度以 δ_b' 表示（见图 7-4 b），由于赘余力引起的挠度以 δ_b'' 表示(见图 7-4 c)．藉迭加挠度 δ_b' 和 δ_b'' 得到原来结构的总挠度 δ_b，它必须为零．这个结论导出下列迭加方程：

$$\delta_b=\delta_b'-\delta_b''=0 \tag{a}$$

减号出现于此方程是因为 δ_b' 向下而 δ_b'' 向上．由于荷载 q 和赘余力 R_b 所产生的挠度 δ_b' 和 δ_b'' 可借助附录表 D-1（见情况 1 和情况 4)容易地求出．应用附录中所给的公式，我们根据方程(a)得到：

$$\delta_b=\frac{qL^4}{8EI}-\frac{R_bL^3}{3EI}=0$$

根据它得出：

$$R_b=\frac{3qL}{8} \tag{7-5}$$

现在反力 R_a 和力矩 M_a 可以从考虑梁的平衡来求出，其结果为：

$$R_a=\frac{5qL}{8} \qquad M_a=\frac{qL^2}{8} \tag{7-6}$$

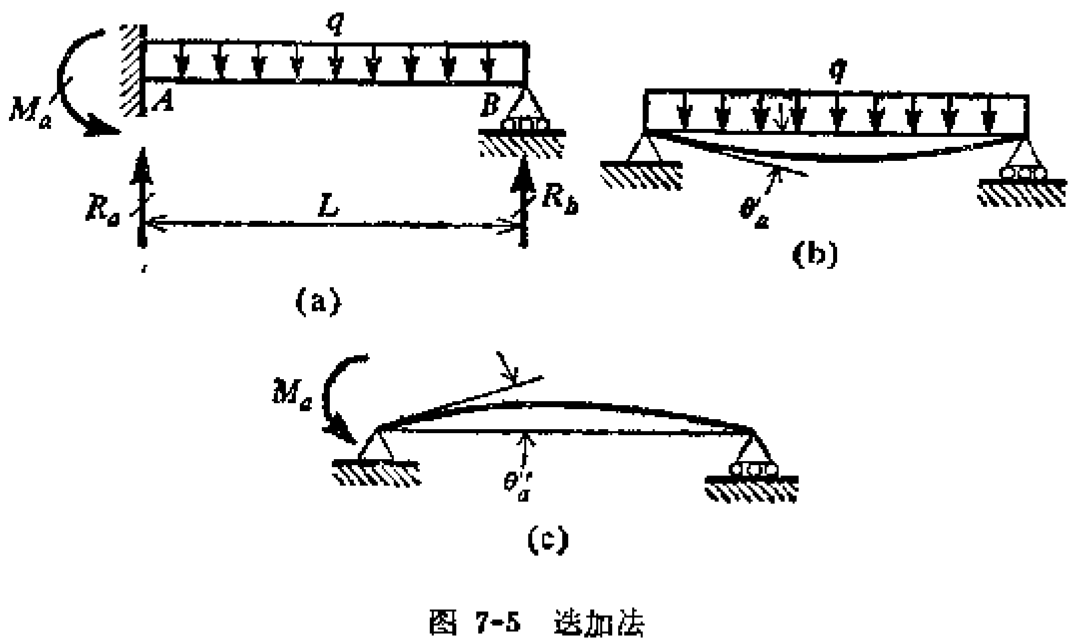


图 7-5 迭加法

这同一根梁可藉取力矩 M_a 作为赘余力这一不同的途径分析出来，在这种情况下，其放松结构为一简单梁（图 7-5 b 和 c）。由于作用于放松结构上的均匀荷载所产生的转角（表 D-2、情况 1）为

$$\theta_a' = \frac{qL^3}{24EI}$$

由于赘余力 M_a 所引起的相应角（表 D-2、情况 7）为：

$$\theta_a'' = \frac{M_aL}{3EI}$$

叙述原来梁支承 A 处总转角为零的迭加方程成为：

$$\theta_a = \theta_a' - \theta_a'' = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_aL}{3EI} = 0 \qquad \text{(b)}$$

求解此方程，我们得出 $M_a = qL^2/8$，它与前面的结果一致。

在求出静不定梁的反力之后，所有应力合力（轴向力、剪力和弯矩）的计算就不再有困难了，因为静力平衡方程能满足这一目的。另外，藉应用挠度曲线微分方程或藉应用迭加原理连同附录 D 中所列的挠度公式也可以得到任一点处的挠度和斜度。在下面说明的例题中，以及在习题中，都首先要注意求反力，因为这是求解中的关键步骤。

本节中所利用的分析方法常常称为结构分析的**柔度法**或**力法**。后一名称是来源于以力值（力和力偶）作为赘余力的缘故；而前一名称的应用是因为其未知数的系数（譬如方程 b 中 $L/3EI$ 项）是为**柔度**，亦即单位荷载所产生的挠度。柔度将在第十一章中作更广泛的论述，在那里结构分析的问题是以广义的形式来介绍的。用以表达挠度条件的迭加方程（见方程 a 和 b）通常称为**协调方程**。

例题 1 用迭加法确定图 7-6 a 所示两跨连续梁的反力。注意该梁承受强度为 q 的均匀荷载。

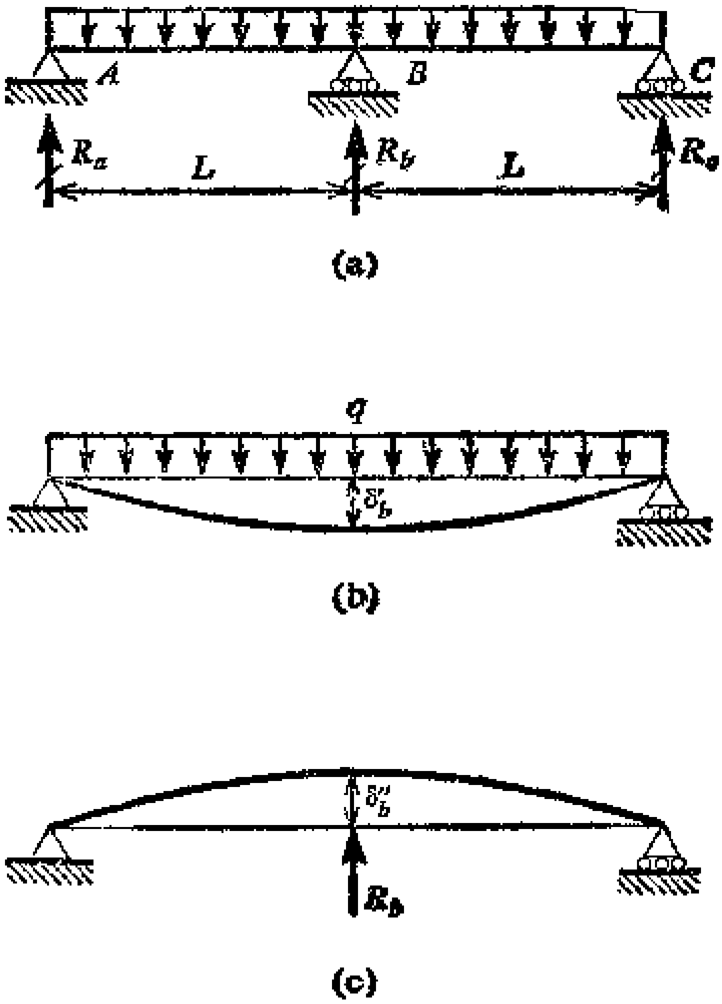


图 7-6　例题 1. 两跨连续梁

选择中间反力 R_b 作为赘余力，我们看出其放松结构为一简单梁（图 7-6 b）。在均匀荷载作用下，放松结构中 B 点处的挠度（见表 D-2，情况 1）为

$$\delta_b' = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{24EI}$$

式中 L 为每一跨度的长度。由于赘余力产生向上方向的挠度（见图 7-6 c）为

$$\delta_b'' = \frac{R_b(2L)^3}{48EI} = \frac{R_bL^3}{6EI}$$

它是按表 D-2、情况 4 所得。关于 B 点处竖直挠度的协调方程为

$$\delta_b = \delta_b' - \delta_b'' = \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{R_bL^3}{6EI} = 0$$

根据它得

$$R_b = \frac{5\,qL}{4} \tag{7-7}$$

另外两个反力值 $R_a=R_c=3\,qL/8$，它们是按静力平衡所得。应用所有已知反力，我们可以没有困难地求出应力合力和挠度。

例题 2　有一固定端梁，在图 7-7 a 所示位置处承受集中力 P 的作用。试求梁端处的反力和力矩。

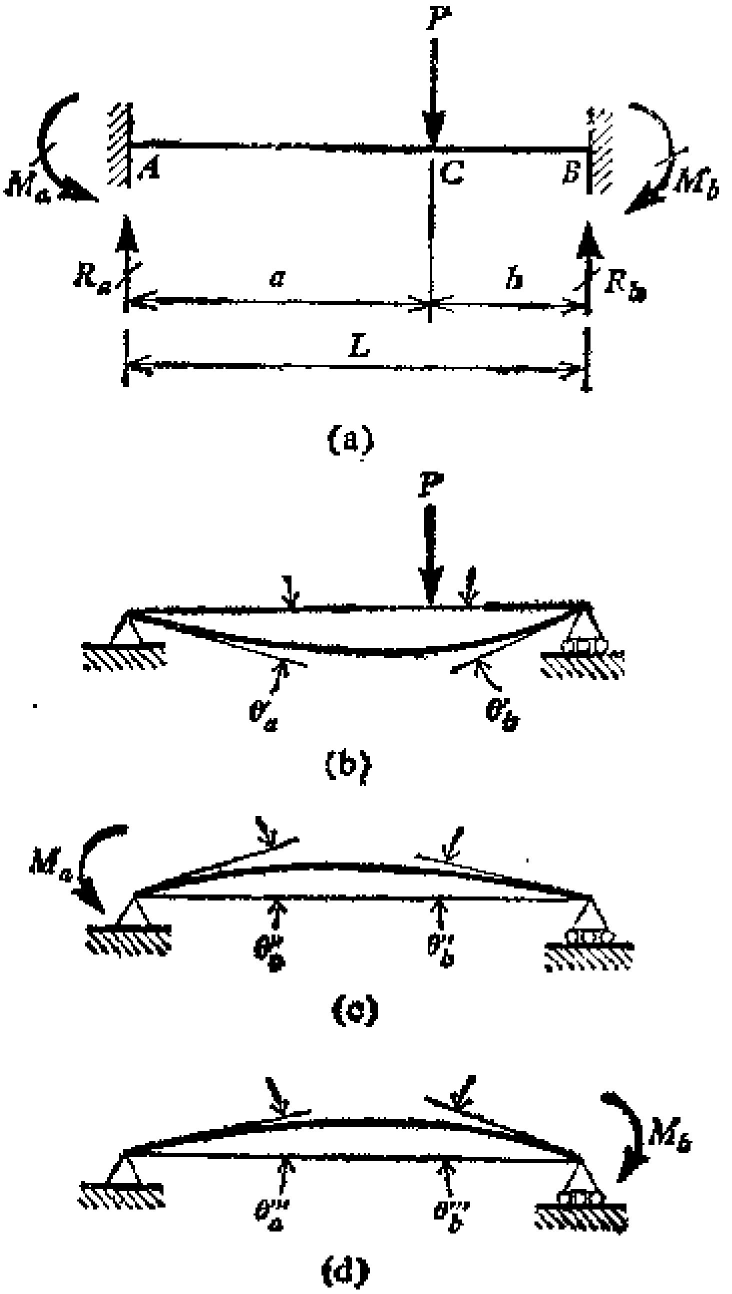


图 7-7　例题2.固端梁

让我们选择反力矩 M_a 和 M_b 作为赘余力，从而得出简单梁形式的放松结构(图7-7b)。根据表 D-2 的情况 5 求得由于荷载 P 所产生端点处的转角：

$$\theta'_a=\frac{Pab(L+b)}{6\,LEI}\qquad \theta'_b=\frac{Pab(L+a)}{6\,LEI}$$

现在，我们将赘余力矩 M_a 和 M_b(如同荷载施)加于放松结构上(图7-7c 和 d)。由于 M_a 所产生端点处的角为：

$$\theta''_a=\frac{M_aL}{3\,EI}\qquad \theta''_b=\frac{MaL}{6\,EI}$$

由于 M_b 产生端点处的角为：

$$\theta'''_a=\frac{M_bL}{6\,EI}\qquad \theta'''_b=\frac{M_bL}{3\,EI}$$

由于原来梁的每一端点处的转角为零，我们得出两个协调方程：

$$\theta_a=\theta'_a-\theta''_a-\theta'''_a=0$$

$$\theta_b=\theta'_b-\theta''_b-\theta'''_b=0$$

将角的各个表达式代入这些方程，我们得到两个包括以 M_a 和 M_b 作为未知数的联立方程：

$$\frac{M_aL}{3\,EI}+\frac{M_bL}{6\,EI}=\frac{Pab(L+b)}{6\,LEI}$$

$$\frac{M_aL}{6\,EI}+\frac{M_bL}{3\,EI}=\frac{Pab(L+a)}{6\,LEI}$$

其解为

$$M_a=\frac{Pab^2}{L^2}\qquad M_b=\frac{Pa^2b}{L^2}\tag{7-8}$$

应用这些结果和平衡方程，我们得到竖直反力的下列公式：

$$R_a=\frac{Pb^2}{L^3}(L+2a)\qquad R_b=\frac{Pa^2}{L^3}(L+2\,b)\tag{7-9}$$

为了说明迭加原理如何用于求出挠度，现在让我们计算固定端梁上荷载 P 作用的 C 点处的挠度(图 7-7 a)。根据表 D-2、情况 5，放松结构中此点在荷载 P 作用下的挠度(图 7-7 b)为：

$$\delta'_c=\frac{Pa^2b^2}{3\,LEI}$$

根据表 D-2、情况 7 求得放松结构中同一点由于力偶 M_a 和 M_b 所产生

的向上挠度(见图 7-7 c 和 d)为：

$$\delta_c'' = \frac{M_a ab}{6\,LEI}(L+b) \qquad \delta_c''' = \frac{M_b ab}{6\,LEI}(L+a)$$

将按方程(7-8)所得的 M_a 值和 M_b 值代入，这些方程成为：

$$\delta_c'' = \frac{Pa^2b^3}{6\,L^3EI}(L+b) \qquad \delta_c''' = \frac{Pa^3b^2}{6\,L^3EI}(L+a)$$

所以，C 点处总挠度为

$$\delta_c = \delta_c' - \delta_c'' - \delta_c''' = \frac{Pa^3b^3}{3\,L^3EI} \tag{7-10}$$

在荷载 P 位于梁中央处的特殊情况下，中心处的挠度为

$$\delta_c = \frac{PL^3}{192\,EI} \tag{7-11}$$

而反力为

$$M_a = M_b = \frac{PL}{8} \qquad R_a = R_b = \frac{P}{2} \tag{7-12}$$

例题 3　试求部分跨度上承受均匀荷载的固定端梁之反力(图 7-8)。

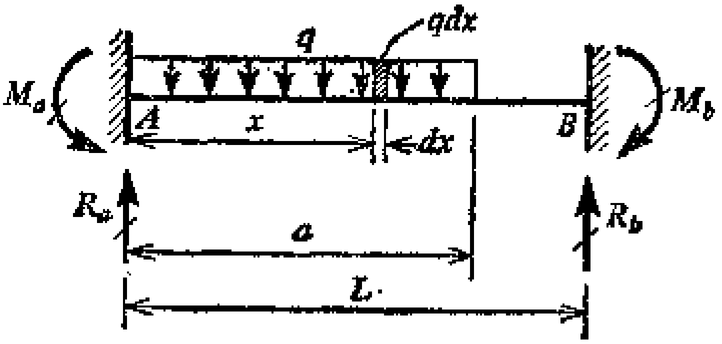


图 7-8　例题 3. 部分跨度上承受均匀荷载的固端梁

让我们取一离梁左端距离为 x 的荷载单元 qdx。将此单元作为集中力，我们可以利用上一例题中所导得的公式。先应用力矩 M_a 和 M_b 的公式(见方程 7-8)，我们可用 qdx 代替 P，以 x 代替 a，以 $L-x$ 代替 b，因而由于荷载单元所产生的固定端力矩为：

$$dM_a = \frac{qx(L-x)^2dx}{L^2} \qquad dM_b = \frac{qx^2(L-x)dx}{L^2}$$

对梁的加载长度进行积分，得到

$$M_a=\int dM_a=\frac{q}{L^2}\int_0^a x(L-x)^2dx=\frac{qa^2}{12L^2}(6L^2-8aL+3a^2) \quad (7\text{-}13)$$

$$M_b=\int dM_b=\frac{q}{L^2}\int_0^a x^2(L-x)dx=\frac{qa^3}{12L^2}(4L-3a) \quad (7\text{-}14)$$

类似地，端点处竖直反力可借助方程(7-9)来求得：

$$R_a=\frac{q}{L^3}\int_0^a (L-x)^2(L+2x)dx=\frac{qa}{2L^3}(2L^3-2a^2L+a^3) \quad (7\text{-}15)$$

$$R_b=\frac{q}{L^3}\int_0^a x^2(3L-2x)dx=\frac{qa^3}{2L^3}(2L-a) \quad (7\text{-}16)$$

这样，所需要求的结果求出来了。

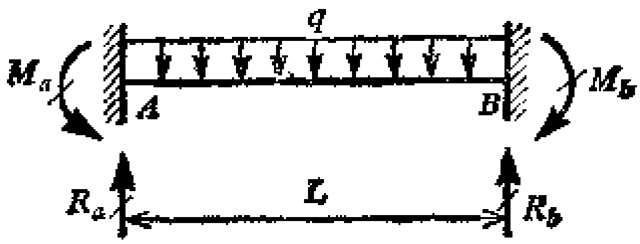


图 7-9 例题3.承受均匀荷载的固端梁

如果有一固定端梁，全跨承受均匀荷载(图 7-9)，我们可藉 $a=L$ 代入上面方程得到反力为：

$$M_a=M_b=\frac{qL^2}{12},\quad R_a=R_b=\frac{qL}{2} \quad (7\text{-}17)$$

梁的固定端支承处的反力通常称为**固定端力矩**和**固定端反力**。它们在结构分析法中，譬如在刚度法(见第十一章)和力矩分配法中，具有重要地位。因此，有广泛的固定端力矩表和反力表可以利用(例如，见参考文献 7-3)。

例题 4　有一简支于 A 和 B 处的梁 ABC(图 7-10 a)，其 C 点处用缆索 CD 悬挂着。在均匀荷载 q 作用之前，缆索中没有力，而缆索也没有放松。当荷载 q 作用时，C 点处梁向下弯曲，缆索中产生拉力 T。试求此力的大小。

在此分析中选择缆索中未知力 T 作为赘余力，并将结构切成两部

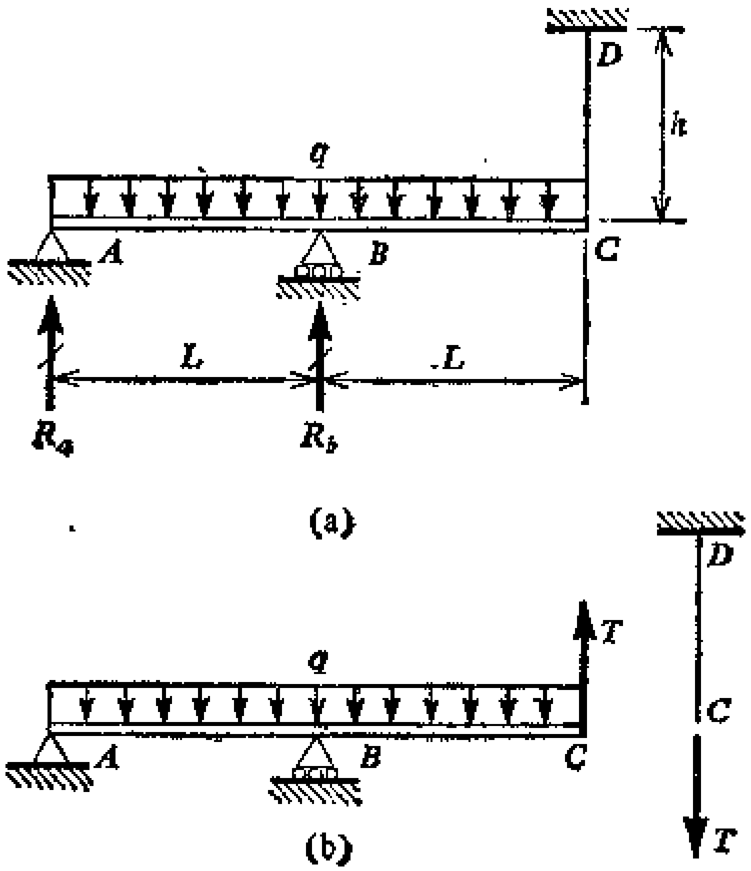


图 7-10 例题4.藉缆索吊挂着的梁

分(图 7-10 b),这样是方便的.于是放松结构由作为独立结构的梁 ABC 和缆索 CD 所组成. 力 T 向上作用于梁上,而向下作用于缆索上. 梁上 C 点处的挠度由两部分组成,一部分是由于均匀荷载产生向下的挠度 δ_c',另一部分是由于力 T 产生向上的挠度 δ_c''. 与此同时,缆索端头(C 点)将向下偏移 δ_c''' 值,该值等于缆索的伸长量. 所以,表达梁端向下位移等于缆索端头位移这一事实的协调方程为:

$$\delta_c' - \delta_c'' = \delta_c'''$$

列出此方程后,现在我们转到求算三个挠度项的工作上.

挑臂端点由于均匀荷载产生的挠度可根据第 6.5 节例题 3 所得结果来求出. 应用那个例题中的方程(a),并代入 $a=L$,我们得到

$$\delta_c' = \frac{qL^4}{4EI}$$

其中 EI 为梁的弯曲刚度. 梁上 C 点处由于力 T 产生的挠度可根据习

题6.5-11 的答案代入 $a=L$ 来采用；因此

$$\delta_c'' = \frac{2TL^3}{3EI}$$

最后，缆索的伸长量为

$$\delta_c''' = \frac{Th}{EA}$$

式中 h 为缆索的长度，EA 为其轴向刚度。

将上面诸挠度公式代入协调方程，对力 T 进行求解，我们得到

$$T = \frac{3qAL^4}{8AL^3 + 12hI} \tag{7-18}$$

注意，在本例题中，其赘余力是选择内力值，而不是外反力。赘余力的选择通常根据求解的方便来确定。

7.4 力矩-面积法

另一种分析静不定梁的途径是应用力矩-面积法，这种方法早在第 6.4 节中用作求梁的挠度方法时已经叙述过了。其程序包括利用两个力矩-面矩定理得出计算赘余力时所需要的附加方程。这些附加方程代表梁的斜度和挠度方面的条件，这种条件的数目总是等于赘余力的数目。

梁用力矩-面积法的分析，按前面叙述过的相同步骤来进行，亦即选择赘余力，并将它们从结构上移去，使之成为静定的放松结构。然后假设将荷载作用于放松结构上，绘出相应的弯矩图。类似地，将赘余力作为荷载作用于放松结构上，再次绘出所得的弯矩图。在此阶段，力矩-面积定理用来提供包含 M/EI 图的面积和其一次矩的方程所组成的附加关系。自然，所用的特定关系与梁的类型和赘余力的选择有关。

例题 1　应用力矩-面积法求图 7-11a 所示固定-简单梁的反力。

如果 R_b 被选作赘余力，那么放松结构为一悬臂梁，该梁由于 P 和 R_b 所产生的弯矩图示于图 7-11b 中。因为支承 A 处梁的斜度为零，我

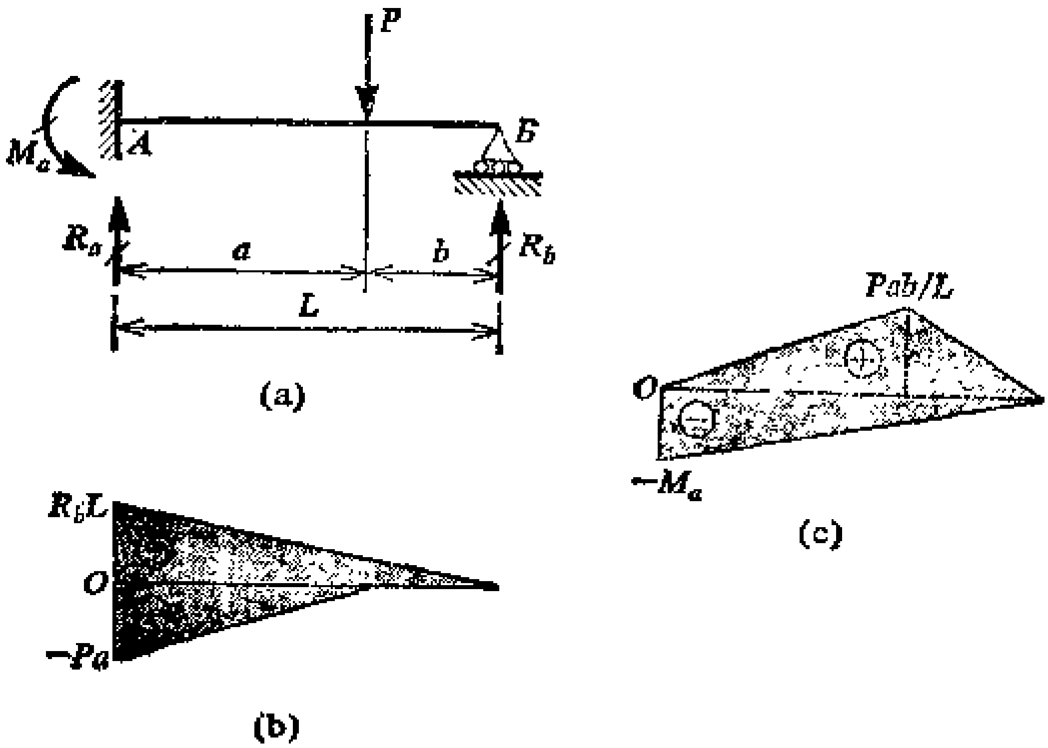


图 7-11　例题1.力矩-面积法

们看出 A 处挠度曲线的切线通过 B 点。因此，根据力矩-面积第二定理，A 和 B 之间 M/EI 图对 B 点的一次矩必须等于零。这个关系得出下列方程：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R_bL}{EI}\right)(L)\left(\frac{2L}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{Pa}{EI}\right)(a)\left(L-\frac{a}{3}\right)=0$$

根据它

$$R_b=\frac{Pa^2}{2L^3}(3L-a) \qquad (7\text{-}19)$$

知道这个赘余反力之后，我们可以根据静力平衡求出另外两个反力，其结果为：

$$R_a=\frac{Pb}{2L^3}(3L^2-b^2) \qquad M_a=\frac{Pab}{2L^2}(L+b) \qquad (7\text{-}20)$$

采取另一种方法，我们可考虑反力矩 M_a 作为赘余力来求解这同一根梁。在这种情况下，其放松结构为一简单梁，由于 P 和 M_a 产生的相应弯矩图示于图 7-11c 中。再次应用力矩-面积第二定理，取 M/EI 图对B 点的一次矩，我们得到：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Pab}{LEI}\right)(L)\left(\frac{L+b}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{M_a}{EI}\right)(L)\left(\frac{2L}{3}\right)=0$$

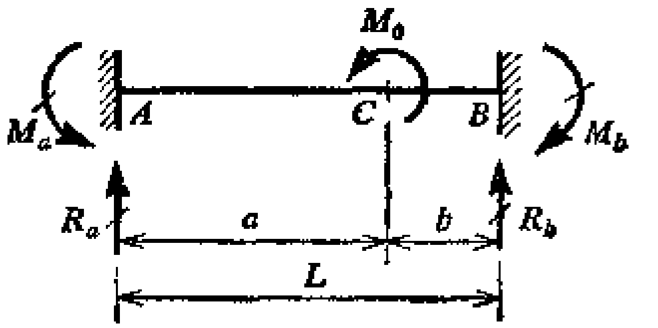
求解此方程，我们得到的 M_a 与前面所得的结果相同(见方程 7-20).

根据上面的结果，代入 $a=b=L/2$，我们可以容易地得到在中央处作用集中荷载时梁的反力为：

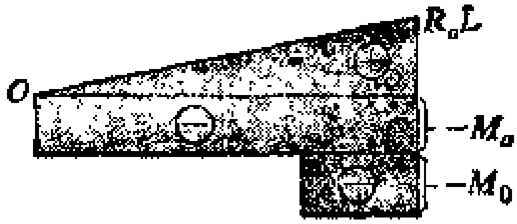
$$R_a=\frac{11P}{16} \qquad R_b=\frac{5P}{16} \qquad M_a=\frac{3PL}{16} \tag{7-21}$$

例题 2　试确定承受力偶 M_0 的固定端梁的反力(图 7-12 a)，并求出力偶作用点 C 处梁的挠度。

必须首先选择赘余力，这种选择的可能性是 R_a 和 M_a，或 R_b 和 M_b，或 M_a 和 M_b。让我们首先选择支承 A 处的反力作为赘余力．于是我们得到固定于 B 处的悬臂梁作为放松结构，我们可以容易地绘制由于 R_a，M_a 和荷载 M_0 所产生的弯矩图(见图 7-12 b)。



(a)



(b)

图 7-12　例题2.力矩-面积法

为了求出这两个赘余力，需要两个与梁的挠度有关的条件．其中第一个条件，我们注意到梁两端的斜度为零，因此 A 和 B 之间的斜度变化为零．根据力矩-面积第一定理得出 A 和 B 之间 M/EI 图的面积必

须为零，因而

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R_aL}{EI}\right)(L)-\frac{M_a}{EI}(L)-\frac{M_0}{EI}(b)=0$$

或

$$R_aL^2-2M_aL=2M_0b \tag{a}$$

第二个条件是根据 A 点处挠度曲线的切线通过 B 点这一事实来获得，其意思是 A 和 B 之间 M/EI 的面积对 B 点的一次矩为零。所得的方程为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{RaL}{EI}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right)-\frac{M_a}{EI}(L)\left(\frac{L}{2}\right)-\frac{M_0}{EI}(b)\left(\frac{b}{2}\right)=0$$

或

$$R_aL^3-3M_aL^2=3M_0b^2 \tag{b}$$

现在可以联解方程(a)和(b)求出赘余力：

$$R_a=\frac{6M_0ab}{L^3} \qquad M_a=\frac{M_0b}{L^2}(2a-b) \tag{7-22}$$

另外两个反力可根据静力平衡之考虑求得：

$$R_b=-R_a \qquad M_b=\frac{M_0a}{L^2}(a-2b) \tag{7-23}$$

荷载作用点处的挠度 δ_c 可根据力矩-面积第二定理来求得。此挠度等于 A 和 C 之间 M/EI 图的面积对 C 点的一次矩，参见图 7-12 b，我们看出此挠度为

$$\delta_c=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\left(\frac{R_aL}{EI}\right)(a)\left(\frac{a}{3}\right)-\frac{M_a}{EI}(a)\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{R_aa^3}{6EI}-\frac{M_aa^2}{2EI}$$

代入 R_a 和 M_a 的表达式(见方程 7-22)，我们得到荷载处的挠度：

$$\delta_c=\frac{M_0a^2b^2(b-a)}{2L^3EI} \tag{7-24}$$

当力偶 M_0 作用于跨度中点时，梁的反力为

$$M_a=-M_b=\frac{M_0}{4} \qquad R_a=-R_b=\frac{3M_0}{2L} \tag{7-25}$$

中央处的挠度(方程 7-24)变为零。

7.5 有限差分法

前面用于求梁挠度的有限差分法也可用于静不定梁的分析．在第 6.7 节中，我们已看到为了求梁的挠度，需要知道沿梁轴上每一选择点处的弯矩 M_i（见方程 6-30）．因为有多少个未知挠度就有多少个有限差分方程，其挠度可藉联解诸方程来求得．

对于静不定梁，常常以选择赘余量开始其分析．在选定它们之后，我们可以用赘余力和作用力两者来表示梁上任一截面处的弯矩．然后将弯矩的表达式代入有限差分方程（方程 6-30）．由此得出，有限差分方程中所出现的未知量的个数将等于沿梁轴未知挠度的个数与赘余力的个数之和．总有足够数目的方程去求解这些未知数，因为涉及每一个赘余力为一个有关斜度或挠度的条件．有限差分法具有能够用于非棱柱形梁的分析的优点，在用于非棱柱形梁分析中实际上与用于棱柱形梁所费的力几乎相同．

例题　图 7-13 所示有支承悬臂梁 AB 具有常数弯曲刚度 EI，其中点处作用有荷载 P．将竖直反力 R_b 选作赘余力，分析的任务是要计算它的值．

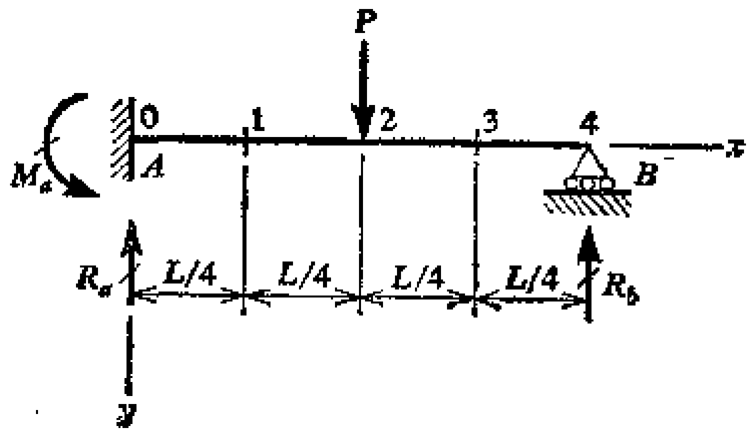


图 7-13　例题．有限差分法

当梁分成四个相等长度的区段时(见图7-13)，有三个未知挠度（v_1，v_2和v_3）。因为还有一个赘余力，未知量的总个数为四，因此需要四个有限差分方程，这些方程藉沿梁轴上0，1，2和3诸点处应用方程(6-30)来求得。所以，需要求算用赘余力表示这些点上的力矩如下：

$$M_0=R_bL-\frac{PL}{2},\qquad M_1=\frac{3R_bL}{4}-\frac{PL}{4},\qquad M_2=\frac{R_bL}{2},\quad M_3=\frac{R_bL}{4}$$

0点处的有限差分方程成为：

$$v_{-1}-2v_0+v_1=-\frac{L^2}{16EI}\left(R_bL-\frac{PL}{2}\right)$$

因为固定端处的挠度为零($v_0=0$)，而且斜度为零($v_{-1}=v_1$)，此方程简化为

$$v_1+\frac{R_bL^3}{32EI}=\frac{PL^3}{64EI}\tag{a}$$

注意：v_1和R_b均为未知量，因此放到该方程的左边。1，2和3诸点处的有限差分方程按类似方法来求得，我们得到下列三个方程：

$$-2v_1+v_2+\frac{3R_bL^3}{64EI}=\frac{PL^3}{64EI}\tag{b}$$

$$v_1-2v_2+v_3+\frac{R_bL^3}{32EI}=0\tag{c}$$

$$v_2-2v_3+\frac{R_bL^3}{64EI}=0\tag{d}$$

(a)，(b)，(c)和(d)这四个方程可对三个挠度和赘余力R_b进行求解。R_b的解为：

$$R_b=\frac{7P}{22}=0.3182P$$

它稍高于精确值(见方程7-21)：

$$R_b=\frac{5P}{16}=0.3125P$$

因而，即使当梁只分成少数几个区段时，有限差分法也能得出很满意的赘余值结果。当采用许多区段时，其计算不用手进行，而应该利用计算机去求解联立方程。

7.6 连续梁

连续跨越多个支承的梁(例如图 7-14)称为连续梁，它在房屋建筑、管道线路、桥梁以及各种特殊结构中是经常碰到的. 如果连续梁上的荷载均为竖直者，而且没有轴向变形，那么所有反力将是竖直的. 为了阐明这一特点，我们可以讨论支承之一为销轴支承，而所有其它支承均为辊轴支承的梁，如图所示. 这样，反力的总个数与支承的个数相同，但其静不定次数要比这个数目少两个. 因此，图 7-14 中所示的梁，有五个竖直反力，其中有三个为赘余力.

虽然我们可以用前节中所述的任何一种方法分析连续梁，但是只有迭加法是切实可行的. 一种可能性是选择中间

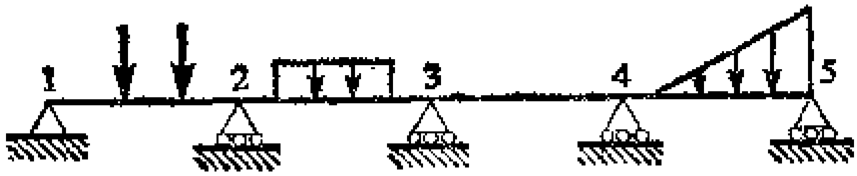
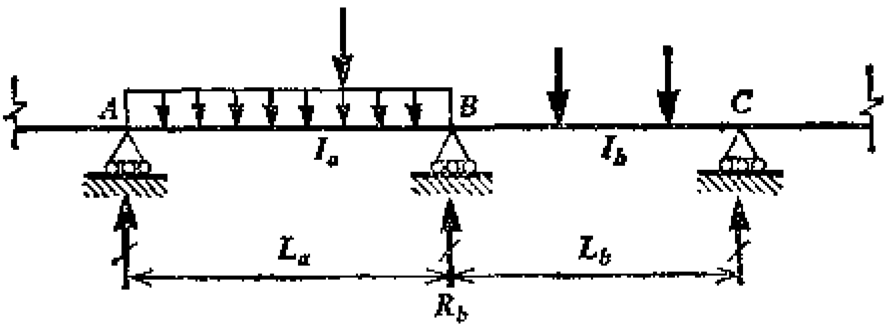


图 7-14 连续梁

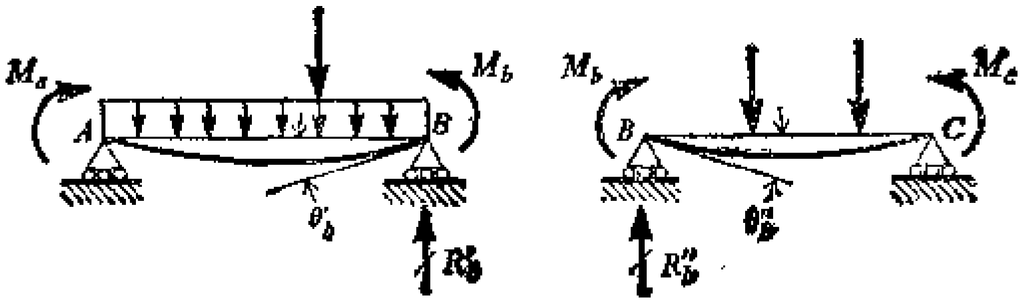
支承处的反力作为赘余力，在此情况下，其放松结构为一简单梁. 这种处理方法在第 7.3 节中的例题 1 内已经使用过（见图 7-6)，对于只有两跨或三跨的梁是满意的. 当多于两个赘余力时，选择中间支承处梁内的弯矩作为赘余力是有利的. 这种选择大大地简化了计算，因为它导出的联立方程组中，每一个方程至多出现三个未知数，而与赘余力总的个数无关.

现在让我们更详细地介绍这种分析连续梁的方法. 当支承处的弯矩从结构中放松时，支承处梁的连续性被破坏，因而其放松结构由一系列简单梁组成. 每一根这样的梁承受垂直作用于它上面的外力以及作用于梁端处的两个赘余弯矩. 在

所有这些荷载作用下，我们可以确定每一简单梁诸端点处的旋转角. 表达每一支承处相邻梁必须具有相同旋转角的协调方程,提供求解未知弯矩所必需的方程. 例如，讨论图 7-15 a 中所示连续梁的一部分. 其相邻三个支承为 A, B, C. 两相邻跨的长度和惯性矩分别以 L_a, I_a 和 L_b, I_b 表示. 令 M_a, M_b 和M_c表示三个支承处的弯矩. 这些弯矩的真实方向与梁上的荷载有关,但是在此推导中，我们假设均为正，亦即梁的顶面产生压缩. 其放松结构由图 7-15 b中所示两个相邻跨的简



(a)



(b)



(c)

图 7-15 三弯矩方程

单梁组成．每一跨承受实际外荷加上赘余弯矩的作用．

图7-15 b中所示荷载使两个简单梁产生挠度．支承B处左边梁的转角以θ_b'示于图中，而此同一支承处右边梁的转角以θ_b''表示．图中所表示的这些角均采取正值，亦即与正弯矩M_b为相同的方向．由于梁的轴线实际上是连续地跨越支承B，所以其协调方程为

$$\theta_b' = -\theta_b'' \tag{a}$$

它表示两个简单梁在B处的斜度必须彼此配合上．第二个步骤是列出角θ_b'和θ_b''的适当表达式．

与作用于放松结构上的外力有关的弯矩图示于图7-15 c中．这种图的特定形状与荷载的性质有关．然而，在所有情况下，我们可以用它们的面积和形心距离来表示弯矩图的特征．让我们分别以A_a和A_b表示两个弯矩图的面积，另外，以$\bar{x}_a$表示A点至A_a的形心之距离，以$\bar{x}_b$表示C点至A_b的形心之距离．现在我们可以应用弯矩图的这些特征去求算θ_b'角和θ_b''角．我们根据力矩-面积第二定理注意到：作用于梁AB上的外荷载对角θ_b'的影响为：

$$\frac{A_a\bar{x}_a}{EI_aL_a}$$

此外，力矩M_a和M_b对θ_b'的影响有如下值：

$$\frac{M_aL_a}{6EI_a} \text{和} \frac{M_bL_a}{3EI_a}$$

因而，角θ_b'为

$$\theta_b' = \frac{M_aL_a}{6EI_a} + \frac{M_bL_a}{3EI_a} + \frac{A_a\bar{x}_a}{EI_aL_a} \tag{b}$$

考虑右边跨度BC，我们用类似方式得到下列θ_b''的方程：

$$\theta_b'' = \frac{M_bL_b}{3EI_b} + \frac{M_cL_b}{6EI_b} + \frac{A_b\bar{x}_b}{EI_bL_b} \tag{c}$$

将(b)和(c)代入方程(a)，并重新排列，我们得出：

$$M_a\left(\frac{L_a}{I_a}\right)+2M_b\left(\frac{L_a}{I_a}+\frac{L_b}{I_b}\right)+M_c\left(\frac{L_b}{I_b}\right)$$
$$=-\frac{6A\bar{x}_a}{I_aL_a}-\frac{6A_b\bar{x}_b}{I_bL_b} \qquad (7\text{-}26)$$

此方程称为**三弯矩方程**，因为它涉及梁中的三个相邻弯矩。对于连续梁的每一中间支承可以写一次这样的方程，这样就提供出与未知弯矩个数一样多的方程。

如果所有跨度的惯性矩 I 都相同，那么三弯矩方程变得稍微简单一些：

$$M_aL_a+2M_b(L_a+L_b)+M_cL_b=-\frac{6A_a\bar{x}_a}{L_a}-\frac{6A_b\bar{x}_b}{L_b} \qquad (7\text{-}27)$$

如果梁上的荷载均为已知，上列方程的右边诸项总可以求算出来。例如，如果跨度 AB 上作用强度为 q 的均匀荷载，我们得到：

$$A_a=\frac{2}{3}\left(\frac{qL_a^2}{8}\right)(L_a)=\frac{qL_a^3}{12} \qquad \bar{x}_a=\frac{L_a}{2}$$

因此

$$\frac{6A_a\bar{x}_a}{L_a}=\frac{qL_a^3}{4} \qquad (7\text{-}28)$$

当跨度中心处作用集中荷载 P 时，其结果为

$$A_a=\frac{1}{2}\left(\frac{PL_a}{4}\right)(L_a)=\frac{PL_a^2}{8} \qquad \bar{x}_a=\frac{L_a}{2}$$

和

$$\frac{6A_a\bar{x}_a}{L_a}=\frac{3PL_a^2}{8} \qquad (7\text{-}29)$$

这两个例题均足以证明在求算包括弯矩图的诸项时没有较大的困难。在这一步完成后，只要写下它们就可以将方程列

出，然后，可对它们求解未知弯矩[1]。

在上面整个讨论中，假设连续梁的最外两端点均为简支者。如果这两个端点中的一个或两个为固定支承，其赘余弯矩的数目将要增加(见图 7-16 a)。处理这种情况的最简单方法是用附加梁跨来代替固定支承，然后对该跨给以无穷大的惯性矩(见图 7-16 b)。这个具有无穷大刚度的外加跨度之效应是阻止支承 1 转动，它与固定支承的条件相同。图 7-16 b 所示连续梁中 1，2 和 3 点处求得的弯矩将与原来梁的弯矩相同。对于外加跨给定的长度没有关系(只要它大于零)，因为它总是脱离开三弯矩方程。

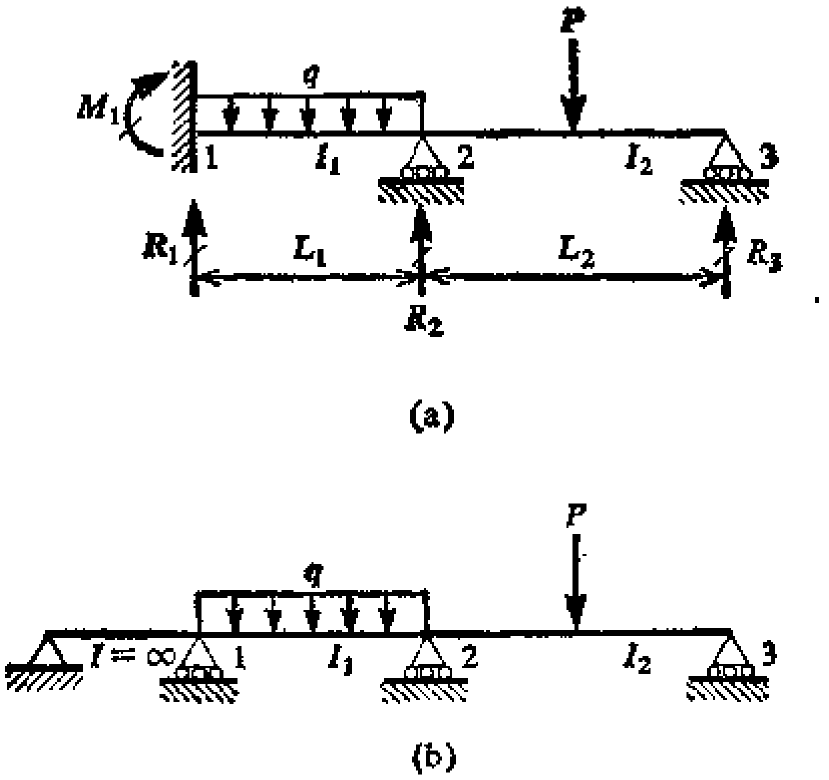


图 7-16 用无限大惯性矩的梁跨代替固定支承

在求得连续梁支承处的弯矩之后，用静力平衡方程去求

1) 三弯矩方程是法国工程师 Clapeyron 和 Bertot 在十九世纪中期提出的(见参考文献 7-4)。

反力是没有困难的。再次讨论两个相邻跨（图 7-15 b），令 R_b' 和 R_b'' 为 AB 和 BC 两简单梁上 B 点处的反力。它们之和得出支承 B 处的总反力 R_b(图 7-15 a)。反力 R_b' 由这样三部分组成：由于外荷载产生的简单梁反力、由于 M_a 产生的反力(等于 M_a/L_a)和由于 M_b 产生的反力(等于 $-M_b/L_a$)。类似地，反力 R_b'' 等于外载产生的简单梁反力加上 M_c/L_b 和 $-M_b/L_b$。合併所有这些项得出总反力 R_b。将这种同样的程序用于每一支承处，直到计算出所有反力为止。自然，如果在支承处梁上作用有集中荷载，那么它将直接计人反力。

例题 1　为了说明三弯矩方程的应用，求解图 7-17 中所示的例题。该梁有三个相等长度的跨度和常数惯性矩，仅在第一跨和第三跨加载。假设集中荷载 P 等于 qL。

方程(7-27)可以用于此例题中，因为所有跨度的惯性矩均相同。作为预备工作，我们要确定三跨中每一跨的 $6A\bar{x}/L$ 项，这些项出现于该方程的右边。对于 1-2 跨，这一项为 $qL^3/4$，按方程(7-28)得到。对于 2-3 跨，这一项变为零，因为没有荷载。最后，对于 3-4 跨，我们观察到弯矩图为一三角形，其最大纵距等于 $3PL/16$。三角形的面积为 $3PL^2/32$，它的形心距点 4 的距离为 $5L/12$（见附录 B，情况 3)。所以，$6A\bar{x}/L$ 这一项的值为 $15PL^2/64$，因为我们假设 P 等于 qL，此值就成为 $15qL^3/64$。

现在我们将对中间的二个支承写出三弯矩方程。讨论支承 2，我们看出在一般方程(7-27)中 M_a 成为 M_1（它为零），M_b 成为 M_2，M_c 成为 M_3，因此

$$2M_2(2L)+M_3(L)=-\frac{qL^3}{4}$$

或

$$4M_2+M_3=-\frac{qL^2}{4} \tag{d}$$

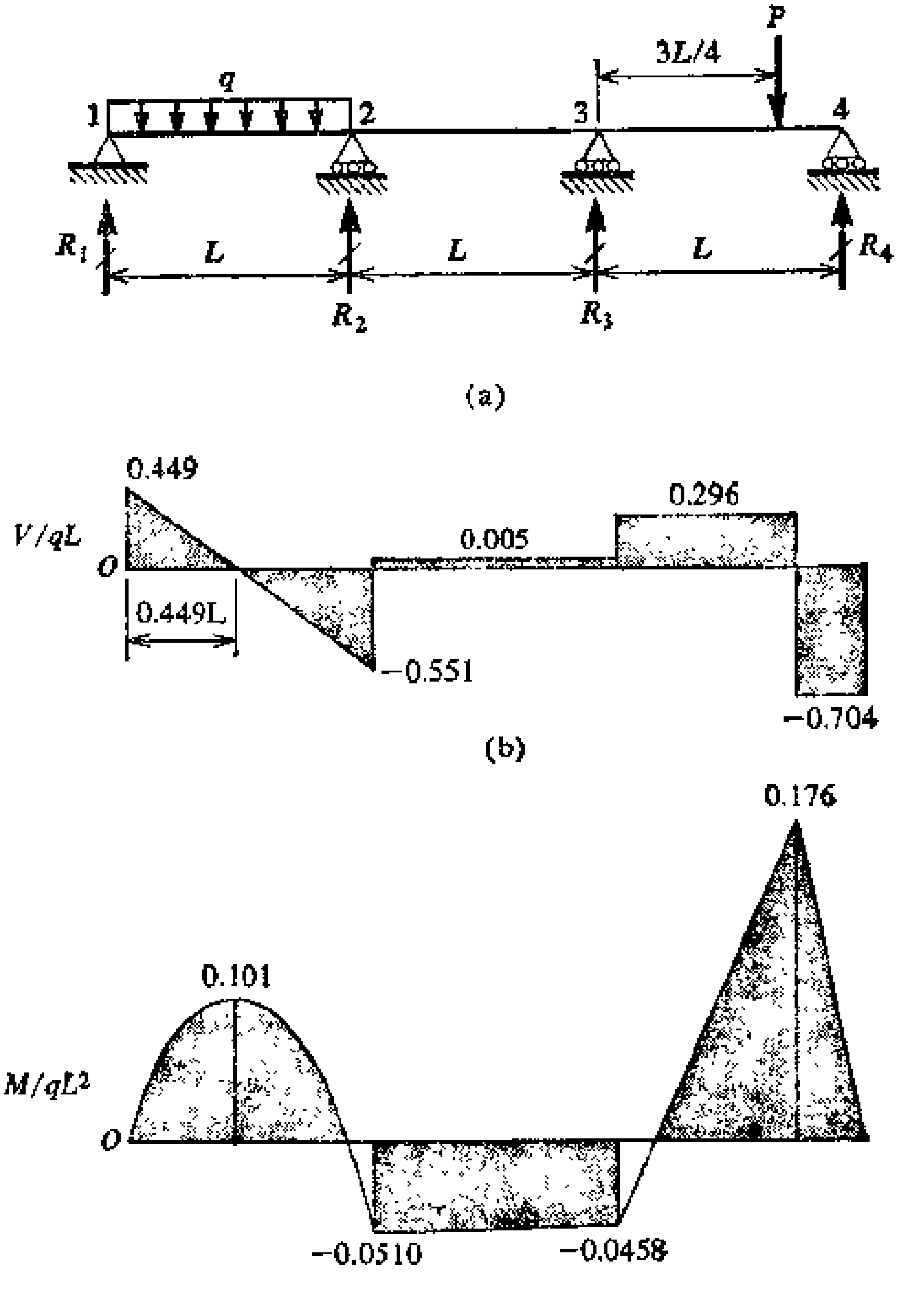


图 7-17　例题1，三弯矩方程

类似地，对于支承 3，其三弯矩方程为

$$M_2(L)+2M_3(2L)=-\frac{15qL^2}{64}$$

或

$$M_2+4M_3=-\frac{15qL^2}{64} \qquad (e)$$

求解方程(d)和(e)得出弯矩：

$$M_2=-\frac{49qL^2}{960} \qquad M_3=-\frac{11qL^2}{240} \qquad (f)$$

绘出梁上三部分中每一部分的自由体图，然后写出静力平衡方程，我们得到反力：

$$R_1=\frac{431qL}{960} \qquad R_2=\frac{89qL}{160} \qquad R_3=\frac{93qL}{320} \qquad R_4=\frac{169qL}{240} \qquad (g)$$

用这些资料，我们可以绘出整个梁的剪力图和弯矩图，如图 7-17 b 和 c 所示。

例题 2 假设有一连续梁，由于支承沉降或由于一些其它原因使所有支承不在同一水平面上。试问如何将这种影响结合到三弯矩方程中去？

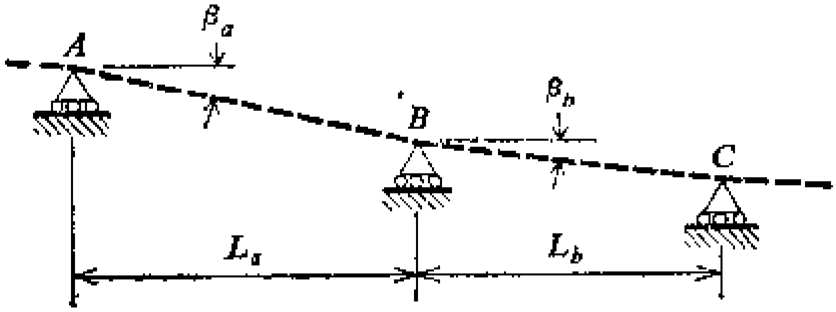


图 7-18 例题2. 支承于不同水平线上

让我们假设相邻支座 A,B,C 所定的方向如图 7-18 所示。连接 A,B,C 诸点的虚线不代表梁的轴线，而仅为诸支承点之间的直线（与图 7-15 a 相对照）。令 β_a 和 β_b 代表这些线的倾斜角，假设当右边的支承低于左边的支承时，这些倾斜角为正。现在回到 θ_b' 的方程(b)，我们注意其中所存在的诸项在此方程中将保留下来，但是另外我们必须考虑

β_a 的影响。β_a 角的存在会减小 θ'_b 的值，因此替代方程(b)，我们得到：

$$\theta'_b=\frac{M_aL_a}{6\,EI_a}+\frac{M_bL_a}{3\,EI_a}+\frac{A_a\bar{x}_a}{EI_aL_a}-\beta_a \tag{h}$$

θ''_b 的方程(见方程(c))也改变如下：

$$\theta''_b=\frac{M_bL_b}{3\,EI_b}+\frac{M_cL_b}{6\,EI_b}+\frac{A_b\bar{x}_b}{EI_bL_b}+\beta_b \tag{i}$$

代入连续性方程(方程(a))，并重新排列，我们得到三弯矩方程的较为普遍的形式：

$$M_a\left(\frac{L_a}{I_a}\right)+2\,M_b\left(\frac{L_a}{I_a}+\frac{L_b}{I_b}\right)+M_c\left(\frac{L_b}{I_b}\right)$$

$$=-\frac{6\,A_a\bar{x}_a}{I_aL_a}-\frac{6\,A_b\bar{x}_b}{I_bL_b}+6\,E(\beta_a-\beta_b) \tag{7-30}$$

无论什么时候，当支承不在同一水平线上时，这个方程都可代替方程(7-26)。

7.7 热效应

静不定梁中的温度变化将使梁产生应力和挠度。这些量可藉类似于梁上有荷载作用时所叙述过的方法来确定。其中最有用的方法或许是迭加法，这种方法藉讨论图 7-19 中所示固定端梁来说明。假设该梁顶面温度为 T_1，底面为 T_2。在应用迭加方法时，我们从放松赘余力得出静定梁来开始。如果我们取 R_b 和 M_b 作为赘余力，那么放松结构为一悬臂梁。由于温度的差别使该悬臂梁 B 端处产生的挠度和旋转角为：

$$\delta'_b=\frac{\alpha\,(T_2-T_1)\,L^2}{2\,h}\qquad\theta'_b=\frac{\alpha(T_2-T_1)\,L}{h}$$

这是按前面习题 6.10-2 所得的。在这些方程中，α 为热膨胀系数，h 为梁的高度。当 T_2 大于 T_1 时挠度 δ'_b 向上，旋转角 θ'_b 为反时针方向。

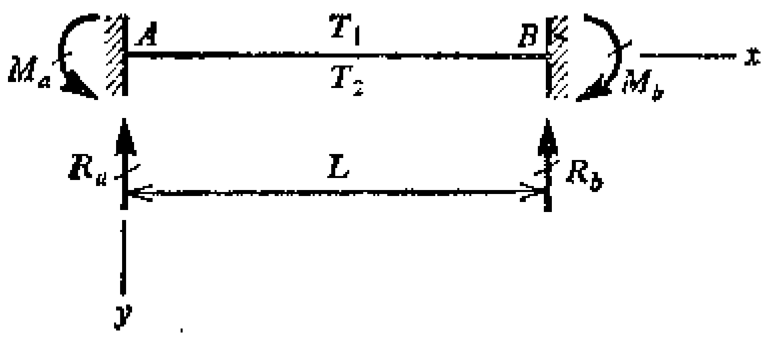


图 7-19 受到温度差影响的固端梁

由于 R_b 使放松结构产生的挠度和旋转角为：

$$\delta_b'' = \frac{R_b L^3}{3EI} \qquad \theta_b'' = \frac{R_b L^2}{2EI}$$

由于 M_b 产生的挠度和旋转角为：

$$\delta_b''' = -\frac{M_b L^2}{2EI} \qquad \theta_b''' = -\frac{M_b L}{EI}$$

这里，向上的挠度和反时针的旋转角均为正值。现在我们可以写出协调方程如下：

$$\delta_b' + \delta_b'' + \delta_b''' = 0 \qquad \theta_b' + \theta_b'' + \theta_b''' = 0$$

将各个挠度代入此方程，然后求解，我们求出：

$$R_b = 0 \qquad M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h}$$

R_b 为零这一事实可以根据梁的对称性预料到，如果这一事实在一开始时就利用了，那么上述解会得到简化，因为只需要一个协调方程。根据对称性观察到的另一个结果是：力矩 M_a 等于 M_b。所以，图 7-19 中所示固定端梁的最终反力如下：

$$R_a = R_b = 0 \qquad M_a = M_b = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{h} \qquad (7\text{-}31)$$

另一种可用于分析图 7-19 所示梁的途径是求解挠度曲线微分方程的方法。对于此例，其微分方程为：

$$EIv''=-M-\frac{\alpha EI(T_2-T_1)}{h} \tag{7-32}$$

注意此方程结合了弯矩(对照方程 6-9 a) 和温度效应 (见方程 6-42)这二者的影响。梁中弯矩的表达式为

$$M=R_a x-M_a$$

然而,如同前面所指出,我们根据梁的对称性能看出没有竖直反力,因此,我们可令 $R_a=0$,得到:

$$EIv''=M_a-\frac{\alpha EI(T_2-T_1)}{h}$$

此方程的第一次积分得出:

$$EIv'=M_a x-\frac{\alpha EI(T_2-T_1)}{h}x+C_1$$

斜度的两个边界条件(当 $x=0$ 和 $x=L$ 时, $v'=0$)得出 $C_1=0$ 和 $M_a=\alpha EI(T_2-T_1)/h$, 与方程(7-31)一致. 用这种方式求出固定端力矩之后,我们可以如同已解得那样讨论静不定问题. 然而, 如果挠度曲线方程需要求出, 可进行另一次积分. 所得挠度 v 的表达式有时是意想不到的.

7.8 梁端的水平位移

假定梁 AB 的一端为销轴支承住, 而另一端可以自由水平移动(图 7-20 a). 当梁由于荷载而弯曲时, B 端将从 B 点水平移动很小的距离到达 B' 点处. 其位移 λ 等于梁的初始长度 L 与弯曲后梁的弦长 AB' 之差. 为了求此距离,我们从讨论沿梁的曲线轴度量长度为 ds 的单元来开始. 此单元在 x 轴上投影长度为 dx. 长度 ds 与其水平投影之差为

$$ds-dx=\sqrt{dx^2+dv^2}-dx=dx\sqrt{1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}-dx \tag{a}$$

式中 v 代表梁的挠度. 现在,根据二项式定理,我们知道:

$$(1+t)^{1/2}=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{16}-\cdots$$

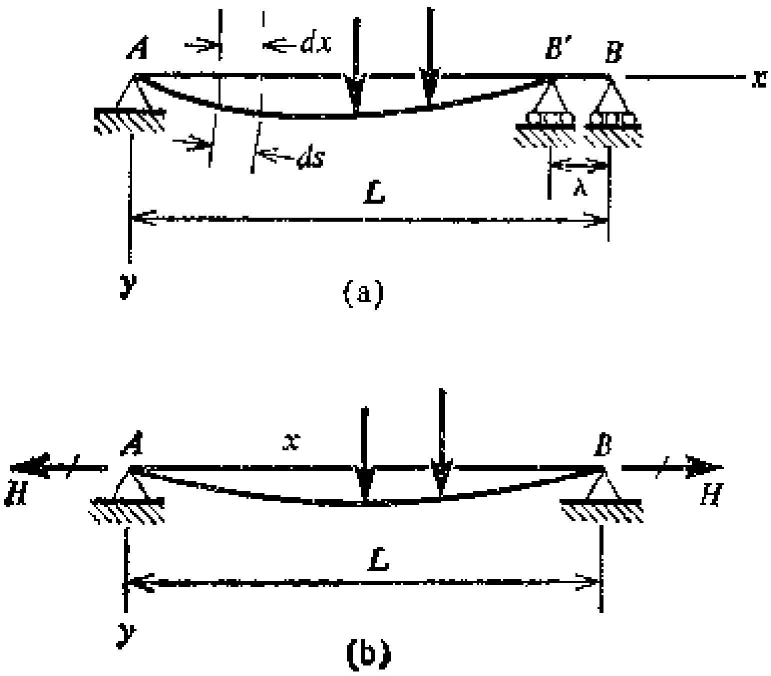


图 7-20 (a)梁端的水平位移，(b)具有不能移动支承的梁的水平反力

只要 t 在数值上小于 1 就可以。如果 t 与 1 相比为非常小的话，与其前两项相比，我们可以略去包括 t^2、t^3 等的诸项，而得到

$$(1+t)^{1/2}\approx 1+\frac{t}{2} \tag{7-33}$$

方程(a)中 $(dv/dx)^2$ 一项总是非常小的，因此，应用方程 (7-33)，我们可以重新写出方程(a)为

$$ds-dx=dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]-dx=\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

如果将此表达式对整个梁长进行积分，我们得到梁的总长与弦长 AB' 之差 λ。此差为：

$$\lambda=\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \tag{7-34}$$

因而，无论什么时候，当梁的挠度曲线方程已知时，我们可以应用方程 (7-34) 得出水平位移 λ，通常这个位移是非常小

的。

如果梁端被阻止水平移动，如图7-20b中所示，那么每一端处将产生水平反力H. 当弯曲发生时．此力将使梁的轴线拉长．此外，力H本身对于梁中的弯矩将有影响，因而也对梁的挠度曲线有影响．与其致力于这个复杂问题的精确分析，不如让我们得出力H的近似表达式以便查明它的重要性[1]．梁的挠度曲线的形状，可以合理地近似认为是一抛物线，它的方程为：

$$v=\frac{4\delta x(L-x)}{L^2} \tag{b}$$

式中δ为中央处挠度．相应于这个假定弯曲形状的距离λ可着表达式(b)代入方程(7-34)来求出，得到

$$\lambda=\frac{8\delta^2}{3L}$$

使梁拉长此值所需要的力H为：

$$H=\frac{EA\lambda}{L}=\frac{8EA\delta^2}{3L^2}$$

而相应轴向拉应力为

$$\sigma=\frac{H}{A}=\frac{8E\delta^2}{3L^2} \tag{c}$$

梁中央处的挠度δ与其长度相比通常是非常小的，例如，δ/L的比值可为1/500．应用这个数，而且还假设材料为$E=30\times10^6$磅/吋^{2}的钢，我们根据方程(c)看出其应力σ仅为320磅/吋^2．因此，由于H所产生的轴向应力与梁的容许弯曲应力相比是非常小的．另外，实际上，梁的端点不可能严格地嵌固，某些微小的水平位移总是会发生，因而减小了上面所计算的轴向力．所以，我们得出结论：习惯上略去水平约束影响

---

1) 轴向荷载和横向荷载同时作用的梁在《高等材料力学》中详细地讨论．

的做法和假设梁的一端位于辊轴上是有理由的[1]。

习　题

7.2-1　用第 7.2 节中所得的结果绘出图 7-2 所示有支承悬臂梁的剪力图和弯矩图，标上包括最大值和最小值这种关键性的纵距。

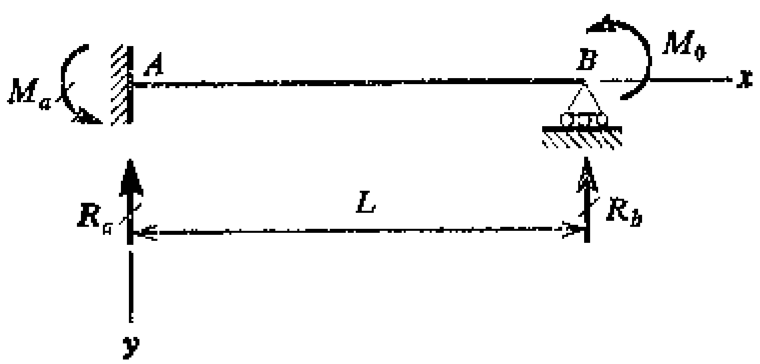
7.2-2　试确定图 7-2 中所示有支承悬臂梁中最大挠度 δ_{max} 的位置和其值。

7.2-3　藉求解挠度曲线的二阶微分方程，并以反力矩 M_a 作为赘余力，确定图 7-2 中所示有支承悬臂梁的反力。

7.2-4　藉求解挠度曲线的四阶微分方程来确定图 7-2 中所示有支承悬臂梁的反力。

7.2-5　试导出固定端梁在均匀荷载作用下的挠度曲线方程，并确定其反力(见图 7-9)。

7.2-6　试确定图中所示有支承悬臂梁的反力和挠度曲线方程。梁上的荷载为作用于 B 端处的力偶 M_0。



习题 7.2-6

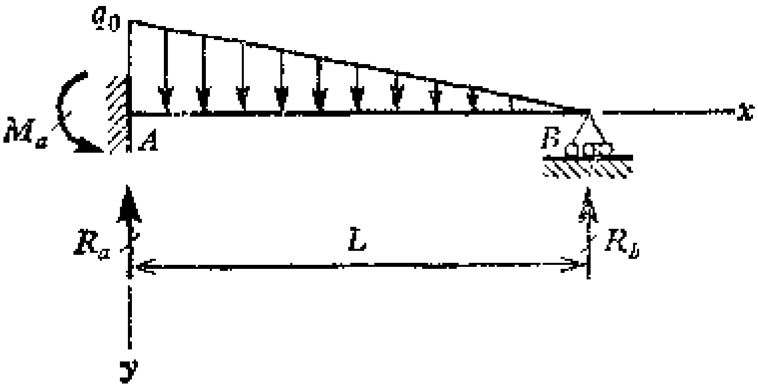
7.2-7　试求三角形分布荷载作用下有支承悬臂梁的挠度曲线方程，并求出全部反力(见图)。

7.2-8　试求出图中所示固定端梁的反力和挠度曲线方程。

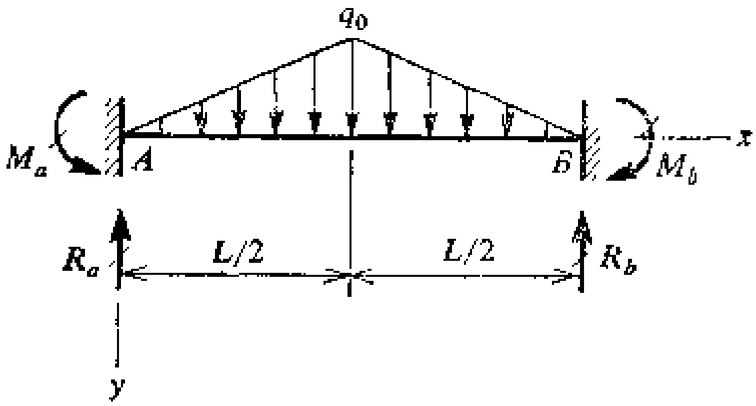
7.2-9　试导出三角形荷载作用下固定端梁的挠度曲线方程并确定其全部反力。

---

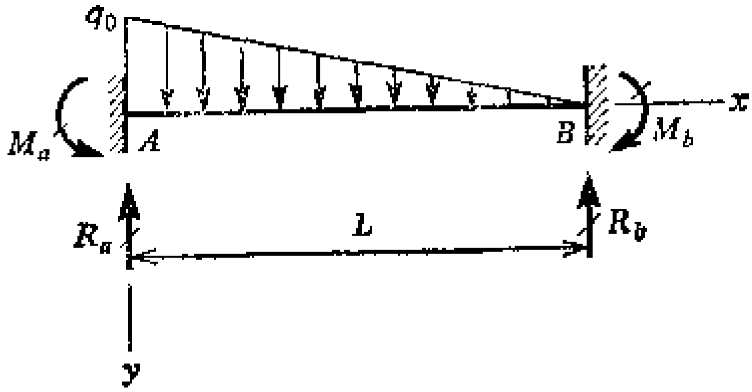
1) 对于具有不能移动支承的梁的较精确分析见参考文献 7-7。



习题 7.2-7



习题 7.2-8



习题 7.2-9

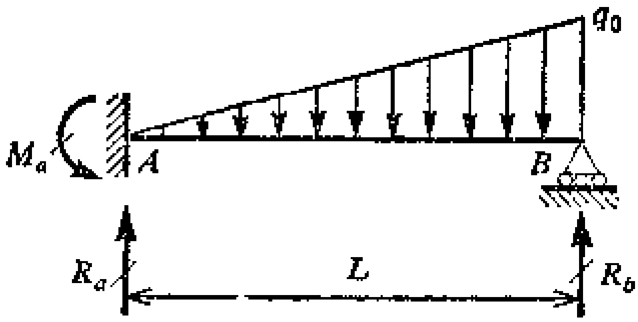
习题 7.3-1 至 7.3-15 用迭加法求解

7.3-1 选择反力 R_c 作为赘余力，求出图 7-6 a 中所示双跨梁的全部反力．另外，绘出梁的剪力图和弯矩图。

7.3-2 用反力 M_b 和 R_b 作为赘余力，求出图 7-7 a 中所示集中

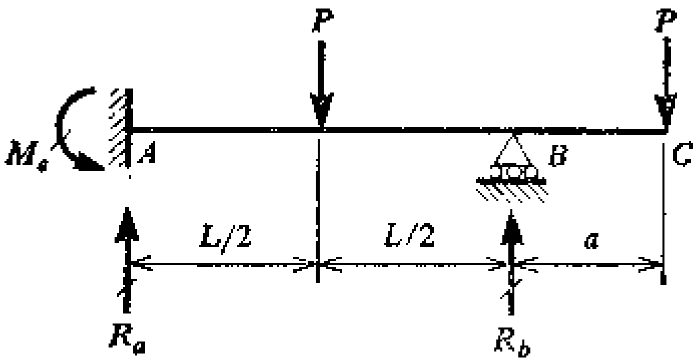
荷载作用下固定端梁的全部反力。另外，绘出梁的剪力图和弯矩图.

7.3-3　试确定图中所示三角形荷载作用下有支承悬臂梁的全部反力。



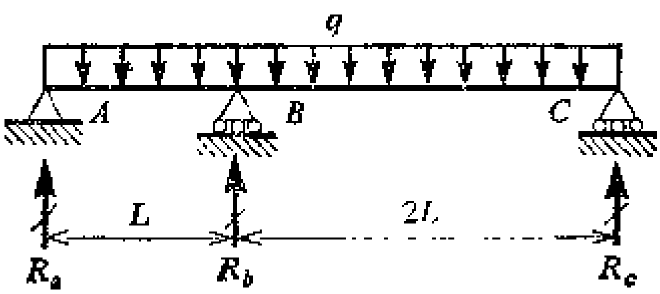
习题 7.3-3

7.3-4　求出图中所示梁的反力。



习题 7.3-4

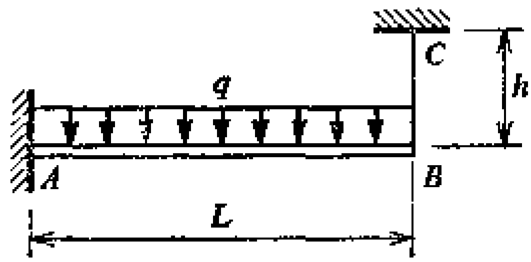
7.3-5　有一两孔不等跨的连续梁，承受了均匀荷载，如图所示.试求该梁的全部反力.



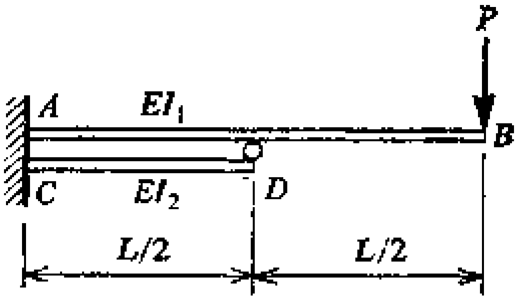
习题 7.3-5

7.3-6　图中所示的悬臂梁 AB，其自由端藉缆索 BC 吊挂住。在荷载作用之前，缆索是拉紧的但它没有受力。试求强度为 q 的均匀荷载作用下缆索所产生的力 T。假设 EI＝梁的弯曲刚度，EA＝缆索的轴向刚度。

7.3-7　有两悬臂梁 AB 和 CD，如图中所示那样支承住。在两梁之间 D 点处设有辊子。上面梁的弯曲刚度为 EI_1，下面梁的弯曲刚度为 EI_2，试求 D 点处梁之间所传递的力 F。

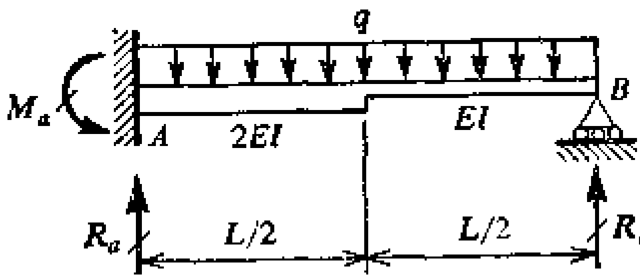


习题 7.3-6



习题 7.3-7

7.3-8　图中所绘为一承受均匀荷载的非棱柱形梁 AB。试求该梁的反力。



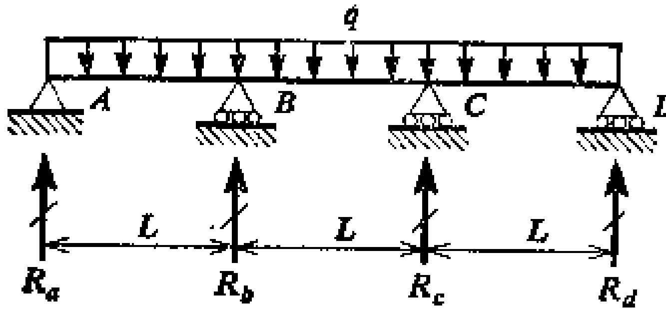
习题 7.3-8

7.3-9　试求图中所示三跨连续梁的反力表达式。

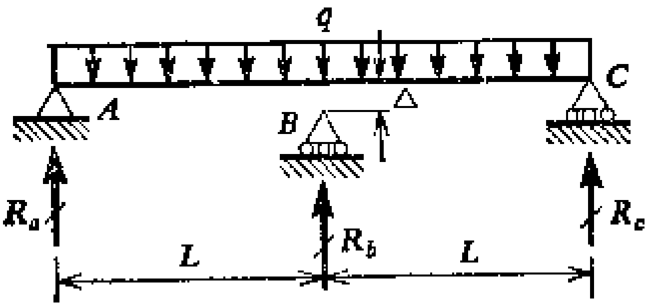
7.3-10　取支承处的力矩作为赘余力，求出部分跨度上承受均匀荷载的固定端梁(图 7-8)的反力。

7.3-11　有一根三跨连续梁(见习题 7.3-9 中的图)，其跨度 AB 上承受均匀荷载，而跨度 BC 和 CD 上没有荷载。试确定梁的反力。

7.3-12　有一根两跨梁，在荷载作用之前，它支承于 A 和 C 处



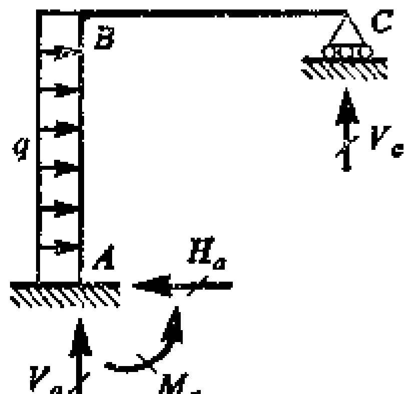
习题 7.3-9



习题 7.3-12

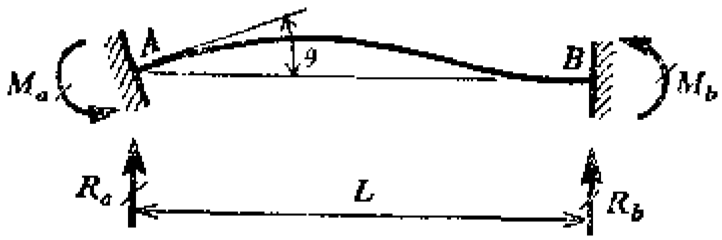
(见图)。梁与 B 处支承之间有一微小的空隙。当均匀荷载作用于梁上时，其空隙密合，所有三个支承都产生反力。试问要使三个反力都相等时空隙 Δ 的大小是多少？

7.3-13 有一连续框架 ABC 固定于支承 A 处，其 C 处用辊轴支承住，B 点处为刚性角点联结(见图)。试求框架的所有反力(注意：略去杆件的轴向变形，仅考虑弯曲影响。另外，假设每一根杆的长度为 L，弯曲刚度为 EI)。



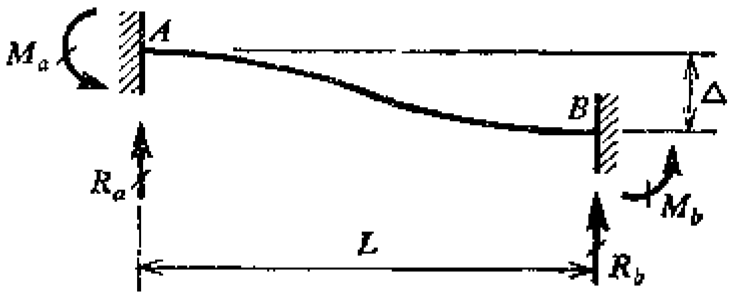
习题 7.3-13

7.3-14　有一固定端梁 AB,其左边支承转过一个微小角 θ (见图)。试确定梁的反力。



习题 7.3-14

7.3-15　有一固定端梁 AB,它的一端相对于另一端顺横向移动一个距离 Δ(见图),试求梁的反力。



习题 7.3-15

习题 7.4-1 至 7.4-9　用力矩-面积法求解

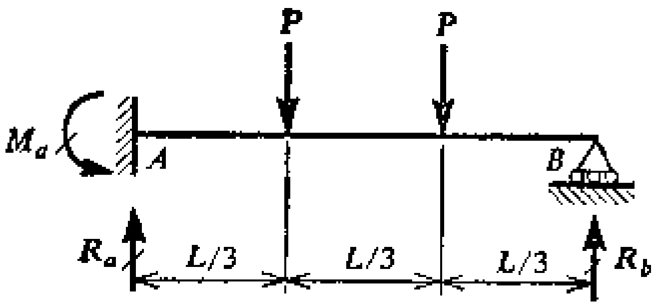
7.4-1　试求出图 7-2 中所示均匀荷载作用下有支承悬臂梁的反力。

7.4-2　习题 7.2-6 的图表示力偶 M_0 作用下的有支承悬臂梁。试求此梁的反力。

7.4-3　试确定习题 7.3-4 中图示带有挑臂的有支承悬臂梁的全部反力。

7.4-4　有两个集中荷载作用于图中所示的固定端简支梁上。试求该梁的反力。

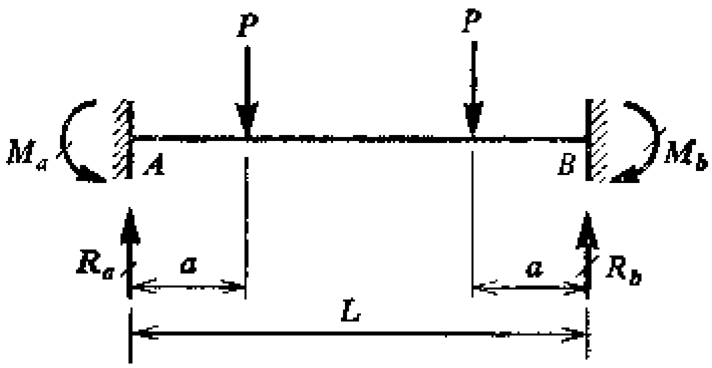
7.4-5　试求固定端梁在中央处有一集中荷载作用下的反力(见图 7-3)。另外,求出梁中央处的挠度。



习题 7.4-4

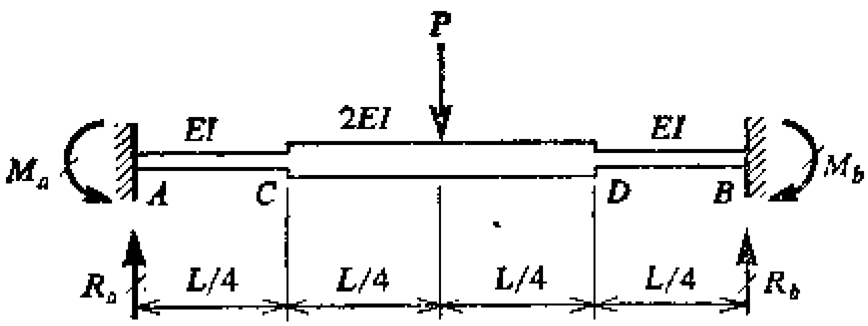
7.4-6 试确定固定端梁在均匀荷载作用下的反力和中点处的挠度(见图 7-9)。

7.4-7 试求固定端梁在两个集中荷载作用下的反力(见图)。



习题 7.4-7

7.4-8 试求图中所示集中力 P 作用下非棱柱形梁的固定端力矩。



习题 7.4-8

7.4-9 试求图 7-7 a 所示固定端梁支承处的反力和荷载 P 处的挠度。

习题 7.5-1 至 7.5-4 用有限差分法去求解

7.5-1 试求图 7-2 所示均匀荷载作用下有支承悬臂梁右端的反力 R_b。沿梁上采用四个相等区段。

7.5-2 试求习题 7.3-3 中图内所示三角形荷载作用下梁左端处的反力矩 M_a。沿梁上采用四个相等区段。

7.5-3 试求固定端梁在中点处有集中力 P 作用下的固定端力矩 M_a 和 M_b(见图 7-3)。将梁分成相等长度的四个区段。

7.5-4 试确定习题 7.3-5 中图内所示两跨连续梁支承 B 处的反力 R_b。取每一区段的长度为 $L/2$。

习题 7.6-1 至 7.6-10 用三弯矩方程求解

7.6-1 求解习题 7.3-5。

7.6-2 求解习题 7.3-9。

7.6-3 有一根两跨连续梁，整个长度上承受强度为 q 的均匀荷载。假设当荷载 q 作用时该支承下沉距离 Δ，试确定中间支承处的弯矩 M。两跨具有相等长度 L 和相同的弯曲刚度 EI。

7.6-4 有一根三跨连续梁，每一跨长度为 L，每一跨中心处作用有集中荷载 P。试绘出该梁的剪力图和弯矩图。

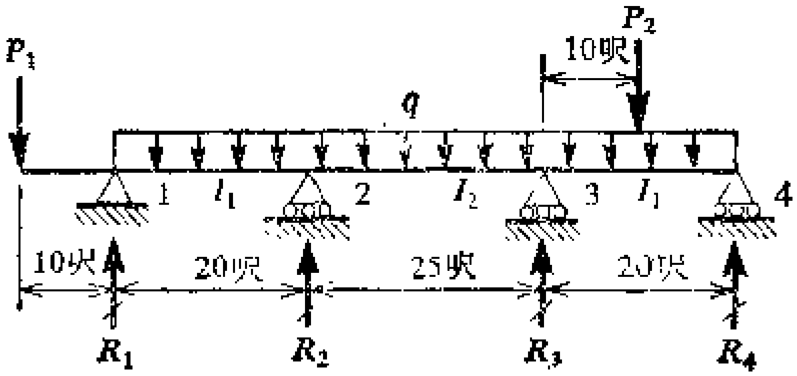
7.6-5 有一根三跨连续梁，第一跨全部承受强度为 q 的均匀荷载，而第二跨和第三跨没有荷载。试求每一支承处梁中的弯矩，假设每一跨长度为 L。

7.6-6 有一根四跨连续梁，整个长度上有强度为 q 的均匀荷载。假设每一跨长度为 L，试确定支承处的弯矩，并绘出剪力图和弯矩图。

7.6-7 有一连续梁支于四个支承上，其左端处带有挑臂，如图所示。试求诸支承处的弯矩，假设 $P_1=1$ 千磅，$q=0.4$ 千磅/呎，$P_2=3$ 千磅，$I_1=112$ 吋^4，$I_2=105$ 吋^4。

7.6-8 参看图 7-16 a 中所示带有固定支承的连续梁，假设 $L_1=L_2=L$，$I_1=I_2$，而 $P=0$。试确定由荷载 q 所引起的弯矩 M_1 和 M_2。

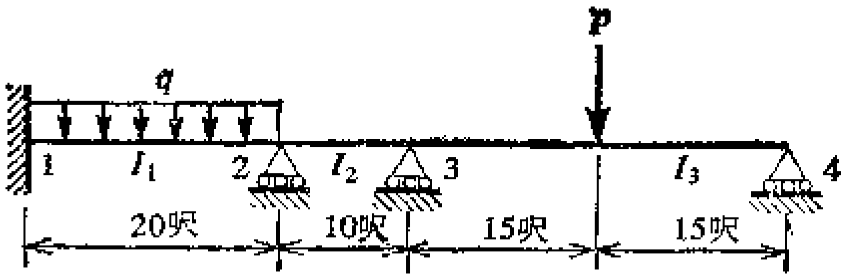
7.6-9 有一根七跨等长 L 的连续梁，中央跨上单独承受强度为



习题 7.6-7

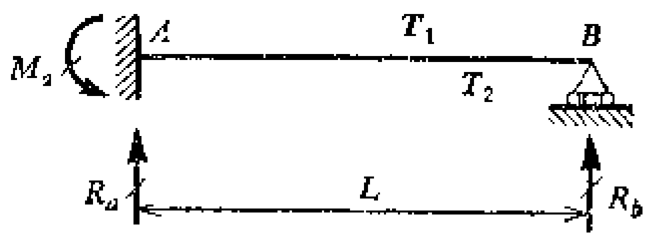
q 的均匀荷载，试求诸支承处的弯矩。

7.6-10 图中所示连续梁，其 1 处为固定支承，2，3 和 4 处均为简单支承，均匀荷载 $q=5$ 千磅/呎，$P=10$ 千磅．这三跨中的惯性矩为：$I_1=2400$ 吋^4，$I_2=1200$ 吋^4 和 $I_3=7200$ 吋^4．在荷载作用下，3 处支承竖直沉降 $\Delta=0.1$ 吋．试求该梁的弯矩 M_1，M_2 和 M_3（假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2）。



习题 7.6-10

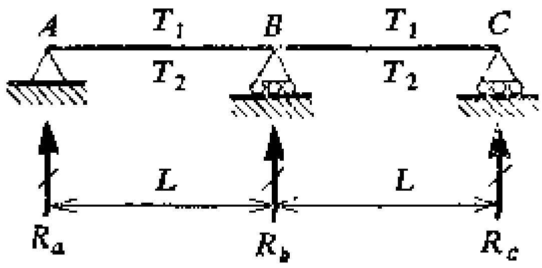
7.7-1 有一带有支承的悬臂梁，左边 A 端处固定住，右边 B 端处简单支承着，其顶面温度为 T_1，底面为 T_2（见图）．试求该梁的反力。



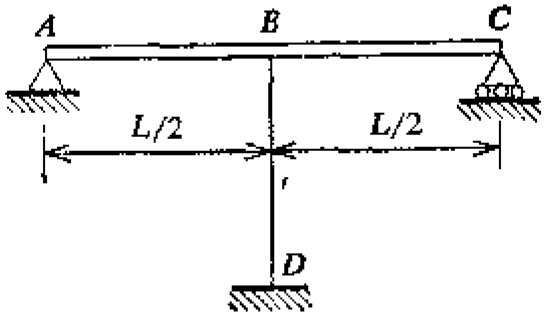
习题 7.7-1

7.7-2　有一根两跨梁，受到温度差影响（见图），试求该梁的反力．

7.7-3　有一简单梁 AB，附有一根缆索 CD，该缆索张紧但没有初始拉力（见图）．缆索的长度为 H，它的横截面积为 A．试求当温度下降 T 度时，缆索中的拉力 S．假设梁和缆索是用同一种材料制成．



习题 7.7-2



习题 7.7-3

7.8-1　计算在承受强度为 q 的均匀荷载下简单梁一端的水平移动量 λ．

7.8-2　假设有一根具有不能移动支承的梁（图 7-20 b），它的弯曲形状由方程 $v=\delta\sin\pi x/L$ 确定，试求其二端点处的水平力 H．

第八章　非对称弯曲

8.1　承受斜荷载的对称梁

在第五章提到梁的弯曲理论时，我们限于注意具有轴向对称平面的梁（图 5-1 至 5-3 中的 xy 平面）。此外，我们假设横向荷载作用于此同一平面内，因而梁也就在此平面内弯曲．在这些条件下，中性轴和对称竖直轴为其横截面的形心主轴．另外，由于弯曲所产生的法向应力与离中性轴的距离成直线变化，且按弯曲公式 $\sigma_x = My/I$ 进行计算（见图 5-3 和方程 5-10）．

在本章内，我们即将讨论**非对称弯曲**的各种例子，当与上段所述假设不符时，就发生这种非对称弯曲．倘若我们有一对称梁（横截面中有两根对称轴），但荷载作用于与对称轴斜交的方向（见图 8-1a），这是非对称弯曲中的最简单情况．倘若梁本身非对称，则产生另一种非对称弯曲，这个问题将在下一节内进行讨论．

如果对称梁上有一斜向荷载，像图 8-1a 中的悬臂梁所示那样，可以应用迭加法求其应力和挠度．该荷载可以分解成作用于对称平面内的两个分量，然后可以对每一个分量荷载分别求解弯曲问题．其最终应力和挠度藉迭加这些结果来求得．对于图 8-1a 中所绘的梁，其荷载沿 y 方向的分量为 $P\cos\theta$，而沿负 z 方向为 $P\sin\theta$．在离固定支承距离为 x 的中间横截面处，其相应弯矩为

$$M_z = (P\cos\theta)(L-x),\quad M_y = (P\sin\theta)(L-x)$$

图 8-1b 中的弯矩 M_z 和 M_y 均以它们的正方向来表示，注

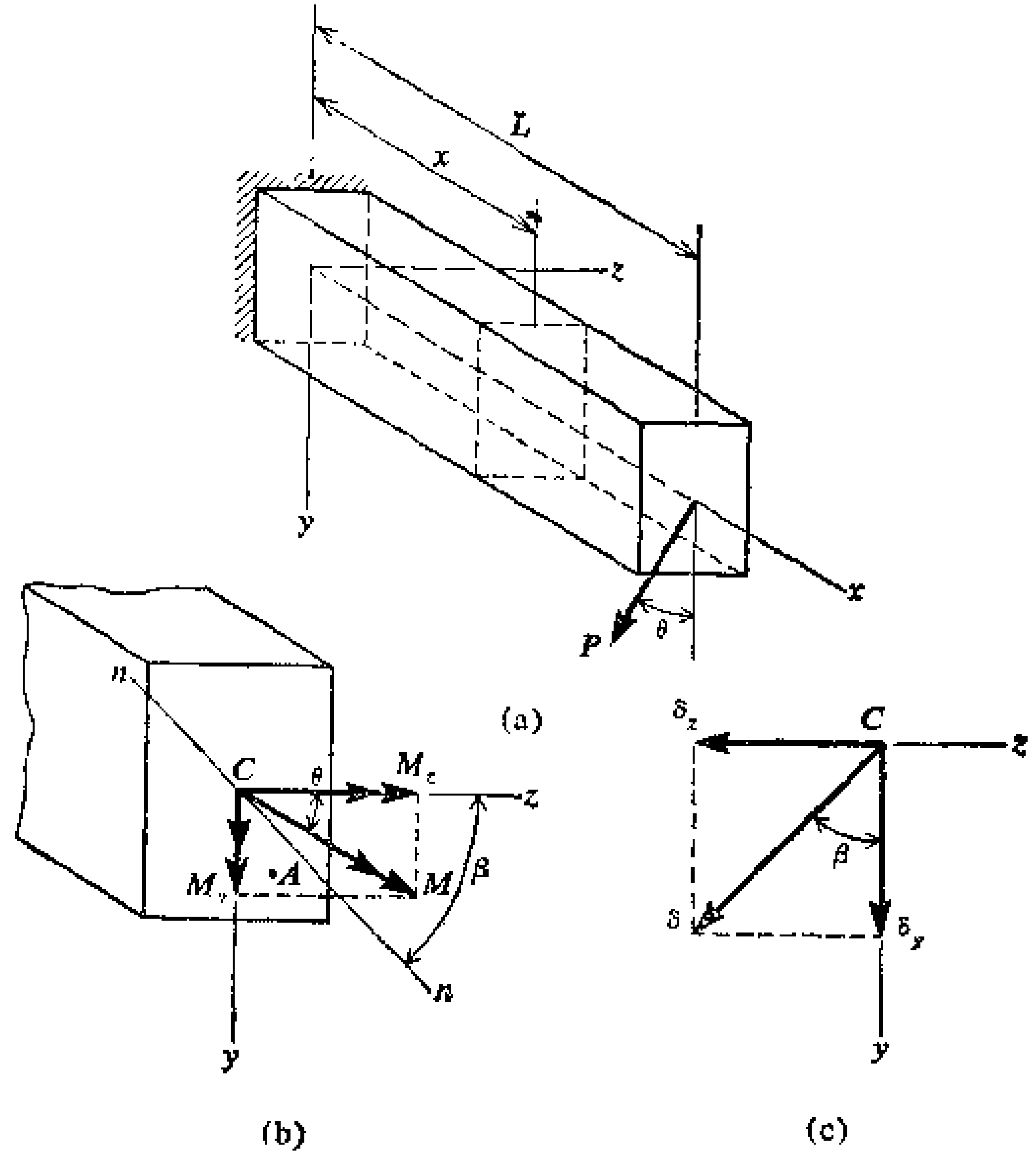


图 8-1 承受斜向荷载的对称梁.

总当弯矩的矢量(按力矩的右手规则绘出)顺其相应轴的正方向时,每一弯矩假设为正. 合成弯矩矢量M也示于该图中,它的矢量与 z 轴成 θ 角.

因为弯矩 M_y 和 M_z 为梁对称平面内的弯矩, 其相应应力可以根据弯曲公式求出. 如果我们讨论横截面中, 坐标为 y 和 z 的任意一点 A(图 8-1b), 我们看出该点处的法向应力为[1]

1) 方程(8-1)中拉应力为正, 压应力为负. ——译者注

$$\sigma_x=\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z y}{I_z} \tag{8-1}$$

式中 I_y 和 I_z 分别为对 y 轴和 z 轴的惯性矩。

最大应力发生于离中性轴最远距离的诸点处. 中性轴的位置可令应力 σ_x(方程 8-1)为零来确定. 将 $M_y=M\sin\theta$ 和 $M_z=M\cos\theta$ 代入方程(8-1),然后令 σ_x 为零,我们得出:

$$\frac{\sin\theta}{I_y}z-\frac{\cos\theta}{I_z}y=0 \tag{8-2}$$

它为中性轴(图 8-1b 中的 nn 线)的方程. 中性轴与 z 轴之间的夹角 β 用下列表达式来定义:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{y}{z}=\frac{I_z}{I_y}\operatorname{tg}\theta \tag{8-3}$$

一般地说,β 角与 θ 不相同. 因此中性轴不垂直于荷载平面. 仅当 $\theta=0^\circ$,$\theta=90^\circ$ 或 $I_z=I_y$ 时才发生例外[1]. 在这三种情况中的第一种情况下,荷载位于 xy 主平面内,其中性轴为 z 轴. 第二种情况与此相似,只是荷载位于 xz 平面内,y 轴为其中性轴. 最后, 在第三种情况下, 我们知 $I_z=I_y$, 意思是主惯性矩相等. 在这种情形下, 所有通过形心的轴具有相同的惯性矩,而且这些轴均为主轴. 这样,无论加载平面的方向如何, 加载平面总是主平面, 而且中性轴总是垂直于它.

对称梁上作用有斜荷载时, 可以对于荷载两个分量中的每一分量求出其挠度, 然后将结果迭加起来. 例如,在图 8-1a 所示悬臂梁的情况下,自由端顺正 y 方向和负 z 方向的挠度为:

$$\delta_y=\frac{PL^3\cos\theta}{3EI_z}\qquad \delta_z=\frac{PL^3\sin\theta}{3EI_y}$$

1) 意思是: 此时 β 才与 θ 相同. ——译者注

如图 8-1c 所示．其总挠度 δ 为：

$$\delta=\sqrt{\delta_y^2+\delta_z^2} \tag{8-4}$$

合成挠度矢量 δ 与 y 轴之间的夹角 β 按下列方程求出：

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\delta_z}{\delta_y}=\frac{I_z}{I_y}\operatorname{tg}\theta$$

它与方程(8-3)相同．因此，我们得出结论：合成挠度位于与中性轴相垂直的平面内．

8.2 非对称梁的纯弯曲

我们现在准备讨论具有非对称横截面的梁(图 8-2)．让我们在横截面的平面内任意选择两个互相垂直的轴 y 和 z，假设弯矩作用于该横截面上，研究使 z 轴成为中性轴的必需条件．这样做，我们观察到：在离中性轴距离 y 处面积单元 dA 上的应力按方程 (5-5) 求得为 $\sigma_x=kEy$．该单元面积上的相应力为 $kEydA$．知道此力之后，我们现在可应用静力学得出应力合力．顺 x 方向的合力必须为零，因为没有轴向力；因此

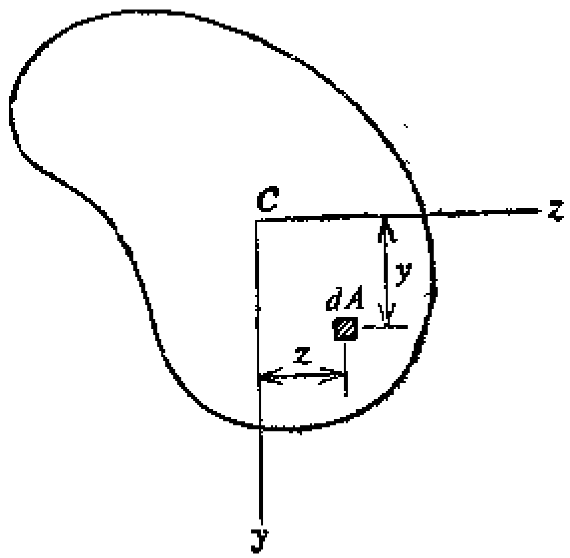


图 8-2 具有任意选择的轴的非对称横截面

$$kE\int ydA=0 \qquad \text{或} \int ydA=0 \tag{a}$$

式中的积分是对整个横截面积的．方程(a)表明中性轴必定

通过该横截面的形心，因而确定出 y 轴和 z 轴的原点.

其次，让我们讨论其弯矩. 绕 z 轴的合成弯矩为

$$|M_z| = kE\int y^2 dA = kEI, \qquad \text{(b)}$$

绕 y 轴的合成弯矩为

$$|M_y| = kE\int yz dA = kEI_{yz} \qquad \text{(c)}$$

式中 I_{yz} 为横截面积对 y 轴和 z 轴的惯性积(方程 b 和方程 c 中应用绝对值符号的理由是我们还没有建立弯矩和曲率的一致的正负号规则，然而，这件事在此阶段没有关系). 根据方程(b)和方程(c)，我们可以得出一些有趣的结论. 如果绕 z 轴为中性轴而弯曲，我们看出绕 y 轴的弯矩和绕 z 轴的弯矩都必定存在. 这两个弯矩可以合併成一个合成弯矩，该合成弯矩具有与 y 轴和 z 轴均成倾斜的矢量，因而，作用弯矩的平面不与中性轴相垂直. 然而，如果 y 轴和 z 轴选为横截面的形心主轴，那么 $I_{yz}=0$，则 M_y 为零(见方程 c). 这种情况意味着需要作用于横截面上的唯一弯矩为 M_z，它是作用于 xy 平面内的力矩，它的矢量顺 z 轴(中性轴)方向.

因此，我们得出下面的重要结论. 非对称梁处于纯弯下，仅当 y 轴和 z 轴均为横截面的主形心轴时，其弯矩的平面(xy 平面)垂直于中性平面(xz 平面). 因此，如果弯矩作用于主平面内，此主平面成为弯曲平面，其中性轴垂直它，而且一般的弯曲理论是能成立的.

上面的结果提出了相当简单明了的方法去分析承受任意弯矩 M 的非对称梁(图 8-3). 我们从应用附录 A 中所述方法确定形心主轴 y 和 z 的方向来开始. 然后将力偶 M 分解为沿这些方向的分量 M_y 和 M_z. 力偶 M_y 作用于 xz 平面内，当它的矢量顺正 y 轴方向时为正. 类似地，力偶 M_z 作用于

xy 平面内，当它的矢量沿 z 轴正方向时为正．这些分量为

$$M_y = M\sin\theta \qquad M_z = M\cos\theta \qquad \text{(d)}$$

式中 θ 为矢量 M 与 z 轴之间的夹角．由于力偶 M_z 作用于主平面内，我们知道它将使梁产生弯曲，以 z 轴为其中性轴，因此纯弯时通常所用的全部应力公式和挠度公式都适用于这种情形．用同样公式，我们看出力偶 M_y 将产生弯曲，以 y 轴为其中性轴．因而，任一点 A 处的总弯曲应力为[1]：

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \qquad (8\text{-}5)$$

式中 y 和 z 为 A 点的坐标．此方程与对于对称横截面所导出的方程(8-1)相同．

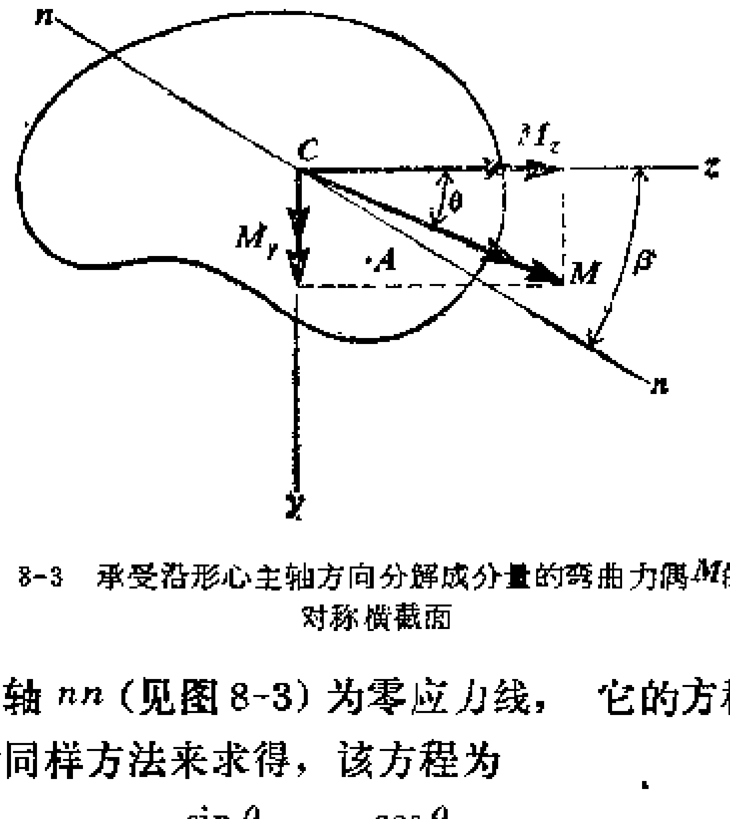


图 8-3　承受沿形心主轴方向分解成分量的弯曲力偶 M 的非对称横截面

中性轴 nn（见图 8-3）为零应力线，它的方程藉第 8.1 节所用的同样方法来求得，该方程为

$$\frac{\sin\theta}{I_y}z - \frac{\cos\theta}{I_z}y = 0 \qquad (8\text{-}6)$$

1）式中拉应力为正，压应力为负．——译者注

此外，中性轴与 z 轴之间的夹角 β 也可以像前面那样来求得，其方程为

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{I_z}{I_y}\operatorname{tg}\theta \tag{8-7}$$

我们再次观察到：一般地，θ 角和 β 角是不相等的，所以中性轴是不与施加的力偶M的作用平面相垂直的。只有上节中所述三种特殊情况为例外。

由于弯曲力偶 M_y 和 M_z 所产生的挠度，可以根据常用的挠度公式来求得。由于 M_y 所产生的挠度全部位于 xz 平面内，由于 M_z 产生的挠度位于 xy 平面内，这些挠度可以迭加起来得出合成挠度，这个合成挠度位于与中性轴相垂直的平面内。

纯弯的一般理论 在上面的讨论中，我们所叙述的分析方法里要求我们确定横截面的主轴位置，然后将弯矩分解成顺这些主轴方向的分量。这种方法的提出，是根据当使用主轴时我们能够应用通常的应力公式和挠度公式这样的事实，然而，有另外一些情况，按对横截面中非主轴的轴作用却是方便的情况。这种例子如图8-4中所示的Z 形截面，其y轴和 z 轴都不是主轴，然而它们却是对用于计算有利的轴线。

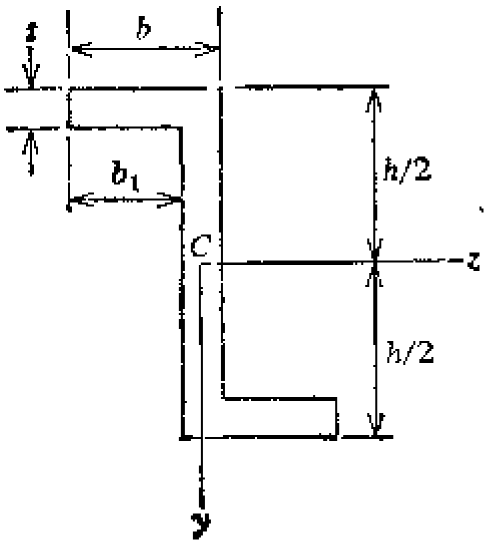


图 8-4 具有形心非主轴的非对称 Z 形截面

为了导出与主轴无关的较为一般性的弯曲理论之方程，让我们讨论图8-5 中所示非对称横截面，假设 y 轴和 z 轴均

为形心轴，但不是主轴．还让我们假设弯矩M_y和M_z作用于横截面上，如图中所示．在这种一般情况下，梁的弯曲将同时在xy平面和xz平面内发生．让我们以$k_y=1/\rho_y$代表xy平面内的曲率，其中ρ_y为其曲率半径，以$k_z=1/\rho_z$代表xz平面内的曲率．当梁在xy平面内的弯曲形状向下凹时，亦即向正y方向凹时，曲率k_y假设为正．另外，当xz平面内弯曲形状向正z方向凹时，k_z假设为正．这些正负号规则示于图8-6中．于是在坐标为y和z的A点处，应力为：

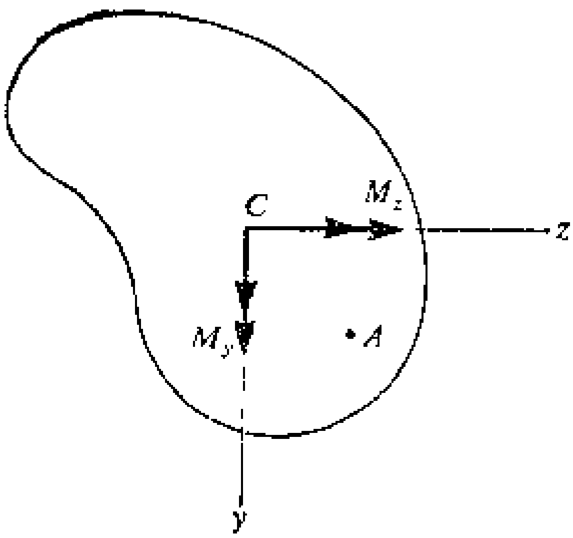


图 8-5 具有形心非主轴的非对称横截面

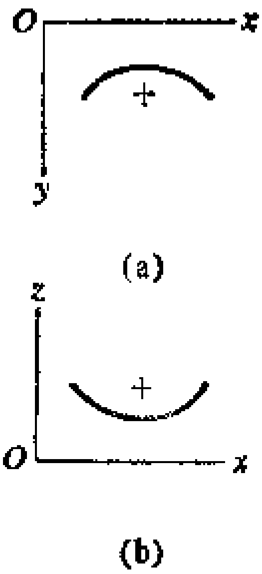


图 8-6 曲率的正负号规则：(a)正的曲率k_y，(b)正的曲率k_z

$$\sigma_x=-k_yEy-k_zEz \tag{e}$$

式中减号是需要的，因为对曲率假设了正负号规则．

横截面上的应力合力现在可以求算出来．因为顺x方向的合力为零，我们得：

$$\int\sigma_x dA=0 \quad 或 \quad k_y\int y dA+k_z\int z dA=0$$

这个方程是必然满足的，因为轴的原点位于横截面的形心处，

所以，方程中的两个积分均为零．绕 y 轴的力矩M_y为：

$$M_y=\int\sigma_x z dA=-k_y E\int yz dA-k_z E\int z^2 dA$$

或
$$M_y=-k_y EI_{yz}-k_z EI_y \tag{f}$$

以类似的方式，我们得出绕 z 轴的力矩：

$$M_z=-\int\sigma_x y dA=k_y E\int y^2 dA+k_z E\int yz dA$$

或

$$M_z=k_y EI_z+k_z EI_{yz} \tag{g}$$

联解方程(f)和(g)，我们得到以弯矩表示的曲率表达式：

$$k_y=\frac{M_z I_y+M_y I_{yz}}{E(I_y I_z-I_{yz}^2)} \quad k_z=-\frac{M_y I_z+M_z I_{yz}}{E(I_y I_z-I_{yz}^2)} \tag{8-8a, b}$$

最后，将这些表达式代入方程(e)，我们得出应力 σ_x 的公式：

$$\sigma_x=\frac{(M_y I_z+M_z I_{yz})z-(M_z I_y+M_y I_{yz})y}{I_y I_z-I_{yz}^2} \tag{8-9}$$

这最后一个方程为**广义弯曲公式**，当绕任意两根成正交的形心轴作用的力矩M_y和M_z为已知时，这一公式可用于计算梁中弯曲应力．这两根轴不必一定是主轴．

有几种弯曲的特殊情况现在可以看得出来．假设弯矩M_z存在，但弯矩M_y为零．例如在图 8-4 所示 Z 形截面弯曲时，这种情况可能出现．于是曲率的表达式简化为

$$k_y=\frac{M_z I_y}{E(I_y I_z-I_{yz}^2)},\quad k_z=-\frac{M_z I_{yz}}{E(I_y I_z-I_{yz}^2)} \tag{8-10a, b}$$

而应力为

$$\sigma_x=\frac{M_z(I_{yz}z-I_y y)}{I_y I_z-I_{yz}^2} \tag{8-11}$$

此外，如果诸轴为主轴，从而 $I_{yz}=0$，这些方程进一步简化为

$$k_y=\frac{M_z}{EI_z} \quad k_z=0 \quad \sigma_x=\frac{-M_z y}{I_z} \quad (8\text{-}12a, b, c)$$

这些是在主平面 xy 内弯曲时常用的方程.

如果力矩 M_y 和 M_z 同时作用，而且诸轴均为主轴，我们可以再令 I_{yz} 等于零，方程(8-8)和(8-9)简化为

$$k_y=\frac{M_z}{EI_z} \quad k_z=-\frac{M_y}{EI_y} \qquad (8\text{-}13a, b)$$

$$\sigma_x=\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z y}{I_z} \qquad (8\text{-}14)$$

注意：这最后一个方程与方程(8-5)相同.

8.3 非对称梁由于横向荷载引起的弯曲

上节中全部讨论涉及非对称梁的纯弯. 现在出现的问题是，当梁由于横向荷载而弯曲(除弯矩外还产生剪力)时，处于怎样一种情况. 为了帮助了解这个问题的性质，让我们援引图8-7a 中所示非对称悬臂梁. 该梁自由端处的力 P 顺竖直方向作用，平行于 y 轴. 因为 z 轴为一对称轴，y 轴和 z 轴则均为形心主轴(图8-7b).

让我们假设荷载 P 使梁绕 z 轴产生弯曲，亦即 z 轴为其中性轴. 因而，在梁的任一中间横截面上，将存在两个应力合力：绕 z 轴的弯矩 M_z 和顺 y 方向的剪力 V_y (等于 P，图 8-7 b). 整个横截面上将产生相应于这两个应力合力的法向应力和剪应力. 自然，法向应力的合力为弯矩 M_z，而剪应力的合力为剪力 P. 这个合成剪力的作用线将穿过位于 z 轴上的某一点 S，一般地说，这个点不与形心 C 重合. 这个点称为梁的横截面的**剪切中心**或**弯曲中心**. 如果荷载 P 不通过剪切

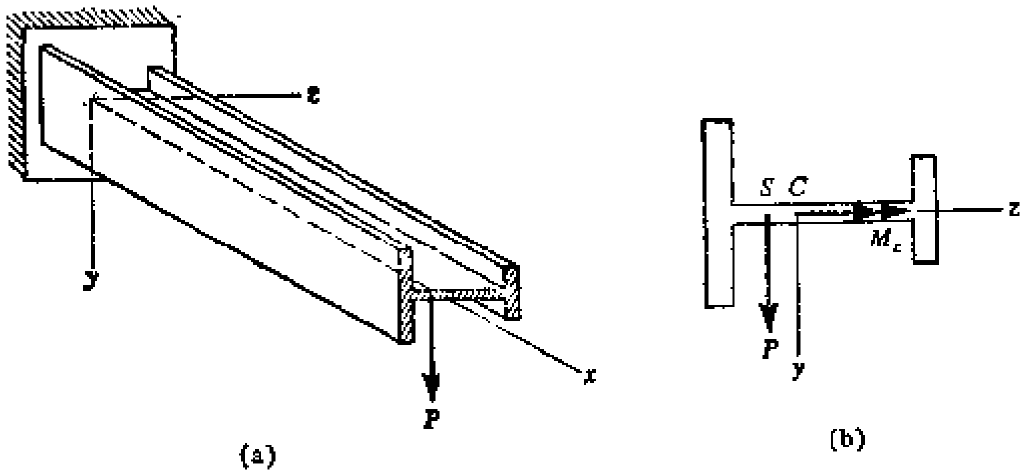


图 8-7 (a)承受横向荷载的非对称梁；(b)显示剪切中心 S 和形心 C 的梁的横截面

中心，将出现扭转作用，使梁产生扭转。

现在我们得到一个重要的结论，就是：作用于非对称梁上的荷载通常将使梁产生弯曲和扭转联合作用。仅当作用荷载通过剪切中心 S 时，才没有扭转而产生通常的弯曲。因此剪切中心位置的确定是我们极为关心的。

对于图 8-7 中所示的梁，比较容易确定其横截面剪切中心的位置。我们可以把该梁看成由三个矩形部分组成，即两块翼缘和一块腹板(图 8-8)。这三部分全部在 xy 平面内弯曲，

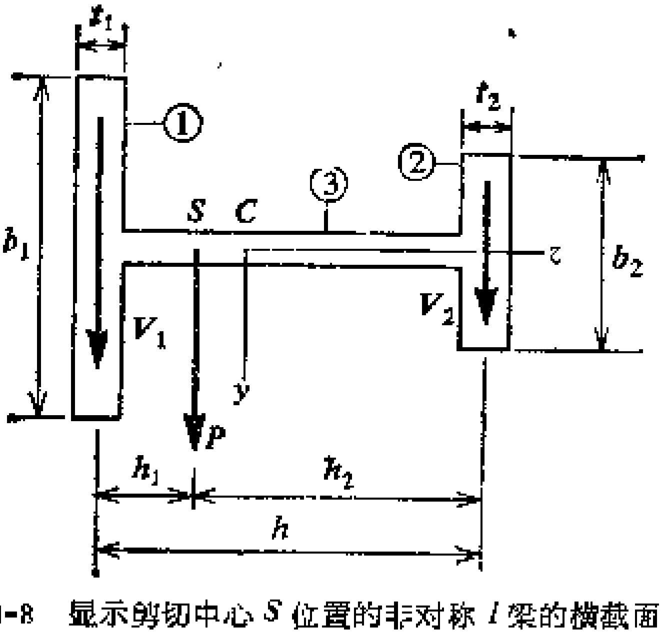


图 8-8 显示剪切中心 S 位置的非对称 I 梁的横截面

因此弯曲时具有相同的曲率，所以每一部分所承受的弯矩与它们绕 z 轴的惯性矩成正比：

$$k=\frac{M_1}{EI_1}=\frac{M_2}{EI_2}=\frac{M_3}{EI_3}$$

式中 M_1, M_2 和 M_3 分别为 1，2 和 3 部分所承受的弯矩，I_1, I_2 和 I_3 为它们绕 z 轴的各自的惯性矩。因为 I_3 与 I_1 和 I_2 相比非常小，我们可以略去腹板的影响，并假设所有荷载由两块翼缘承受。于是我们得

$$\frac{M_1}{I_1}=\frac{M_2}{I_2}$$

和

$$M_1=\frac{M_z I_1}{I_1+I_2} \qquad M_2=\frac{M_z I_2}{I_1+I_2}$$

式中 $M_z=M_1+M_2$ 为总弯矩。两块翼缘中的剪力 V_1 和 V_2 与弯矩一样地成相同的比例，所以

$$V_1=\frac{VI_1}{I_1+I_2} \qquad V_2=\frac{VI_2}{I_1+I_2} \tag{a}$$

式中 $V=V_1+V_2$ 为总剪力（等于 P）。这些剪力合力的作用线确定剪切中心 S 的位置（图 8-8）。

让我们以 h 代表两翼缘中心之间的距离，h_1 和 h_2 代表两翼缘中心至剪切中心 S 的距离。于是我们可以令对 S 点力矩之和等于零来确定上述后面两个距离：

$$V_1h_1-V_2h_2=0$$

或，应用方程(a)：

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{I_2}{I_1} \tag{8-15}$$

我们对方程(8-15)代入 $I_1=t_1b_1^3/12$ 和 $I_2=t_2b_2^3/12$，并应用方

程 $h_1+h_2=h$，得到下列距离 h_1 和 h_2 的公式：

$$h_1=\frac{t_2b_2^3h}{t_1b_1^3+t_2b_2^3} \qquad h_2=\frac{t_1b_1^3h}{t_1b_1^3+t_2b_2^3} \qquad (8\text{-}16a, b)$$

这样，我们现在已确立非对称 I 梁剪切中心的位置。比较剪切中心 S 和形心 C 的位置，可以说明，只要 $b_1>b_2$ 和 $b_1^3t_1>b_2^3t_2$ 时，S 总是位于 C 与左边翼缘之间。

在 y 轴亦为横截面对称轴的特殊情况下，则 $t_1=t_2$ 和 $b_1=b_2$，我们根据方程(8-16)得到

$$h_1=h_2=\frac{h}{2}$$

它说明剪切中心位于形心处。一般地说，梁的横截面具有两个对称轴时，如圆形截面、矩形截面或宽翼缘截面，其剪切中心与形心相重合。因而，在这些情况下，通过形心作用的任何荷载将产生弯曲而没有扭转。

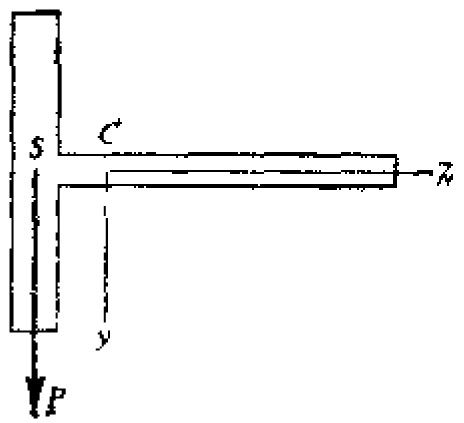


图 8-9 T梁的剪切中心

有另外一种特殊情况，其尺寸 b_2 为零，我们则得一 T 形梁(图 8-9)。根据方程(8-16)，我们得到 $h_1=0$，$h_2=h$，这说明剪切中心位于腹板和翼缘联结处[1]。

一般地说，如果梁具有一根对称轴，如图 8-8 和图 8-9 所示，其剪切中心总是位于对称轴上。任何通过剪切中心的荷载，即使它可能顺斜方向作用，它可以分解成两个分量，一个顺z轴方向，另一个平行于y轴方向。其中第一个分量以 y 轴为中性轴在 xz平面内产生弯曲。第二个分量将以 z 轴为中性轴

1) 似乎应说剪切中心位于翼缘中心处。——译者注

在 xy 平面内产生弯曲(没有扭转)。如果荷载不通过剪切中心，它总可以用一个通过该中心的荷载和一个扭转力偶来代替。通过剪切中心处的荷载的效应可按上面所述那样去处理，而扭转力偶的效应可用适当的扭转分析去处理。

确定剪切中心位置并不总是容易的工作。对于实心截面和封闭式空心截面，它通常靠近形心。这种截面一般具有较高的扭转刚度，因此，如果荷载作用于形心或接近形心，我们可以不管扭转的影响。薄壁开口横截面（如槽形截面和角形截面)对于扭转是非常弱的，在这种情况下，当荷载不通过剪切中心时，知道剪切中心和考虑扭转影响是重要的。这种类型的横截面将在下面两节中作详细讨论。

8.4 薄壁开口横截面梁中的剪应力

我们已讨论过具有两根对称轴的梁的剪应力分布（见第5.3节)。其中已指出用下列公式求其剪应力：

$$\tau=\frac{VQ}{Ib} \tag{5-18}$$

重复

只要在梁的整个宽度上剪应力为均匀分布。这种限制对于薄的矩形横截面梁、宽翼缘梁的腹板以及少数其它形式的梁是会满足的。我们现在要讨论特殊之类的梁，如薄壁开口横截面梁，我们可以用推导方程(5-18)的相同方法来确定其剪应力。这种梁藉两个特点来区分：(1) 厚度与整个高度或与宽度相比为很小的横截面，(2)横截面是开口的，如 I 梁和槽形梁的情况，而不是封闭式的，象空心箱形梁的情况那样。薄壁开口截面梁，通常称为结构断面或纵剖断面，它们在工程中被广泛地应用。

我们将从考察横截面中心线为 mm 的任意形状的梁（图

8-10 a）来开始我们对结构断面剪应力的研究。y 轴和 z 轴为该横截面的形心主轴，而荷载 P 平行于 y 轴作用(图 8-10 b)。如果荷载 P 通过剪切中心，梁将没有扭转，在 xy 平面内将产生简单的弯曲，而 z 轴将为其中性轴。梁中任一点处的法向应力用下列方程求得：

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \tag{a}$$

式中 M_z 为绕 z 轴的弯矩，y 为所考虑点处的坐标。

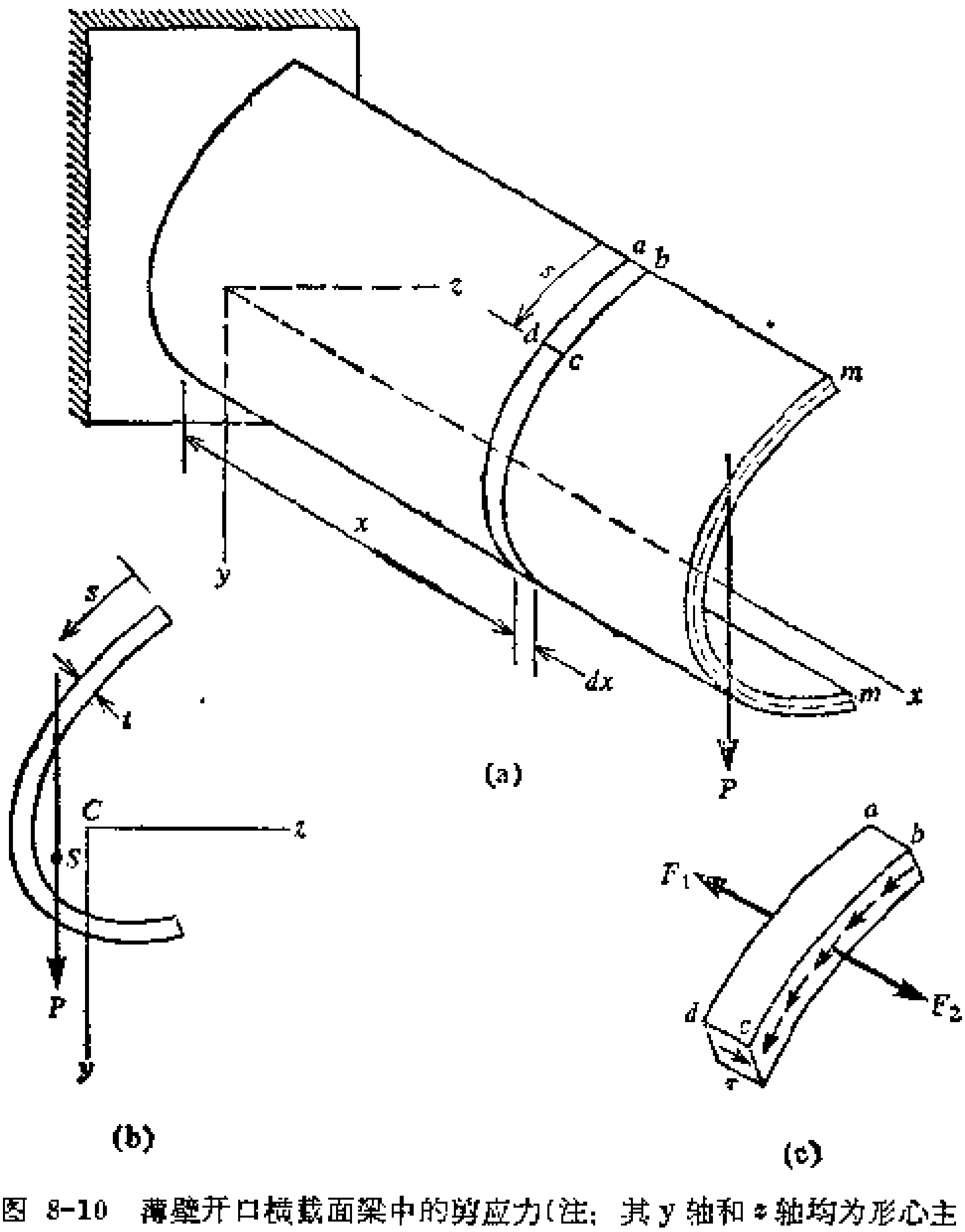


图 8-10 薄壁开口横截面梁中的剪应力(注：其 y 轴和 z 轴均为形心主轴。)

现在讨论顺横截面中心线度量长度为 s 而在相距 dx 的两横截面之间所截出的一个单元 $abcd$（图 8-10 a）. 作用于 ad 面上法向应力的合力以 F_1 表示（图 8-10 c），作用于 bc 面上的合力以 F_2 表示. 因为 ad 面处的弯矩大于 bc 处的弯矩，力 F_1 将大于 F_2，因此，剪应力 τ 必须沿 cd 面作用，以保持静力平衡. 这些剪应力必须平行于该单元上不承受应力的表面，而且必定伴随有作用于横截面 ad 和 bc 上的互补剪应力. 将图 8-10 c 所示单元上顺 x 方向的力加起来，我们得到

$$\tau t dx = F_1 - F_2 \tag{b}$$

式中 t 为 cd 处横截面的厚度，亦即 t 为离横截面自由缘距离为 s 处的厚度. 应用方程(a)，我们得出：

$$F_1 = \int_0^s \sigma_x dA = -\frac{M_{z1}}{I_z}\int_0^s y dA.$$

式中 dA 为该单元 ad 侧边上的面积单元，y 为单元 dA 的坐标，M_{z1} 为此横截面处的弯矩. 得出力 F_2 的类似表达式为：

$$F_2 = \int_0^s \sigma_x dA = -\frac{M_{z2}}{I_z}\int_0^s y dA$$

将 F_1 和 F_2 的表达式代入方程(b)，我们得到：

$$\tau = \frac{M_{z2} - M_{z1}}{dx}\frac{1}{I_z t}\int_0^s y dA$$

$(M_{z2} - M_{z1})/dx$ 这个量为弯矩的变化率，且等于 $-V_y$，这里 V_y 为顺 y 方向的剪力（等于图 8-10 中的 P）. 所以，其剪应力方程为：

$$\tau = -\frac{V_y}{I_z t}\int_0^s y dA \tag{8-17}$$

此方程给出横截面中离自由缘距离为 s 处任何一点处的剪应力. 该方程右边的积分代表从 $s=0$ 至 $s=s$ 横截面积对中性轴的一次矩. 用 Q_z 代表这个一次矩，仅采用剪应力的绝对

值，我们可以用比较简单的形式写出其方程：

$$\tau=\frac{V_y Q_z}{I_z t} \tag{8-18}$$

它类似于方程(5-18)。剪应力τ沿着横截面的中线作用，平行于截面的边缘，并假设在整个壁厚t上强度为一常数。其壁厚不一定需要为常数，但可以按s的函数而变。

横截面中任何一点处的剪力流等于剪应力与该点处的厚度之乘积，即

$$f=\tau t=\frac{V_y Q_z}{I_z} \tag{8-19}$$

由于V_y和I_z均为常数，此方程表明剪力流与Q_z成正比。在截面顶缘和底缘处，一次矩Q_z为零，其剪应力为零。在这些端点之间剪力流为连续变化，且当Q_z为最大值时（它发生于中性轴处），剪力流达到最大值。

如果图8-10中所示的梁由于通过剪切中心而平行z轴作用的荷载引起弯曲，那么y轴将为其弯曲的中性轴。在这种情况下，我们可以重复同样的分析方法，得到代替方程(8-18)和方程(8-19)的下列方程：

$$\tau=\frac{V_z Q_y}{I_y t} \qquad f=\tau t=\frac{V_z Q_y}{I_y} \tag{8-20 a, b}$$

在这些方程中，V_z为平行于z轴的剪力，Q_y为对y轴的一次矩。

例题　研究宽翼缘梁在腹板平面内沿竖直方向承受力P作用时的剪应力(图8-11 a)。

让我们取梁的中间横截面来开始(图8-11 b)，讨论顶面翼缘右边部分的应力。梁上这部分的距离s是从a点向左面bb截面来度量的，a点处剪应力为零。a点和bb截面之间的面积为st_f，其中t_f为翼缘的厚

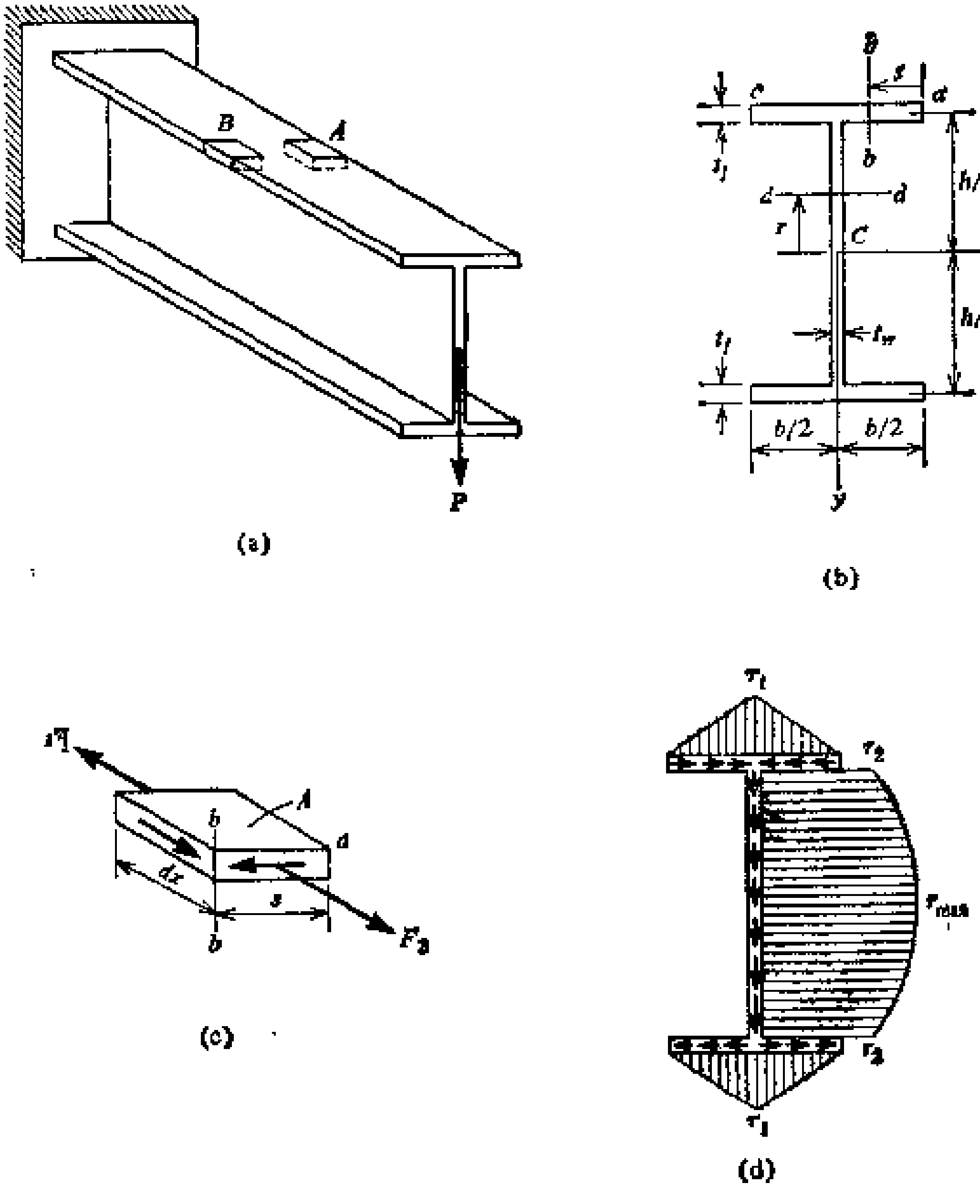


图 8-11 例题。宽翼缘梁中的剪应力

度，此面积的重心离中性轴的距离为 $h/2$（注意 h 为两翼缘中心线之间梁的高度）。因而，对于截面 bb，我们知 $Q_z=\dfrac{st_fh}{2}$，所以在 bb 处的剪应力为：

$$\tau=\frac{shP}{2\,I_z} \qquad \text{(c)}$$

它是按方程（8-18）所得．此应力的方向可藉研究作用于从翼缘内 a 点和 bb 截面之间所切出的单元上的力来求得（见图 8-11 a 中单元 A）。

该单元用较大的比例尺绘于图 8-11 c，以便较清楚地说明作用于它上面的力。我们可以立即看出拉力 F_1 大于力 F_2，因为在单元背面上的弯矩大于其前方面上的弯矩。因此，就平衡来看，得知单元 A 的左面上的剪应力必定向着读者的方向作用着。于是这个结论说明了作用于横截面上的剪应力的方向，亦即，它们必定向左作用。现在回到图 8-11 b，我们看出我们已经全部确定了 bb 截面处剪应力的大小和方向。此截面可取于 a 点至翼缘与腹板联结之间的任何地方，因此，在这样的整个范围内的剪应力为水平方向且向左作用，其值藉方程(c)来求得。我们还根据方程(c)看出其应力随距离 s 成直线增大，如图 8-11 d 中的图解所示。当 $s=b/2$ 时，达到最大值 τ_1，这里 b 为翼缘的宽度，因而

$$\tau_1=\frac{bhP}{4I_z} \tag{d}$$

相应的剪力流为：

$$f_1=\tau_1 t_f=\frac{bht_fP}{4I_z} \tag{e}$$

注意，在此近似分析中，我们没有考虑横截面的厚度求出了翼缘中线与腹板中线联接处的剪应力。这种方法对于薄壁截面是满意的。

从顶翼缘左边 C 点开始(图 8-11 b)，向右来度量 s，我们可以再作一次同样的分析。我们将发现剪应力的大小再次按方程(c)和(d)得出。然而，藉切出单元 B(图 8-11 a)，考虑它的平衡，我们将发现横截面上的剪应力现在是向右作用，如图 8-11 d 所示。

第二步是确定腹板中的剪应力。考虑正好在翼缘底面处腹板顶面的水平切面，我们求出一次矩为：

$$Q_z=\frac{bt_fh}{2}$$

相应的剪应力为：

$$\tau_2=\frac{bht_fP}{2I_zt_w} \tag{f}$$

式中 t_w 为腹板的厚度。相关的剪力流为

$$f_2=\tau_2t_w=\frac{bht_fP}{2I_z} \tag{g}$$

它等于剪力流 f_1 的两倍，这是所预料到的。腹板中的剪应力顺竖直方

向往下作用，其值增大到中性轴为止。在距中性轴距离 r 的 dd 截面处，其剪应力计算如下：

$$Q_z=\frac{bt_fh}{2}+\left(\frac{h}{2}-r\right)(t_w)\left(\frac{\frac{h}{2}+r}{2}\right)=\frac{bt_fh}{2}+\frac{t_w}{2}\left(\frac{h^2}{4}-r^2\right)$$

而

$$\tau=\left(\frac{bt_fh}{t_w}+\frac{h^2}{4}-r^2\right)\frac{P}{2I_z} \qquad \text{(h)}$$

当 $r=h/2$ 时，此方程简化为方程(f)；当 $r=0$ 时，得出最大剪应力：

$$\tau_{\max}=\left(\frac{bt_f}{t_w}+\frac{h}{4}\right)\frac{Ph}{2I_z} \qquad \text{(i)}$$

应该再次指出：我们是在横截面中心线尺寸基础上进行全部计算的，这些计算对于薄壁截面给出适当精确的结果。由于这个原因，应用方程(h)所计算出的宽翼缘梁腹板剪应力可能与我们前面分析所得的(见方程 5-21)稍有不同。

腹板中的剪应力虽然其变差不大，但它是按抛物线变化的，如图 8-11 d 所示，这个事实可以根据 $\tau_{\max}$ 与 τ_2 之比看出来，这个比值为：

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_2}=1+\frac{ht_w}{4bt_f} \qquad \text{(j)}$$

式中第二项通常很小，例如，如果取典型值，譬如 $h=2b$，$t_f=2t_w$，其比值 $\tau_{\max}/\tau_2=1.25$。

最后，我们可藉对顶翼缘所用的相同方法去研究下翼缘中的剪应力。我们将发现其应力除它们的方向如图 8-11 d 所示外，其它均与顶翼缘的应力相同。

根据图 8-11 d，我们看出横截面上的剪应力从顶翼缘的最外侧“流”向里面，接着向下通过腹板，最后向外“流”向底翼缘的外侧。这种“流”在任何结构截面中总是连续的，所以，它可用来作为确定应力方向的便利方法。因为剪力向下作用于梁上，我们知道腹板内的剪力流必定向下。因此，知道了腹板中的剪力流的方向，由于剪力流所必需的连续性，我们也就立即知道它在翼缘中的方向。应用这个简单方法得出应力方向要比从梁中切出如 A(图 8-11 c) 这样所设想的单元要容易。

横截面上所有剪应力的合力显然为一竖向力，因为两翼缘中的水

平应力彼此抵消，不产生合力。腹板中的剪应力有一合力，该合力可藉整个腹板高度上剪应力积分来求得如下：

$$R=\int \tau dA=2\int_0^{h/2} \tau t_w dr$$

现将方程(h)代入，我们得出：

$$R=2t_w\int_0^{h/2}\left(\frac{bt_f h}{t_w}+\frac{h^2}{4}-r^2\right)\left(\frac{P}{2I_z}\right)dr=\left(\frac{bt_f}{t_w}+\frac{h}{6}\right)\frac{h^2 t_w P}{2I_z} \qquad (k)$$

其中 I_z 一项可展开如下：

$$I_z=\frac{t_w h^3}{12}+\frac{bt_f h^2}{2} \qquad (l)$$

式中第一项是腹板的惯性矩，第二项是翼缘的惯性矩，这些都应用中心线尺寸来计算。当将 I_z 的表达式代入方程 (k)，我们得出 $R=P$，它确立这样的事实：作用于横截面上的剪应力合力等于竖直荷载 P。该合力通过形心 C，此形心亦为宽翼缘梁的剪切中心。

8.5 薄壁开口横截面的剪切中心

在上节中，我们提出了求薄壁开口截面梁中剪应力的公式和方法。现在我们将应用这些资料去确定几种不同形状的剪切中心。第一种情况，讨论绕 z 轴弯曲并承受平行 y 轴作用的竖向剪力 V_y 的槽形梁(图 8-12 a)。该槽形梁中剪应力的分布示于图 8-12 b 中。为了求出翼缘上与腹板连接处的应力 τ_1，我们应用方程(8-18)，令 Q_z 等于翼缘面积绕 z 轴的一次矩：

$$Q_z=\frac{bt_f h}{2}$$

因而，其应力 τ_1 为

$$\tau_1=\frac{bhV_y}{2I_z} \qquad (a)$$

以同样的方式，我们得出腹板顶面处应力 τ_2 为：

$$\tau_2=\frac{bt_f hV_y}{2t_w I_z} \qquad (b)$$

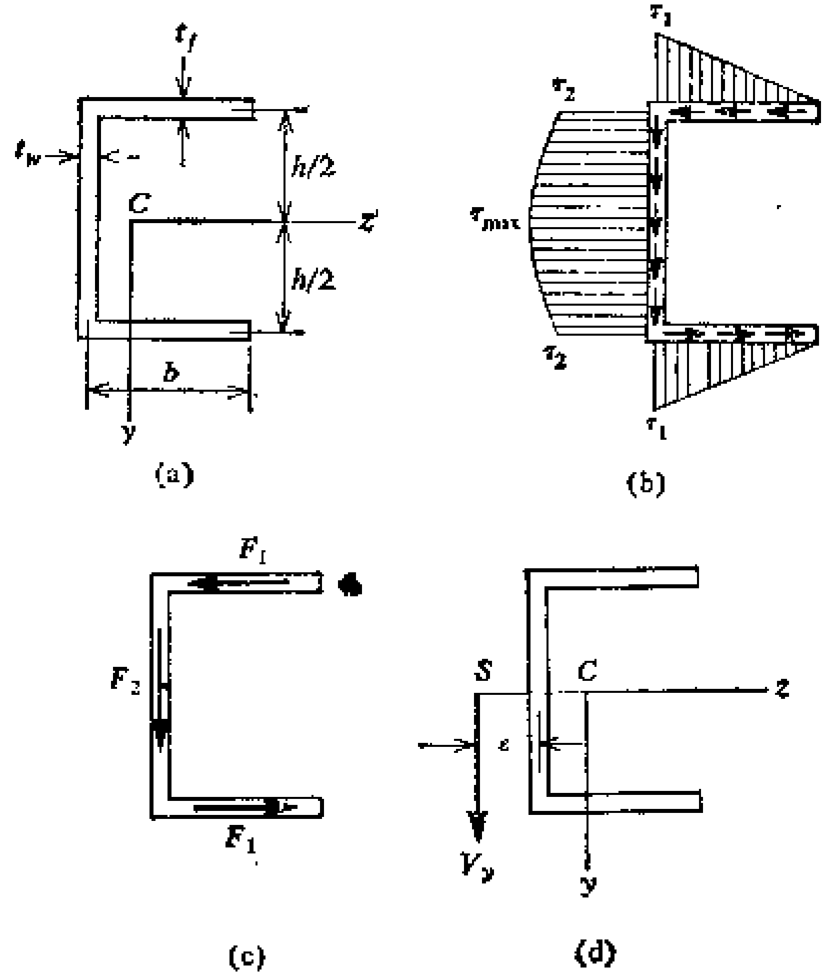


图 8-12 槽形截面的剪切中心

另外，中性轴处的应力为：

$$\tau_{max}=\left(bt_f+\frac{ht_w}{4}\right)\frac{hV_y}{2t_wI_z} \tag{c}$$

每一翼缘中的总力 F_1(图 8-12 c)可根据剪应力的三角形图形很容易地求出来．每一个力等于应力三角形面积乘以应力所作用的翼缘厚度：

$$F_1=\left(\frac{\tau_1 b}{2}\right)(t_f)=\frac{hb^2t_fV_y}{4I_z}$$

腹板中的竖直力 F_2 等于剪力 V_y，可根据抛物线形应力图形容易地证明如下．我们注意到其图形由两部分组成：一部分是尺寸为 τ_2 和 h 的矩形，另一部分为面积等于下式的抛

物线形状：

$$\frac{2}{3}(\tau_{max}-\tau_2)h$$

因而，总力等于应力图形面积乘以腹板的厚度，即

$$F_2=\tau_2ht_w+\frac{2}{3}(\tau_{max}-\tau_2)ht_w$$

代入 τ_2 和 τ_{max} 的表达式，并简化，得出：

$$F_2=\left(\frac{t_wh^3}{12}+\frac{bh^2t_f}{2}\right)\frac{V_y}{I_z}$$

最后，代以

$$I_z=\frac{t_wh^3}{12}+\frac{bh^2t_f}{2} \tag{d}$$

说明 F_2 等于 V_y，与我们所预料的一样。

图 8-12 c 中所示三个力与通过剪切中心 S 所作用的合力 V_y（见图 8-12 d）为静力等效，因为此合力对剪切中心没有力矩，因此得出：图 8-12 c 中所示的力也必须对剪切中心不产生力矩；这个条件使我们能够确定腹板中心线至剪切中心的距离 e：

$$F_1h-F_2e=0.$$

或

$$e=\frac{F_1h}{F_2}=\frac{F_1h}{V_y}=\frac{b^2h^2t_f}{4I_z} \tag{8-21 a}$$

代入 I_z 的方程(d)，我们得出确定剪切中心位置的方程的另一种形式：

$$e=\frac{3b^2t_f}{ht_w+6bt_f} \tag{8-21 b}$$

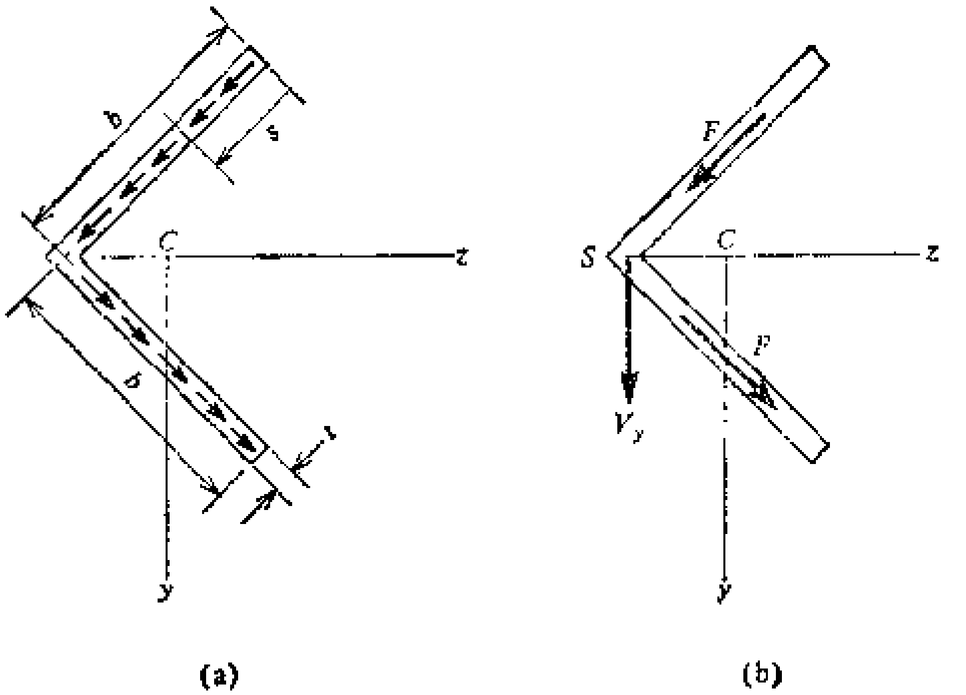
槽形梁无论什么时候当它承受通过剪切中心 S 所作用

的力，它将产生简单弯曲．如果诸荷载平行于 y 轴作用，但通过剪切中心以外的某一点（例如，荷载可能作用于腹板的平面内），那么它们可用通过剪切中心的荷载和扭转力偶所组成的静力等效力系来代替，因而我们得到梁上弯曲和扭转同时作用的组合情况．如果荷载作用于 z 轴方向，通过 S 点和 C 点，我们将得到绕 y 轴的简单弯曲．如果诸荷载作用于斜方向，它们可用平行于 y 轴和 z 轴的静力等效荷载来代替，这些荷载可按上面诸情况所说明的那样去处理．

下一段讨论的是等肢角形截面（图 8-13 a），假设承受剪力 V_y．角的每一肢长度为 b，厚度为 t．在离一边距离 s 处，剪应力为：

$$\tau=\frac{V_yQ_z}{I_zt}=\frac{3sV_y}{\sqrt{2}\,b^3t}\left(b-\frac{s}{2}\right) \tag{e}$$

该式中，我们曾应用这样的关系：



(a)　　　　(b)

图 8-13　等肢角形截面的剪切中心

$$Q_z=\frac{st}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{s}{2}\right) \qquad I_z=\frac{b^3t}{3}$$

方程(e)说明 τ 随 s 的平方而变，当 $s=b$ 时，它达到最大值：

$$\tau_{\max}=\frac{3V_y}{2\sqrt{2}bt}$$

每一肢中的总剪力 F(见图 8-13 b)为：

$$F=\int_0^b \tau t ds=\frac{3V_y}{\sqrt{2}b^3}\int_0^b\left(bs-\frac{s^2}{2}\right)ds=\frac{V_y}{\sqrt{2}}$$

取 F 力的竖直分力，我们看出诸肢中力的合力为等于 V_y 的竖直力。另外，我们还看到此合力必定通过两个 F 力作用线的相交点；因此，我们得出结论，角形截面的剪切中心 S 位于两肢的联结处。

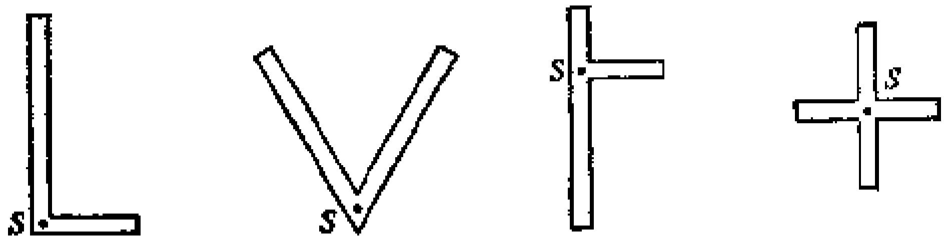


图 8-14　由两个相交矩形组成的截面的剪切中心

在所有两个相交矩形单元组成的截面情况中，如图 8-14 中所示诸例子，将看出其剪应力得到两个合力，而这两个合力交于其联结处。因此，该点为其剪切中心[1]。

例题 1　试确定图 8-15 所示薄壁半圆形横截面的剪切中心 S。

让我们讨论沿横截面中线度量距离 s 所定义的截面 bb。a 点(位于截面边缘处)与截面 bb 之间所对的中心角用 θ 来表示。所以，我们得

---

1) 横截面剪切中心的最早确定是在 1913 年(见参考文献 8-1)。有关后来的著作和剪切中心概念的发展的文献见参考文献 8-1 至 8-19。

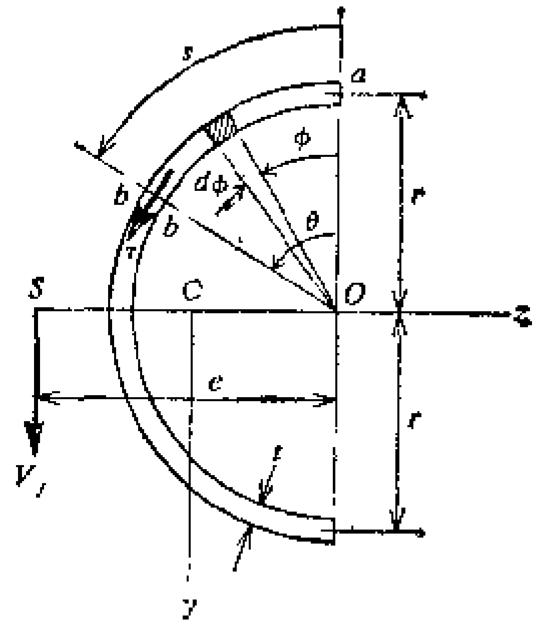


图 8-15　例题1.薄壁半圆形截面的剪切中心

$s=r\theta$，其中 r 为中线的半径。a 和 bb 之间面积的一次矩为

$$Q_z=\int ydA=\int_0^{\theta}(r\cos\phi)(rt)d\phi=r^2t\sin\theta$$

式中 t 为截面的厚度。因而，截面 bb 处的剪应力为

$$\tau=\frac{V_yQ_z}{I_zt}=\frac{V_yr^2\sin\theta}{I_z}$$

代以 $I_z=\pi r^3t/2$，我们得

$$\tau=\frac{2V_y\sin\theta}{\pi rt} \tag{f}$$

当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时，此表达式得出 $\tau=0$，而当 $\theta=\pi/2$ 时，我们得到最大剪应力。

剪应力 τ 所产生绕 0 点的力矩为

$$T=\int\tau rdA=\int_0^{\pi}\frac{2V_yr\sin\theta d\theta}{\pi}=\frac{4rV_y}{\pi}$$

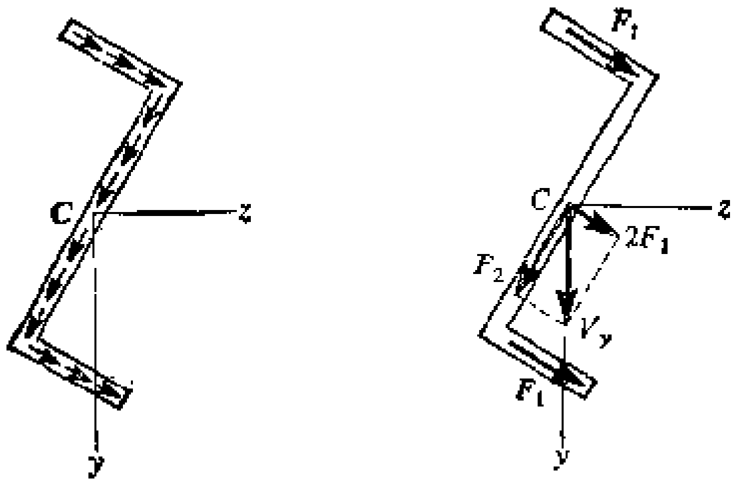
它必须与作用于剪切中心处的力 V_y 所产生的力矩相等，因此

$$V_ye=\frac{4rV_y}{\pi}$$

从而，O 点至剪切中心的距离 e 为

$$e=\frac{4r}{\pi} \tag{8-22}$$

例题 2 试确定图 8-16a 中所示 Z 形截面的剪切中心（图中所示 y 和 z 轴为通过形心 C 的主轴）。



(a) (b)

图 8-16 例题2，Z 形截面的剪切中心

让我们从假想剪力 V_y 平行于 y 轴作用来开始。这样一来翼缘和腹板中的剪应力将如图 8-16a 所示方向作用着。根据对称性考虑，我们看出两翼缘中的总力 F_1 必定彼此相等(图 8-16b)。作用于横截面上所有三个力的合力(F_1 位于翼缘内，F_2 位于腹板内)必须等于剪力 V_y。两个力 F_1 具有通过形心并平行于翼缘作用的合力 $2F_1$。此合力与 F_2 相交于形心处，因此，该点必定为剪切中心。力 $2F_1$ 和 F_2 合成为剪力 V_y，示于图 8-16b 中。

如果梁承受平行于 z 轴的剪力 V_z，我们得到同样的结论，即剪切中心与形心重合。

如果应用主轴，Z 形截面中剪应力的计算变得复杂，显然因为翼缘和腹板斜交于轴线。在下一节中，我们将说明如何应用平行于腹板和翼缘的非主轴去计算 Z 形截面中的剪应力。

8.6 绕非主轴弯曲的梁中剪应力

前面薄壁开口截面梁内剪应力公式的推导中，根据将 y 轴和 z 轴作为主轴的假定，我们得出方程(8-18)至(8-20)。现在我们将不采用那样的假定，而导出与非主轴 y 和 z 有关的较为普遍的方程（图 8-17）。让我们假设梁上的荷载平行于 y 轴，并产生弯矩 M_z 和剪力 V_y。让我们还假设诸力通过剪切中心 S。弯矩 M_z 将产生绕 y 和 z 两轴的弯曲，其相应的应力藉方程(8-11)得出：

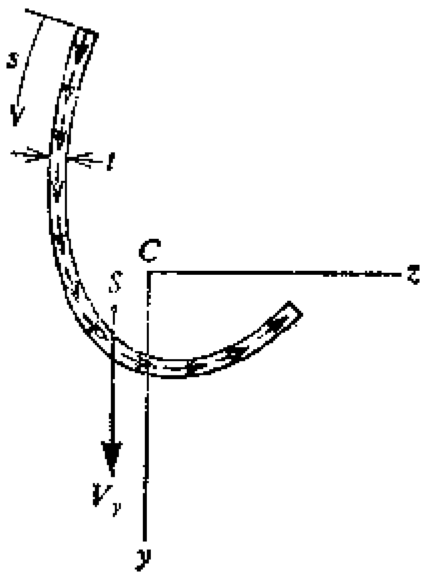


图 8-17 薄壁开口横截面梁中的剪应力（注：其 y 轴和 z 轴均为非形心主轴）

$$\sigma_x=\frac{M_z(I_{yz}z-I_y y)}{I_y I_z-I_{yz}^2} \tag{8-11}$$
重复

式中 y 和 z 为横截面中一点的座标。我们现在按图 8-10 中所述方式从梁上切出一单元。作用于该单元上的力 F_1 和 F_2（图 8-10 c）用与前面相同方法求出，只是方程 (8-11) 必须被用于法向应力，因而：

$$F_1=\int_0^s \sigma_x dA=\frac{M_{z1}}{I_y I_z-I_{yz}^2}\int_0^s (I_{yz}z-I_y y)dA$$

$$F_2=\int_0^s \sigma_x dA=\frac{M_{z2}}{I_y I_z-I_{yz}^2}\int_0^s (I_{yz}z-I_y y)dA$$

而

$$\tau=\frac{M_{z1}-M_{z2}}{dx}\frac{1}{t(I_y I_z-I_{yz}^2)}\int_0^s (I_{yz}z-I_y y)dA$$

我们再次注意到$(M_{z2}-M_{z1})/dx$这个量等于$-V_y$，因此

$$\tau=\frac{V_y}{t(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}\int_0^s zdA-I_y\int_0^s ydA\right] \quad (8\text{-}23)$$

此方程为广义剪力公式，当诸轴为主轴时$(I_{yz}=0)$，则简化为方程(8-17)。

用上述相同方式，我们可以导出由于通过剪切中心且平行于z轴作用的剪力V_z所产生的剪应力的公式，其结果是

$$\tau=\frac{V_z}{t(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}\int_0^s ydA-I_z\int_0^s zdA\right] \quad (8\text{-}24)$$

注意：当我们取主轴时，此方程简化(除正负号外)为方程(8-20a)。在我们前面的研究中，我们总是取Q_y和Q_z为正值，并从物理的考虑得出剪应力的方向。然而，在方程(8-23)和(8-24)中，需要遵守一次矩的正负号规则，因为它们可能为正或为负。这容易藉以代数量处理y和z来完成。

在导出广义剪力公式(8-23)和(8-24)之后，我们现在可以求出任一特定情况下剪应力的分布。另外，截面的剪切中心可藉求出剪力V_y和V_z的作用线并按它们的交点来确定。此方法在下列诸例题中加以说明。

例题 1　试确定剪力V_y和V_z作用下Z形截面所产生的剪应力(图8-18a)。

我们从计算截面特性开始：

$$I_z=\frac{h^3t_w}{12}+\frac{bh^2t_f}{2} \qquad I_y=\frac{2b^3t_f}{3} \qquad I_{yz}=\frac{b^2ht_f}{2} \qquad (a)$$

式中的尺寸h，b，t_w和t_f的意义如图中所示。由于剪力V_y，上翼缘中的剪应力(根据方程8-23)为

$$\tau=\frac{V_y}{t_f(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}\int_0^s (s-b)t_fds+I_y\int_0^s \frac{h}{2}t_fds\right]$$

其中s沿翼缘自左向右度量。求出积分，我们发现上面括弧中的几项等

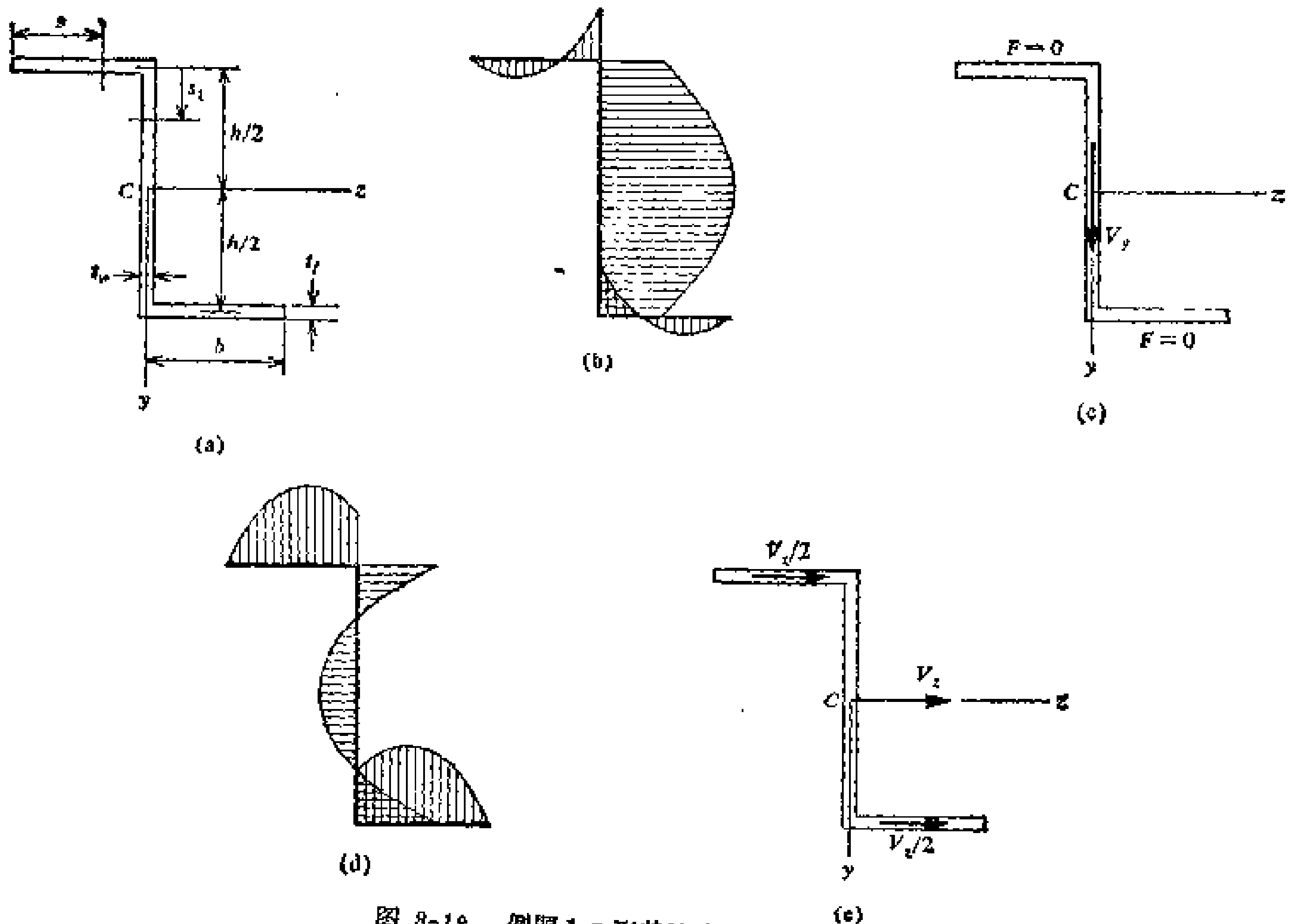


图 8-18 例题1.z形截面中的剪应力

于：

$$\frac{b^3ht_f^2}{12}(2s^2-2bs)$$

将此表达式和 I_y, I_z 和 I_{yz} 的表达式代入 τ 的方程内，我们得出翼缘中的应力公式：

$$\tau=\frac{3V_y(3s^2-2bs)}{bh(2ht_w+3bt_f)} \qquad (0\leqslant s\leqslant b) \tag{b}$$

当 s 小于 $2b/3$ 时，上翼缘中的这些剪应力向左边方向作用；当 s 位于 $2b/3$ 和 b 之间时，它们反过来向右边方向作用。翼缘中总的合成剪力为：

$$F=\int_0^b \tau t_f ds=0$$

下翼缘中存在类似情况。

腹板中的剪应力也可以根据方程(8-23)求出，它可表明腹板中的总合力等于 V_y。在中性轴处，其应力为：

$$\tau_{max}=\frac{3V_y(ht_w+bt_f)}{ht_w(2ht_w+3bt_f)} \tag{c}$$

由于 V_y 所产生的剪应力的分布如图 8-18 b 所示，翼缘中和腹板中的合力示于图 8-18 c 中。

现在让我们讨论作用在横截面上的水平剪力 V_z。对于上翼缘，我们应用方程(8-24)，该方程成为：

$$\tau=\frac{V_z}{t_f(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[-I_{yz}\int_0^s \frac{h}{2}t_f ds+I_z\int_0^s (b-s)t_f ds\right]$$

求算括弧中诸项，我们得到：

$$\frac{h^2t_f}{24}[bs(2ht_w+6bt_f)-s^2(ht_w+6bt_f)]$$

于是 τ 的最终表达式为：

$$\tau=\frac{3V_z}{2b^3t_f(2ht_w+3bt_f)}[bs(2ht_w+6bt_f)-s^2(ht_w+6bt_f)] \tag{d}$$

上翼缘中的这些应力向右面作用，其分布如图 8-18 d 所示。翼缘中总的合力 F 为：

$$F=\int_0^b \tau t_f ds=\frac{V_z}{2}$$

如图 8-18 e所示。

腹板内由于 V_z 所产生的剪应力，根据方程(8-24)求出为：

$$\tau=\frac{3\ V_z(h^2+6s_1^2-6hs_1)}{2\ bh(2\ ht_w+3\ bt_f)} \tag{e}$$

式中 s_1 从翼缘与腹板联结处度量(图 8-18 a)。腹板中部范围内的这种剪应力反其方向(见图 8-18 d)，结果腹板中的总合成剪力为零。

例题 2　试确定图 8-19 a 中所示非对称槽形截面的剪切中心 S 的位置。

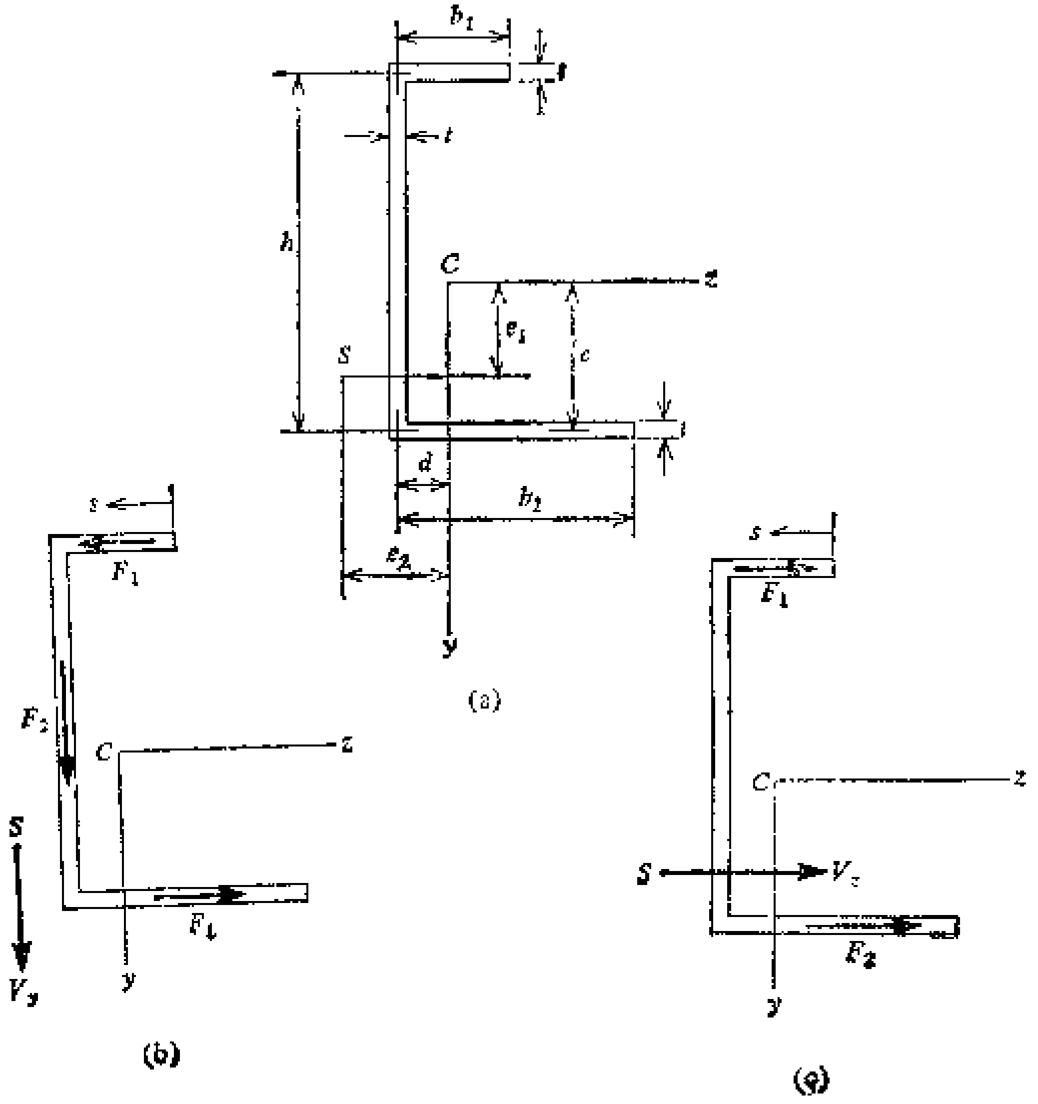


图 8-19　例题2.非对称槽形截面的剪切中心

我们以 b_1 和 b_2 分别代表上下翼缘的宽度，以 h 代表截面的高度。其厚度为常数，且等于 t。y 轴和 z 轴通过形心 C，并平行于腹板和翼缘，因此它们不是主轴。其形心位置以尺寸 C 和 d 来确定，它们为：

$$C=\frac{h^2+2b_1h}{2h(b_1+b_2)} \qquad d=\frac{b_1^2+b_2^2}{2h(b_1+b_2)} \tag{f}$$

剪切中心的位置用离形心轴的距离 e_1 和 e_2 来确定，下面将要确定这些值。

现在让我们假设剪力 V_y 通过剪切中心而作用（图 8-19 b）。顶面翼缘中的剪应力根据方程(8-23)求出为：

$$\begin{aligned}\tau&=\frac{V_y}{t(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}\int_0^s(b_1-d-s)t\,ds+I_y\int_0^s(h-c)t\,ds\right]\\&=\frac{V_y}{I_yI_z-I_{yz}^2}\left[I_{yz}(b_1-d)s+I_y(h-c)s-\frac{I_{yz}s^2}{2}\right]\end{aligned} \tag{g}$$

式中 s 按图中所示去度量。翼缘中的总力 F_1 为

$$F_1=\int_0^{b_1}\tau t\,ds=\frac{b_1^2tV_y}{6(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}(2b_1-3d)+3I_y(h-c)\right] \tag{h}$$

因为梁上没有水平外力作用，下翼缘中的剪力也就必须等于 F_1，另外，腹板中的力 F_2 必须等于 V_y。因为通过剪切中心作用的力 V_y 对 C 的力矩必须等于翼缘中和腹板中三个力对 C 的力矩，我们得到

$$V_ye_2=F_2d+F_1h$$

或

$$e_2=d+\frac{F_1h}{V_y}$$

将 F_1 的方程(h)代入，我们得出下列 e_2 的方程：

$$e_2=d+\frac{b_1^2ht}{6(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}(2b_1-3d)+3I_y(h-c)\right] \tag{8-25}$$

在当翼缘相等的特殊情况下，y 轴和 z 轴成为主轴，我们得到 $I_{yz}=0$，$c=h/2$ 和 $b_1=b_2=b$，于是根据方程(8-25)，我们得出：

$$e_2=d+\frac{b^2h^2t}{4I_z}$$

它与我们前面的结果一致（方程 8-21 a）。

现在让我们假设剪力 V_z 作用于梁上（图 8-19 c）。在这种情况下，

我们可以用方程(8-24)去计算顶面翼缘中的剪应力：

$$\tau=-\frac{V_z}{t(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[I_{yz}\int_0^s (c-h)tds-I_z\int_0^s(b_1-d-s)tds\right]$$

$$=\frac{V_z}{I_yI_z-I_{yz}^2}\left[I_{yz}(c-h)s+I_z(d-b_1)s+\frac{I_zs^2}{2}\right] \qquad \text{(i)}$$

翼缘中的总力 F_1 为：

$$F_1=-\int_0^{b_1}\tau tds=\frac{b_1^2tV_z}{6(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[3I_{yz}(h-c)+I_z(2b_1-3d)\right] \quad \text{(j)}$$

这里，我们在方程的前面引进了一个减号，因为方程(i)中向左边的 τ 为正，而我们却采用 F_1 向右为正，如图 8-19 c 所示。腹板中的合力必须等于零，因为沿 y 方向没有外力。下翼缘中的力以 F_2 代表，如图中所示。取对下翼缘的力矩得出下面方程：

$$V_z(c-e_1)=F_1h$$

根据它

$$e_1=c-\frac{F_1h}{V_z}$$

将 F_1 的方程(i)代入，我们得到下面 e_1 的方程：

$$e_1=c-\frac{b_1^2ht}{6(I_yI_z-I_{yz}^2)}\left[3I_{yz}(h-c)+I_z(2b_1-3d)\right] \quad (8\text{-}26)$$

再次讨论等翼的特殊情况，我们知 $I_{yz}=0$，$c=h/2$，$b_1=b_2=b$ 和 $d=b^2/(h+2b)$，从这里得

$$e_1=\frac{h}{2}-\frac{b^3ht(b+2h)}{6I_y(h+2b)}$$

现在代以

$$I_y=\frac{b^3t(b+2h)}{3(h+2b)}$$

此式为对称槽形截面的惯性矩，我们得到 $e_1=0$，与预料的一样。

因而，在非对称槽形截面的任一特定情况下，我们可以将横截面的尺寸和特征代入方程(8-25)和(8-26)，从面得出剪切中心的位置。为了提供数字例题，让我们采用下列尺寸：

$$b_1=b \quad b_2=2b \quad h=3b$$

于是我们求出

$$c=\frac{5b}{4},\quad d=\frac{5b}{12}$$

$$I_y=\frac{47}{24}b^3t\ ,\quad I_z=\frac{69}{8}b^3t\ ,\quad I_{yz}=\frac{13}{8}b^3t$$

代入方程(8-25)和(8-26),我们得出

$$e_1=\frac{55b}{76}\qquad e_2=\frac{187b}{228}$$

它们为形心轴至剪切中心的距离。

习　　题

8.1-1　证明：如果图 8-1 a 中所示荷载 P 沿矩形横截面对角线作用,那么中性轴将位于另一对角线上。

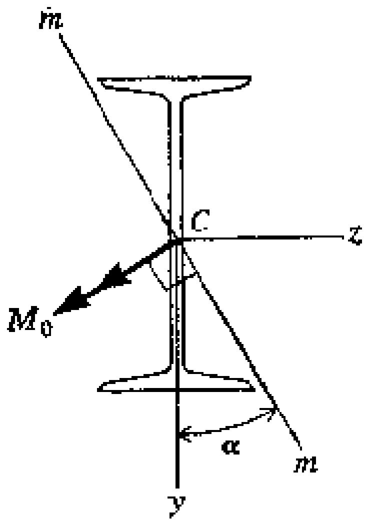
8.1-2　对图 8-1 中所示矩形横截面悬臂梁，试求确定中性轴位置的 β 角,并确定由于弯曲产生的最大法向应力,假设 $\theta=45^\circ$, $P=200$ 磅,$L=60$ 吋,梁的宽度等于 3 吋,梁的高度等于 6 吋。

8.1-3　有一矩形横截面悬臂梁在斜向荷载 P 作用下产生弯曲(见图 8-1 a)。试问当 θ 角自零变到 2π 时，用梁端描述出什么样的曲线。

8.1-4　有一长度为 L 的矩形横截面水平简单梁(宽度＝高度＝a)。梁的侧面为竖直方向。有一竖直荷载 P 作用于离梁一端距离为 $L/3$ 处,另有一水平荷载 P 作用于离另一端距离为 $L/3$ 处。试求弯曲下梁中所产生的最大法向应力,假设 $L=12$ 呎,$a=12$ 吋,$P=6000$ 磅。

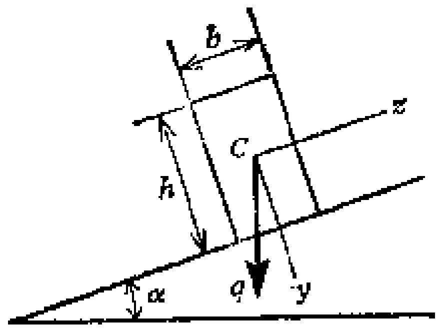
8.1-5　有一根具有水平轴线的固定端梁，其横截面为圆形，沿梁的整个长度承受强度为 q 的竖直均匀荷载,梁中央处作用有水平横向荷载。试计算弯曲下梁中所产生的最大法向应力，假设 $PL=24,000$ 吋-磅,$qL^2=48,000$ 吋-磅,杆的直径为 4 吋。

8.1-6　有一标准 I 形梁,标称 S 8×18.4(见附录中表 C-2)，简支于其端点处,由于梁的端点处作用两个相等而相反的力偶 M_0,梁产生弯曲。这两力偶作用于 mm 平面内，如图中所示。试求梁中最大弯曲应力和最大挠度 δ,假设 $M_0=50,000$ 吋-磅，$\alpha=30^\circ$，$E=30\times10^6$ 磅/吋^2,梁的长度为 12 呎。



习题 8.1-6

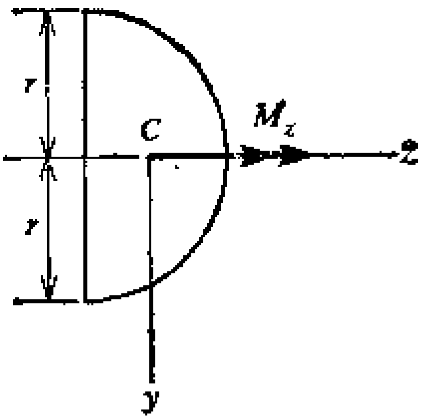
8.1-7　有一矩形横截面木梁，简支于其端点处。梁的纵轴为水平者，但其横截面倾斜，如图所示。梁上的荷载为强度等于 q 的竖直均匀荷载．试确定由于弯曲所产生的最大法向应力和中央处的竖直挠度，假设 $L=10$ 呎，$b=6$ 吋，$h=8$ 吋，$\operatorname{tg}\alpha=1/3$，$E=1.5\times10^6$ 磅/吋^2，$q=200$ 磅/呎。



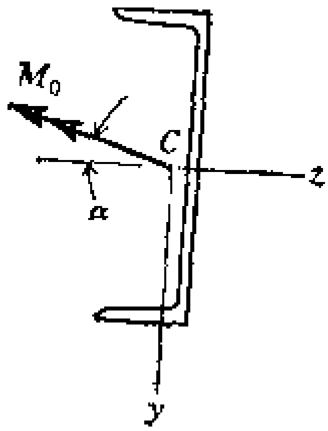
习题 8.1-7 和8.1-8

8.1-8　再次讨论上一习题中所叙述的梁，假设 $L=10$ 呎，$b=10$ 吋，$h=3$ 吋，$\alpha=30°$，$E=1.6\times10^6$ 磅/吋^2，$q=100$ 磅/呎。试求由于弯曲所产生的最大法向应力，中央处的竖向挠度，以及中央处的水平挠度。

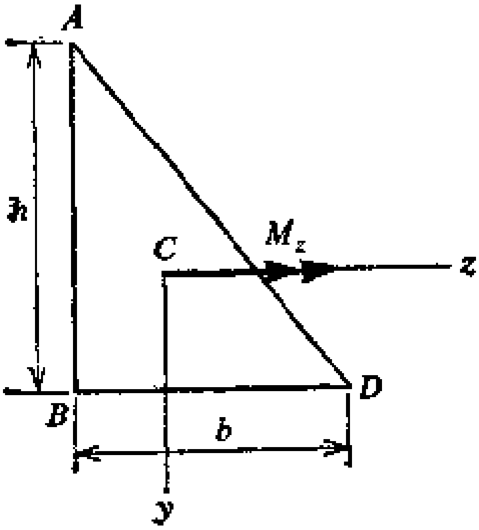
8.2-1　有一半圆形横截面梁（见图）承受弯矩 M_z。试求此弯矩的最大许可值，假设容许应力为 σ_w。



习题 8.2-1



习题 8.2-2



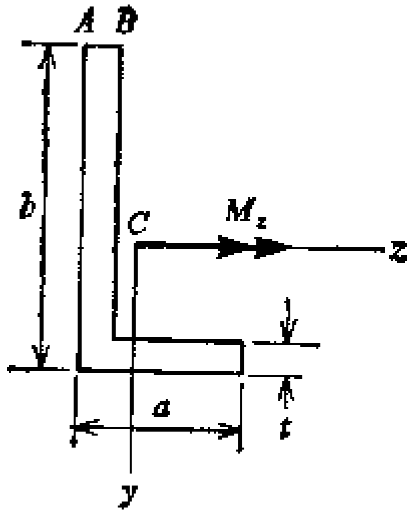
习题 8.2-3

8.2-2　有一截面为C 8×11.8(见附录中表C-3)的槽形梁，承受按 α 角作用的弯曲力偶 M_0(见图)。试确定梁中的最大拉应力和最大压应力，假设 $M_0=30,000$ 吋-磅，$\text{tg}\alpha=1/3$。

8.2-3　有一力偶M_z作用于一直角三角形横截面的梁上(见图)．试导出顶点 A、B 和 D 处的应力公式，并确定其中性轴位置。

8.2-4　有一Z形截面梁(图 8-4)，承受作用于 xy 平面内的弯矩 M_z，该弯矩值为 40,000 吋-磅。试求梁中最大弯曲应力，假设 $h=6$ 吋，$b=3.5$ 吋，$b_1=3$ 吋，$t=0.5$ 吋。

8.2-5　有一角形截面梁(见图)，承受弯矩 $M_z=80,000$ 吋-磅。试求 A 点处的应力，假设 $a=4$ 吋，$b=6$ 吋，$t=0.5$ 吋。



习题 8.2-5,8.2-7 和 8.2-8

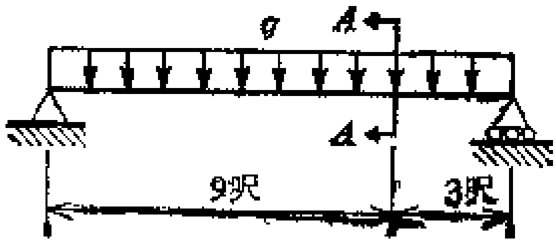
8.2-6　试求 $5\times 2\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ 吋角形截面所能承受的最大弯矩，假设该角绕其主要的主轴弯曲，其容许应力 $\sigma_w=18,000$ 磅/吋²。

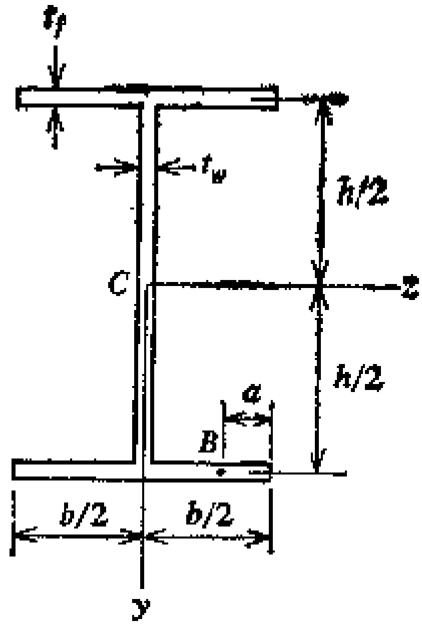
8.2-7　有一角形截面梁因力偶 $M_z=10,000$ 吋-磅作用而弯曲(见图)。试确定梁中最大弯曲应力，假设 $a=2.5$ 吋，$b=5$ 吋，$t=0.5$ 吋。应用方程 (8-11) 去求其解。

8.2-8　需确定主轴位置，将弯曲力偶分解为顺主方向的分量，然后应用方程 (8-5)，求解上一习题。

8.4-1　有一宽翼缘截面简单梁，承受 $q=300$ 磅/呎的均匀荷载，如图所示。横截面的尺寸 $h=11.5$ 吋，$b=8$ 吋，$t_f=t_w=0.5$ 吋。(a) 试问 A-A 截面处横截面上最大剪应力是多大？ (b) 又问 A-A 截面处 B 点的剪应力(大小和方向)如何？B 点位于离下翼缘边缘距离 $a=1$ 吋处。注意：在进行惯性矩 I_z 和一次矩 Q_z 的计算时，采用横截面中心线尺寸。

8.4-2　根据横截面的实际尺寸代替采用中心线尺寸进行全部计算，求解上一习题。

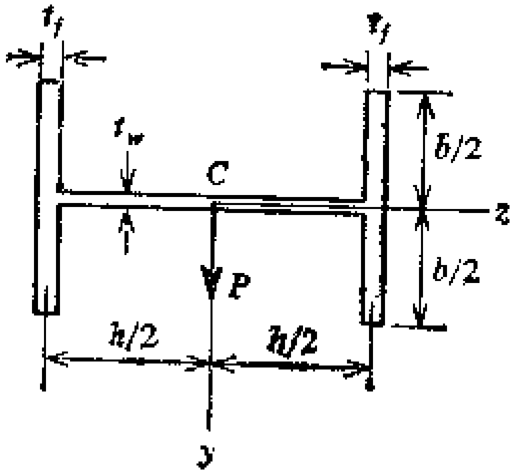




截面 A-A

习题 8.4-1

8.4-3　有一宽翼缘梁承受垂直于腹板作用的力 P(见图)，研究该梁中的剪应力. 试确定全部剪应力的大小和方向，并说明剪应力的合力等于 P. 应用中心线尺寸进行 I_z 和 Q_z 的计算.



习题 8.4-3

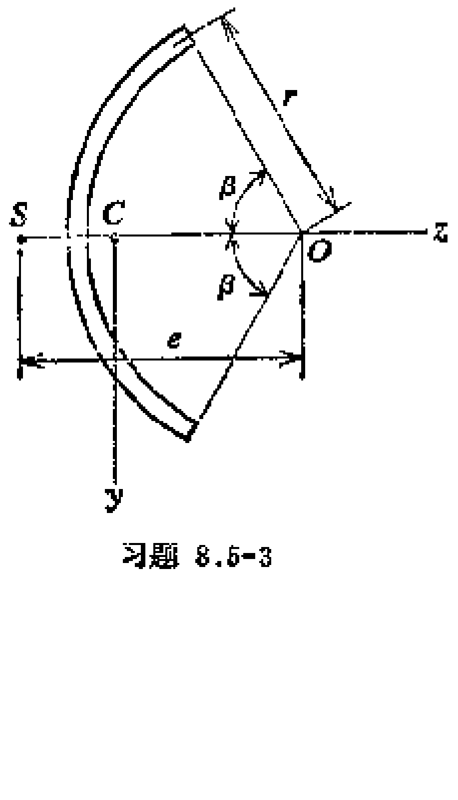
8.4-4　对于承受通过剪切中心垂直于腹板作用的力 P 的非对称 I 形梁（见图 8-8），求解上一习题.

8.4-5　对图 8-9 中所示 T 梁，求解习题 8.4-3. 假设其翼缘厚度为 t_1，宽度为 b_1.

8.5-1　试确定 C 12×20.7 槽形梁（见附录 C）的剪应力，假设其剪力通过剪切中心作用，该力 $V_y=12,900$ 磅(见图 8-12). 另外，求出确定横截面剪切中心位置的距离 e(注意：应用中心线尺寸进行 Q_z 和 e 的计算，但根据附录中的表采用 I_z 值).

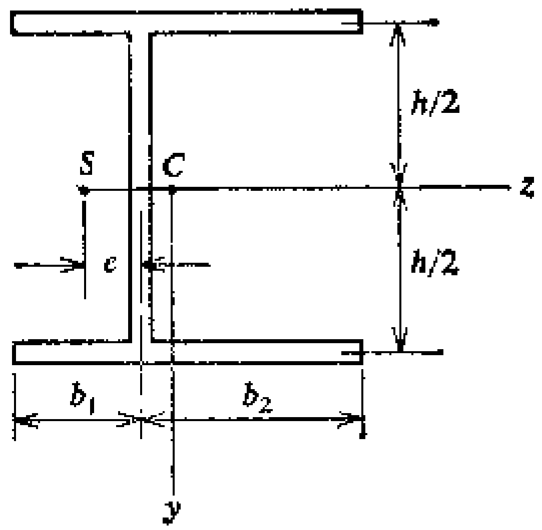
8.5-2　说明作用于薄壁半圆横截面梁上的剪应力（参见图 8-15 和方程 f）之合力等于 V_y.

8.5-3　试确定薄壁圆弧形状截面中剪切中心 S 的位置(见图). 绘一图表示当 β 从 0 至 π 时距离 e 是如何变化的.



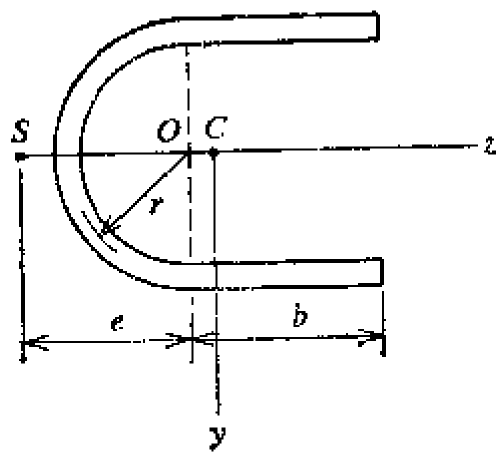
习题 8.5-3

8.5-4　试导出确定图中所示不均衡I梁剪切中心 S 位置的公式。假设其厚度为常数，且很小。



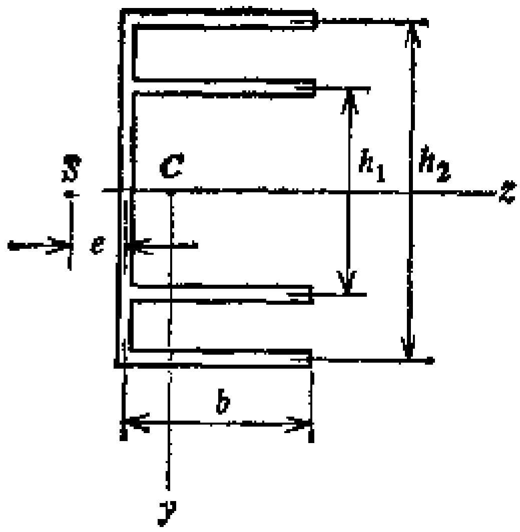
习题 8.5-4

8.5-5　试确定图中所示薄壁截面的剪切中心 S 之位置。假设其厚度为一常数。



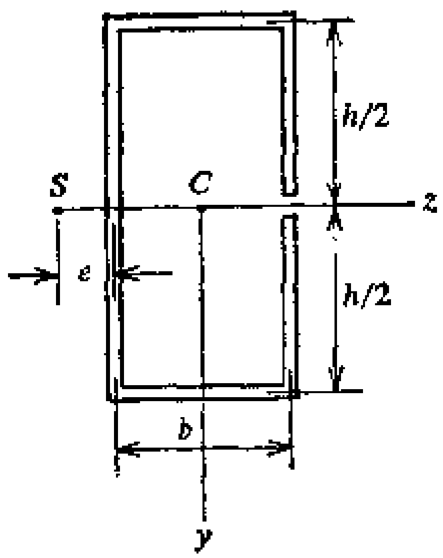
习题 8.5-5

8.5-6　试导出确定图中所示薄壁横截面剪切中心位置的距离 e 的公式，假设整个截面的厚度为常数。



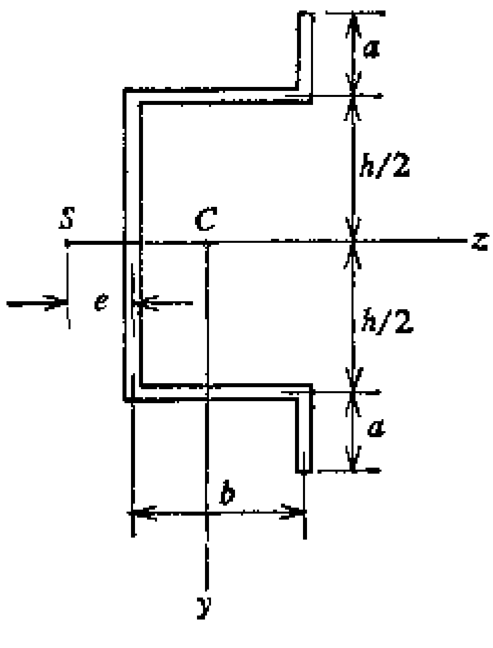
习题 8.5-6

8.5-7　试求出确定图中所示切开箱形截面剪切中心 S 位置的距离 e 之公式，假设其厚度为常数且很小。



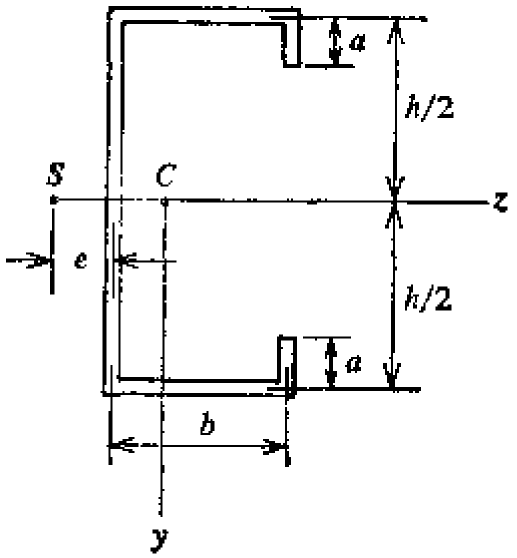
习题 8.5-7

8.5-8　对图中所示帽形截面情况，求解上一习题，假设 $a=h/2$。

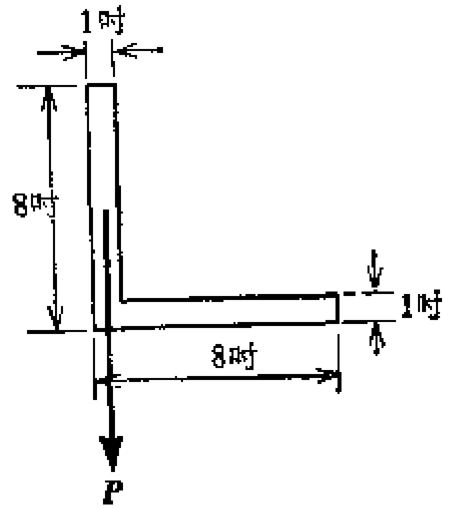


习题 8.5-8 和8.5-10

8.5-9　试确定图中所示薄壁 C 形截面剪切中心 S 位置的距离 e，假设其厚度为常数。



题习 8.5-9



习题 8.5-11

8.5-10　对图中所示帽形截面情况，求解上一习题。

8.5-11　有一长度 $L=10$ 呎的简单梁，其中点承受集中荷载 $P=4000$ 磅。其横截面为图示尺寸的角形截面。荷载 P 通过角上竖直肢的中间平面而作用。试求由于弯曲所产生的最大拉应力 σ_t 和最大压应力 σ_c。

第九章　非弹性弯曲

9.1　引言

非弹性弯曲指的是当材料不服从虎克定律时梁的弯曲．因而，当梁在其应力超过材料比例极限的情况下受力时，就发生非弹性弯曲．当然，非弹性弯曲时梁的性能与应力-应变图的形状有关．该图在超出比例极限后可能为一曲线形，如图1-4中的图形所说明．如果材料为钢，就存在显著的屈服，并具有图1-2中所示应力-应变图．在任一情况下，如果应力-应变图为已知，则总可能确定梁的应力、应变和挠度，如本章中将要说明的那样．

非弹性梁的分析基础是础于纯弯曲下梁的横截面的平面保持为平面这一事实之上的，这个条件对于非线性非弹性材料如同对于线性弹性材料一样(见第5.1节)是能成立的．这个概念使我们能够推论出梁的整个高度上的应变按直线变化．因此，借助应力-应变图和静力方程，我们能得到应力值和应变值．我们还能计算梁的曲率和挠度．

藉结构的非弹性分析，我们可以确定其承受荷载的极限能力，这种能力通常要比比例极限荷载(亦即梁上任何一点处都没有超过比例极限时梁所能承受的最大荷载）大得多．为了设计，最大荷载有时是需要的，以确定防止破坏或毁坏的安全系数．自然，这个系数与防止超出比例极限的安全系数是完全不同的．许多设计人员在设计钢结构时，认为应用极限荷载设计的概念(见第1.3节)要比采用弹性设计为好．

9.2 非弹性弯曲方程

为了得出非弹性弯曲的基本方程，让我们讨论承受正弯矩 M 作用的纯弯曲梁（见图 9-1 a）。其弯曲力偶作用于 xy 平面内，该平面假设为横截面的对称平面（图 9-1 b）。因面，梁将在这同一平面内弯曲，所以它为弯曲平面。我们可以考虑 z 轴为横截面的中性轴，它的位置有待确定。

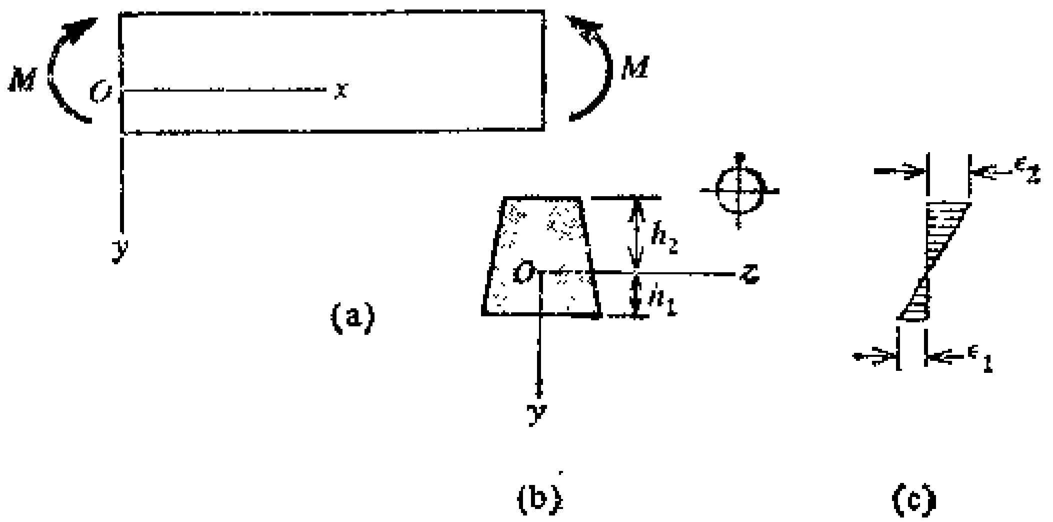


图 9-1 梁的非弹形弯曲

根据对称性的考虑，我们知道梁中应变为直线分布，与材料的性质无关，正如前面第 5.1 节所述。所以，梁顶至梁底的应变按图 9-1 c 中所绘方式变化，其中底缘和顶缘处的应变分别以 ϵ_1 和 ϵ_2 表示。用 ρ 表示挠度曲线的曲率半径，我们看出离中性面距离 y 处的应变为（见方程 5-2）：

$$\epsilon=\frac{y}{\rho}=ky \tag{9-1}$$

其中 $k=1/\rho$ 为曲率。最外边缘处的应变为

$$\epsilon_1=kh_1 \qquad \epsilon_2=-kh_2 \tag{9-2 a, b}$$

式中 h_1 和 h_2 分别为梁的中性轴至底面和顶面的距离。根据

这些方程我们看出应变可以很快得到确定，只要我们知道曲率和中性轴的位置。

中性轴的位置可藉应用材料的应力-应变图和静力方程来求得。静力方程表明由于作用于梁上任一横截面内的法向应力 σ 所产生的合成水平力等于零，因而

$$\int \sigma dA = 0 \tag{9-3}$$

其中 dA 为横截面中面积的单元，该积分是对整个横截面的。其曲率可藉应用第二个静力方程来求得，亦即表达作用于横截面上应力的合力等于弯矩 M：

$$\int \sigma y dA = M \tag{9-4}$$

自然，方程(9-3)和方程(9-4)与前面线性弹性材料组成的梁的分析中所用的方程相同(见第5.1节)。本章我们将应用这些方程去求解非弹性弯曲问题。

当梁的曲率计算出后，我们可令曲率等于 d^2v/dx^2（见方程6-4)，然后对挠度 v 进行求解，求出梁的微小挠度。有一些在前面提供求弹性梁挠度的同样方法可以用于非弹性弯曲，只需要应用适当的曲率表达式代替 M/EI 这个量，正如后面第9.6节所述。

9.3 塑性弯曲

最简单的非弹性弯曲情况是**塑性弯曲**，当梁的材料为弹-塑性时，便发生这种弯曲。这种材料在到达屈服应力之前服从虎克定律，然后在常数应力下塑性屈服。在受拉和受压时具有相同的屈服应力 σ_y 和相同的弹性模量 E 的弹-塑材料的应力-应变图，如图9-2所示。我们看出弹-塑性材料有一线性弹性区段，其后为完全塑性区段。由于这个原因，“**完全塑性材料**”一词往往被用于弹-塑性材料。

结构钢可以认为是理想的弹-塑性材料，因为它们具有很

明显的屈服点，在屈服过程中产生很大的应变．采取达到屈服应力之后为完全塑性的假定意味着应变硬化的效应略去不计，但是因为应变硬化使钢的强度增高，通常将它略去是偏于安全方面的．

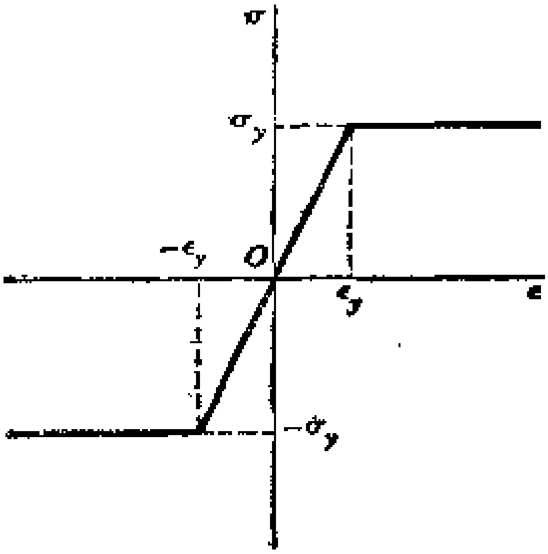


图 9-2　弹塑性材料的应力-应变图

现在让我们讨论纯弯下由弹-塑性材料构成的梁（图 9-1）．当作用的弯曲力偶 M 很小时，梁中最大应力小于 σ_y，该梁处于通常弹性弯曲情况，其应力按直线分布，如图 9-3 a中所示．在这种情况下，根据方程(9-1)至方程(9-4)，我们知道中性轴穿过横截面的形心，其法向应力 $\sigma=My/I$，曲率为M/EI．在离中性轴最远点处梁中的应力到达屈服应力之前(图 9-3 b)，这些结果都是成立的．在最远点到达屈服应力时作用于梁上的相应弯矩称为**屈服弯矩** M_y：

$$M_y=\frac{\sigma_y I}{c}=\sigma_y S \tag{9-5}$$

例如，对于矩形横截面梁，我们得到

$$M_y=\frac{\sigma_y bh^2}{6} \tag{9-6}$$

其中 b 为横截面的宽度、h 为其高度．

如果我们现在增大弯矩使之超过屈服弯矩 M_y，横截面中最外点处的应变将继续增大，最大应变将超过屈服应变 ϵ_y．然而，由于塑性屈服，最大应力将保持常数，且等于 σ_y．因而，

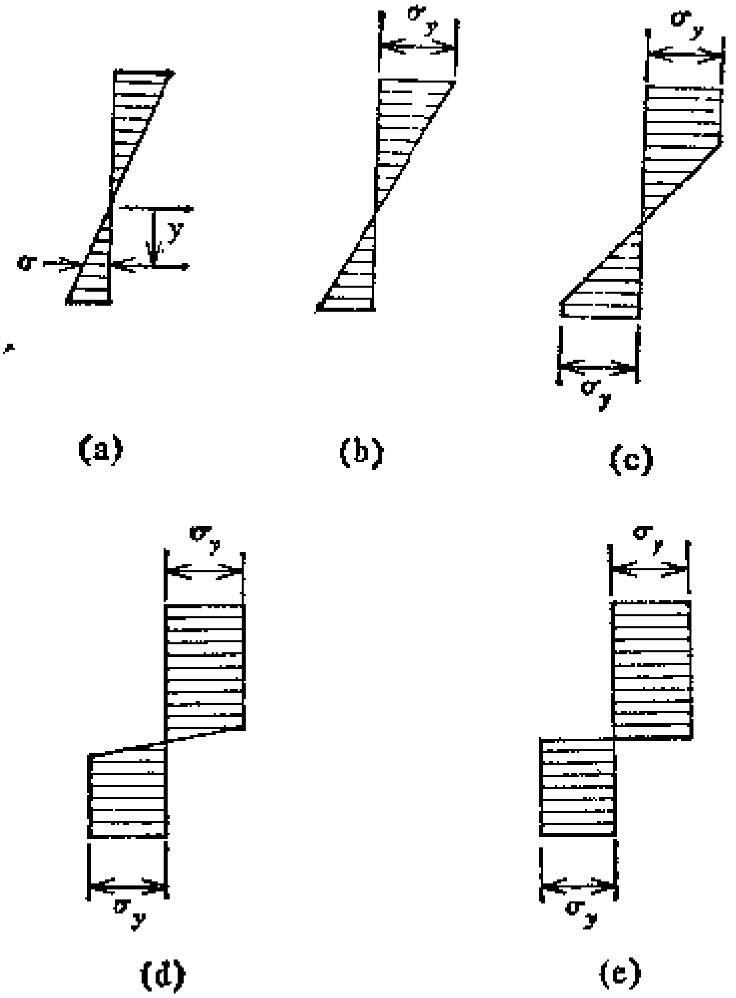
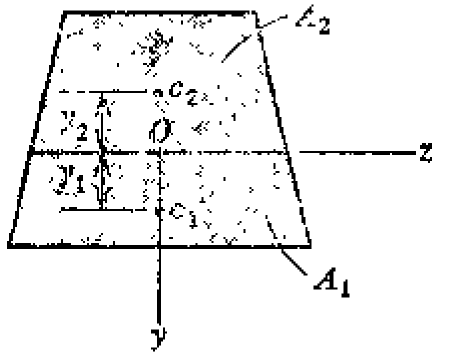


图 9-3 弹塑性材料的梁中应力分布

其应力情况将如图 9-3c 中所示. 梁的外边部分成为塑性，而中间“核心”保持为弹性.

再增大弯矩，塑性部分则由外向内往中性轴扩展，直至达到图 9-3d 所示的情况为止. 在此阶段，最外纤维的应变也许为 10 倍或 15 倍屈服应变 ϵ_y，弹性核心几乎消失. 因而，对于所有实用目的来说，梁到达了它的抵抗弯矩的极限能力，我们可以理想地认为极限应力的分布由两个矩形部分所组成(图 9-3e). 相应于这种理想应力分布的弯矩称为**塑性弯矩** M_p，它代表弹-塑性材料梁所能承受的最大弯矩.

塑性弯矩的确定显然是非常重要的，因为它是梁的极限



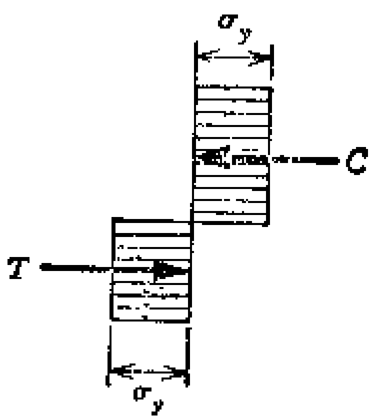


图 9-4 塑性弯矩M_p的确定

弯矩或最大弯矩．为了求出 M_p，我们从确定横截面的中性轴位置来开始(图 9-4 a)．中性轴以上横截面中每一单元具有等于σ_y的压应力(图 9-4 b)，中性轴以下的应力为拉应力，也等于σ_y．总拉力T等于$\sigma_y A_1$，其中A_1为中性轴以下的横截面面积．类似地，压力C为$\sigma_y A_2$，其中A_2为中性轴以上的横截面面积．如方程(9-3)所示，横截面中的合力必定为零，即

$$T-C=0 \qquad 或\ A_1=A_2 \tag{a}$$

因为横截面的总面积为$A=A_1+A_2$，根据方程(a)，显然

$$A_1=A_2=\frac{A}{2} \tag{9-7}$$

我们得出结论：中性轴把横截面分为两个相等的面积．因而，一般地说塑性弯矩M_p作用下的中性轴与线性弹性弯曲的中性轴不相同．例如，图 9-4 a 所示梯形横截面，在塑性情况下的中性轴稍低于弹性的情况．自然，如果横截面为双向对称，象矩形梁或宽翼缘梁，其中性轴对于塑性弯曲和弹性弯曲将是相同的．

现在根据方程(9-4)，藉积分或藉简单地取图 9-4 b 所示

力 T 和力 C 对中性轴的力矩的等效方法可以求出塑性弯矩 M_p. 所以，我们得到

$$M_p=Ty_1+Cy_2$$

式中 y_1 和 y_2 分别为中性轴至面积 A_1 和 A_2 的形心 c_1 和 c_2 处的距离. 用 $\sigma_y A/2$ 代替 T 和 C，我们得：

$$M_p=\frac{\sigma_y A\,(y_1+y_2)}{2} \qquad (9\text{-}8)$$

在每一特定情况下，其方法是将横截面分成两个相等的面积，确定这每一面积的形心，然后应用方程(9-8)去计算 M_p.

仿照弹性弯曲的方程(9-5)，我们可以将方程(9-8)写成下面形式：

$$M_p=\sigma_y Z \qquad (9\text{-}9)$$

式中

$$Z=\frac{A(y_1+y_2)}{2} \qquad (9\text{-}10)$$

它称为横截面的**塑性模量**. 塑性模量可以按几何解释为中性轴以上横截面面积对中性轴的一次矩，加上中性轴以下面积对中性轴的一次矩.

梁的塑性弯矩与其屈服弯矩之比值只是横截面形状的函数，通常称它为**形状系统** f：

$$f=\frac{M_p}{M_y}=\frac{Z}{S} \qquad (9\text{-}11)$$

如果我们取一矩形横截面梁(b=宽度，h=高度)，其塑性模量为(见方程 9-10)：

$$Z=\frac{bh}{2}\left(\frac{h}{4}+\frac{h}{4}\right)=\frac{bh^2}{4} \qquad (9\text{-}12)$$

回忆截面模量 $S=bh^2/6$，我们看出矩形梁的形状系数为：

$$f=\frac{3}{2} \qquad (9\text{-}13)$$

因此，矩形梁的塑性弯矩大于屈服弯矩的百分之五十。

对于宽翼缘梁（见图9-5），其塑性模量容易地藉一个翼缘的一次矩和中性轴以上腹板部分的一次矩，然后乘以2来算得，因而

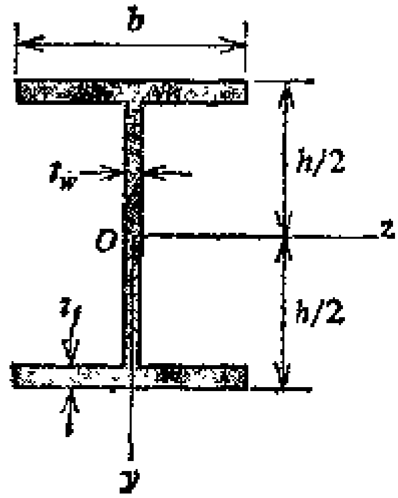


图 9-5　宽翼缘梁

$$Z=bt_f(h-t_f)+t_w\left(\frac{h}{2}-t_f\right)^2 \qquad (9\text{-}14)$$

式中右边第一项代表翼缘所起的作用，第二项为腹板所起的作用。对宽翼缘梁的标准形状，其 Z 值列于 AISC[1]手册中（参见文献5-4）。宽翼缘梁的形状系数 f 一般地说在1.1至1.2范围内，与横截面的大小有关。

弯矩-曲率的关系　早已观察到：对于小于屈服弯矩 M_y 的弯矩值，其曲率 k 为 M/EI。如果我们以 k_y 代表**屈服曲率**，亦即 M 等于 M_y 时的曲率，我们得：

$$k_y=\frac{M_y}{EI} \qquad (9\text{-}15)$$

因此，在线性弹性范围内梁的弯矩-曲率关系可用无量纲形式表达如下：

$$\frac{M}{M_y}=\frac{k}{k_y} \qquad (0\leqslant M\leqslant M_y) \qquad (9\text{-}16)$$

此方程用图9-6中弯矩-曲率图的直线部分来表示。

当弯矩变为大于 M_y 时，梁的一部分将完全成为塑性，如

1）AISC为美国钢结构学会 American Institute of Steel Construction 的缩写。——译者注

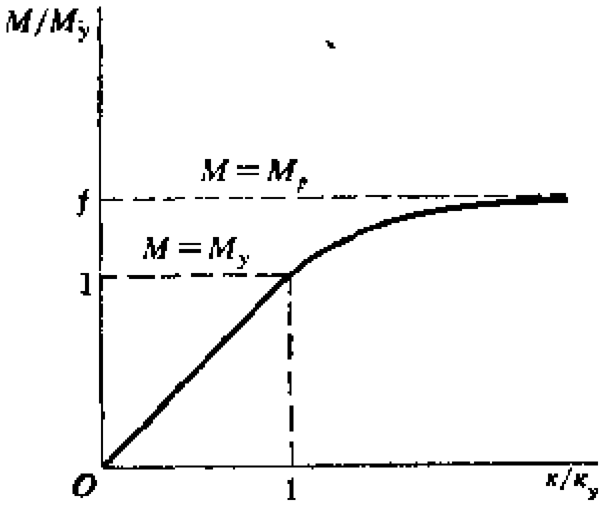


图 9-6　弹塑性材料的梁的弯矩-曲率图

对于图 9-3 c 早已讨论的那样. 于是弯矩-曲率关系成为非线性者，如图 9-6 中所示. 当塑性区向梁的中性轴进一步发展时，图 9-6 中的曲线成为较平坦并趋近于作为其渐近线的水平线. 此渐近线代表塑性弯矩 M_p. 因此渐近线的纵坐标为形状系数 f. 曲线方程当然与横截面的形状有关.

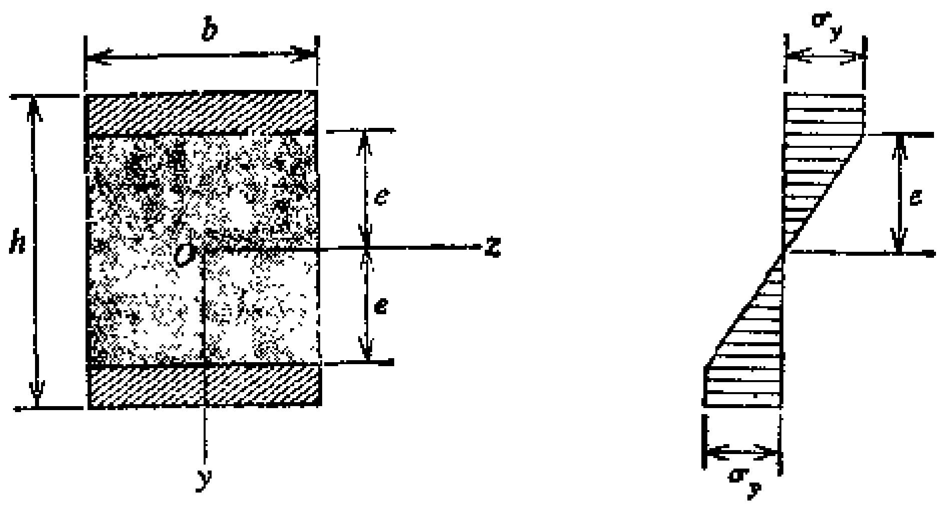


图 9-7　矩形横截面梁中的应力分布

让我们再次采取矩形横截面梁的情况(图 9-7 a)，令 e 代表中性轴至弹性核心边缘的距离. 完全塑性区以图 (a)中阴

影部分来表示.梁中的应力分布示于(b)中. 用这种应力分布所代表的弯矩为

$$M=\sigma_y b\left(\frac{h}{2}-e\right)\left(\frac{h}{2}+e\right)+\sigma_y b\left(\frac{2e^2}{3}\right) \tag{b}$$

式中右边第一项为完全塑性区中应力所产生的弯矩，第二项为弹性核心中应力所产生的弯矩. 简化方程(b),我们得到

$$M=\frac{\sigma_y bh^2}{6}\left(\frac{3}{2}-\frac{2e^2}{h^2}\right)=M_y\left(\frac{3}{2}-\frac{2e^2}{h^2}\right) \tag{c}$$

注意,当 $e=h/2$ 时,我们根据方程(c)得 $M=M_y$; 当 $e=0$时,我们得到 $M=3M_y/2$,它等于矩形横截面的塑性弯矩 M_p。

图 9-7 中所示矩形梁的曲率可以容易地藉应用方程 $k=\epsilon/y$ (见方程 9-1) 于弹性核心外缘处梁上一点来求得. 在这样的点上，我们有 $\epsilon=\sigma_y/E$ 和$y=e$,所以

$$k=\frac{\sigma_y}{Ee} \tag{d}$$

此方程对于矩形梁可藉引进下列屈服曲率 k_y 的表达式以无量纲形式来表达:

$$k_y=\frac{M_y}{EI}=\frac{2\sigma_y}{Eh} \tag{e}$$

合併方程(d)和(e)得

$$\frac{k}{k_y}=\frac{h}{2e} \tag{f}$$

我们现在可以在方程(c)和方程(f)中消去 e/h,从而. 得到以下面无量纲形式表达的弯矩-曲率方程:

$$\frac{M}{M_y}=\frac{3}{2}-\frac{k_y^2}{2k^2} \quad (M_y\leqslant M\leqslant M_p) \tag{9-17}$$

解出用弯矩表示方程(9-17)中之曲率,我们得到:

$$\frac{k}{k_y}=\frac{1}{\sqrt{3-2M/M_y}} \quad (M_y \leqslant M \leqslant M_p) \qquad (9\text{-}18)$$

矩形梁的弯矩-曲率关系图（根据方程 9-17 或方程 9-18）示于图 9-8 中.

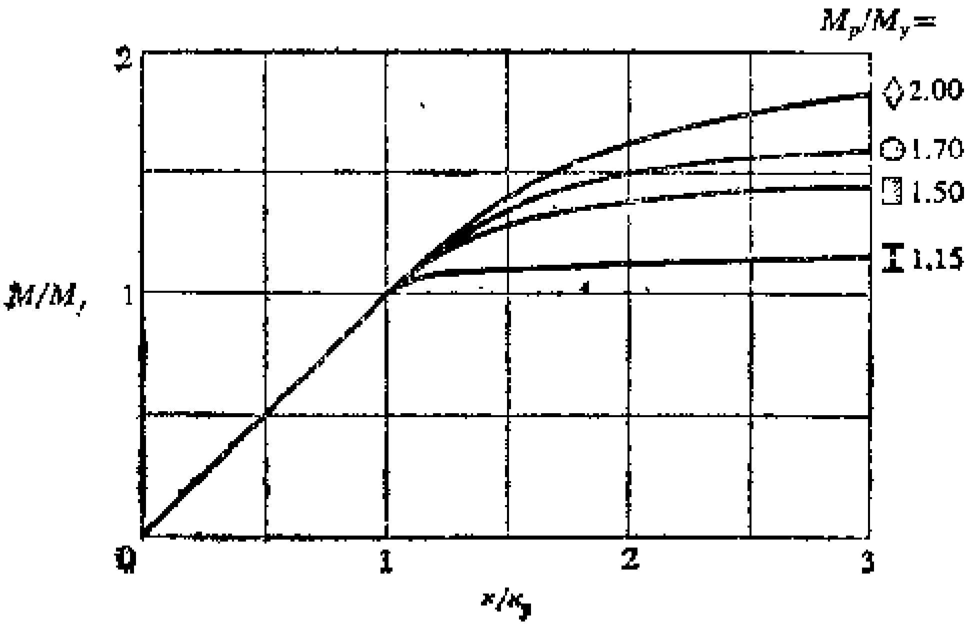


图 9-8 弹塑性材料的梁的弯矩-曲率图

对于其它形状的横截面，用类似方法可以得出其弯矩-曲率方程. 对于菱形、圆形和标准型宽翼缘梁的这些方程的图形绘于图 9-8 内. 在每一种情况中，其图形开始为代表线性弹性范围的直线，随后则为代表梁中有一部分为塑性、一部分为弹性的范围之曲线. 在图形的这个后一范围内，梁的塑性区内，在应力没有任何增加时发生屈服，而梁的中心弹性区在应力增大的同时发生附加变形. 因此，梁的变形被弹性区控制，这种性能有时称为受控制塑性流. 当曲率变得非常大时，图 9-8 中的曲线接近于水平线. 在此阶段作用弯矩没有任何增大，而梁却可以继续变形. 因而我们得到无约束塑性流的情况，其相应弯矩为塑性弯矩 M_p. 无约束塑性流的存在导致

下节中所述的塑性铰的概念。

9.4 塑性铰

为了说明塑性铰的概念，让我们讨论由弹-塑性材料构成的简单梁在中央处承受集中荷载 P 时的性能（图 9-9 a）。其弯矩图为三角形形状，最大弯矩 M_{max} 等于 $PL/4$(图 9-9 b)。如果最大弯矩大于 M_y 但小于 M_p，受控制塑性流的区域将存在于梁的中间部分（图 9-9 a）。其完全塑性区域在此图中以阴影部分表示，任一横截面处这种区域的渗入深度可以容易求出，因为弯矩为已知[1]。因此，对于任一具体梁，其塑性区域可以完全确定。

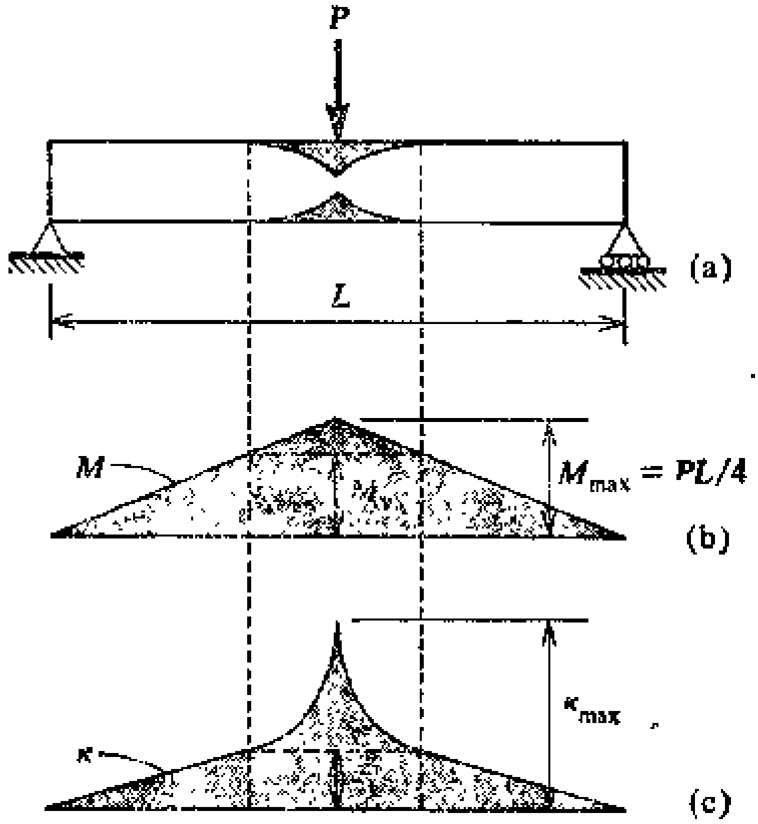


图 9-9 部分塑性梁

1）在确定塑性区的尺寸时，我们略去剪力的影响，并应用上节所述的纯弯理论。这种作法是正确的，因为剪力的影响非常小。

梁的曲率图示于图 9-9c 中. 其曲率自梁端向中央按直线增大直至到达塑性区域的边缘为止. 该边缘处的曲率等于它的屈服值 k_y. 然后,曲率以较快的速率增大,在梁中心处到达最大值 k_{max}. 只要梁中央处继续存在弹性核心，最大曲率就保持为有限值.

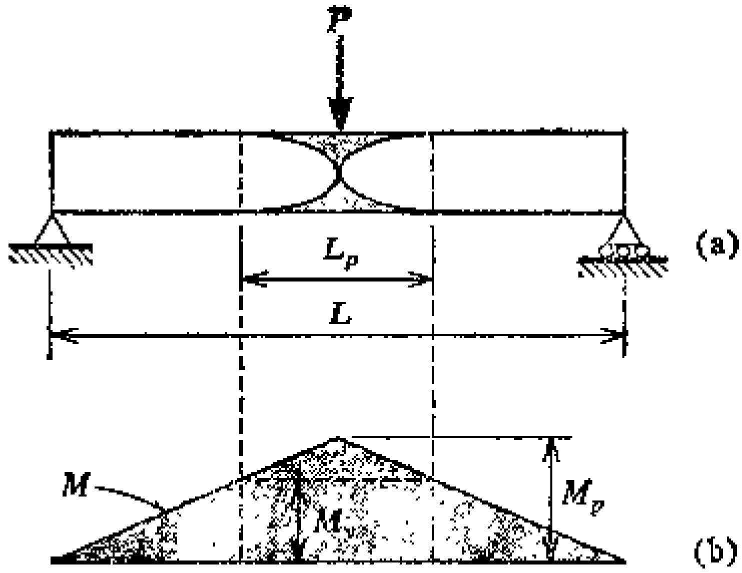


图 9-10 塑性铰

当荷载再增加,最大弯矩接近塑性弯矩 M_p 时,梁中央处塑性区域向内往中性轴扩展. 最后,当 M_{max} 等于 M_p 时，梁中心处的横截面为完全塑性者(图 9-10). 于是梁中心处的曲率成为非常大，且出现无约束塑性流. 最大弯矩不再能增大，梁上的荷载为它的最大值. 该梁因过分转动以致中央横截面处发生破坏,面梁的两边部分却保持比较坚硬. 因而,梁表现如同两个刚杆用**塑性铰**连接一样，许可两杆在常数弯矩 M_p 作用下彼此相对转动.

图 9-10 所示梁中塑性铰周围塑性区域的长度 L_p 可根据这样一个事实容易地求算出来，即该区域边缘处的弯矩等于 M_y. 所以,我们得出:

$$M_y=\frac{P}{2}\left(\frac{L-L_p}{2}\right) \tag{a}$$

另外，我们知道最大弯矩 $PL/4$ 等于 M_p，因此

$$P=\frac{4M_p}{L} \tag{b}$$

将表达式(b)代入方程(a)，并对 L_p 求解，对于作用有集中荷载的简单梁得到

$$L_p=L\left(1-\frac{M_y}{M_p}\right)=L\left(1-\frac{1}{f}\right) \tag{9-19}$$

对于矩形梁($f=1.5$)，我们得 $L_p=L/3$；对于宽翼缘梁($f=1.1$ 至 1.2)我们得 $L_p=0.09L$ 至 $0.17L$. 因此宽翼缘梁中的塑性区域要比矩形梁短得多.

即使塑性区域在梁的相当长的长度上扩展，但其弯曲趋向集中于铰的横截面处．所以，在通常意义上，可以认为塑性铰没有尺寸，亦即我们可认为铰是位于梁上一个单独的横截面处．塑性铰的出现意味着梁将在铰的横截面处发生转动，而弯矩保持常数且等于 M_p. 自然，塑性铰总是在最大弯矩截面处形成.

9.5 梁的塑性分析

塑性铰的概念为确定弹-塑性梁所能承受的最大荷载提供了有效的方法．我们早已在上节的叙述中观察出塑性铰的存在许可出现无限制地转动．所以，如果梁为静定者，单铰的形成足以引起破坏．产生铰所需荷载的大小（亦即**极限荷载**）可根据简单的静力学计算出．例如，对于图 9-10a 中所绘梁的极限荷载 P_u 为

$$P_u=\frac{4M_p}{L}$$

它是根据上节方程(b)求得．对于弹-塑性梁计算其极限荷载和确定其塑性铰位置的工作通常称为塑性分析．

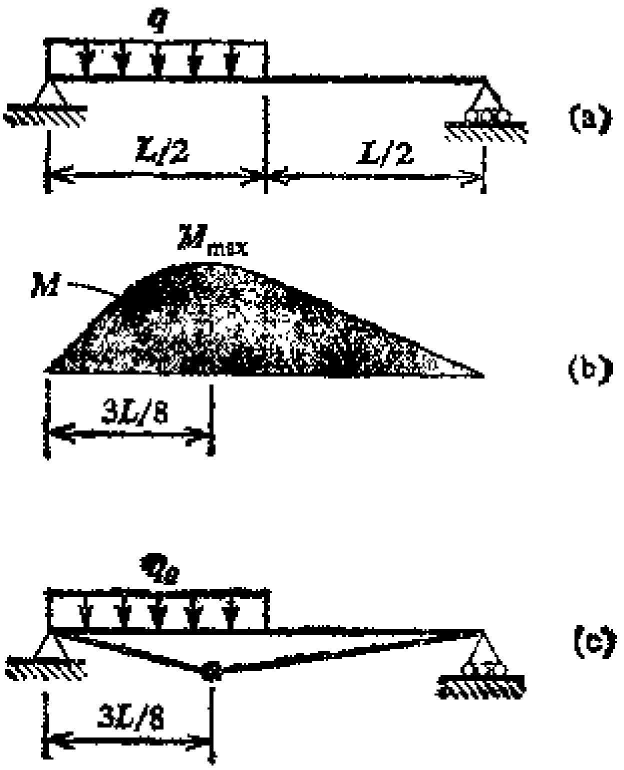


图 9-11　静定梁的塑性分析

现在让我们讨论另一个静定梁的例子(见图 9-11 a)．沿该梁左半部上作用有强度为 q 的均匀荷载．其弯矩图示于图中的(b)内，我们发现最大弯矩 $M_{max}=9\,qL^2/128$．本例中的弯矩图仅根据静力学便求出来了，而与梁的材料是弹性还是非弹性无关，对于所有静定梁都是如此．

如果荷载 q 是逐渐作用到此梁上，当最大弯矩等于梁的屈服弯矩 M_y 时，我们碰上初始屈服，其相应荷载称为屈服荷载．因此，该梁的屈服荷载为：

$$q_y=\frac{128\,M_y}{9\,L^2}$$

荷载进一步增加，最后将在最大弯矩截面处形成塑性铰，如图 9-11 c 中黑圆所示．其相应极限荷载为

$$q_u=\frac{128\,M_p}{9\,L^2}$$

式中 M_p 为梁的塑性弯矩．在铰形成后，梁可看成由铰连结的两根杆所组成．这种情况下，梁形成一个机构，在极限荷载下可能继续下挠．通常用“破坏机构”一词或“毁坏机构”一词来描述这种情况．

对于静定梁的极限荷载与屈服荷载之比值总是等于 M_p/M_y，从上述例题可看出它为横截面的形状系数 f．然而，对于静不定梁，这种比值随梁的类型和其荷载而变．

为了说明静不定梁的特性，我们采取中央处承受集中荷载 P 的有支承悬臂梁作为实例(图 9-12 a)．对于任一小于屈服荷载 P_y 的荷载值，其弯矩图的形状如图 9-12 b 所示．最大弯矩产生于固定端 A 处，数值上等于 $3\,PL/16$，因此，其屈服荷载为

$$P_y=\frac{16\,M_y}{3\,L} \tag{a}$$

如果 P 增大超过了 P_y 值，截面 A 处将产生附加屈服．当荷载稍微大于 P_y 时，马上在弯矩图中峰点截面 C 处也开始屈服．如果我们继续增大荷载，梁的端点 A 处将形成塑性铰．然而，这个单铰不会引起梁完全破坏．只是梁将成为在截面 C 处承受荷载 P、端点 A 处承受力矩 M_p 所作用的静定简单梁．因而，该结构将经得起荷载 P 的增加，直到最后 C 点处弯矩也到达塑性弯矩 M_p 为止．在此阶段中，A 和 C 处都存在塑性铰，而结构形成一个机构(图 9-12 c)．现在荷载不再可能增大，而无约束挠度将出现，因此，我们已到达极限荷载 P_u．

为了确定极限荷载，我们不需要象上段那样详细地研究自初始加载直到毁坏时梁的性能．我们可以直接对图 9-12 c

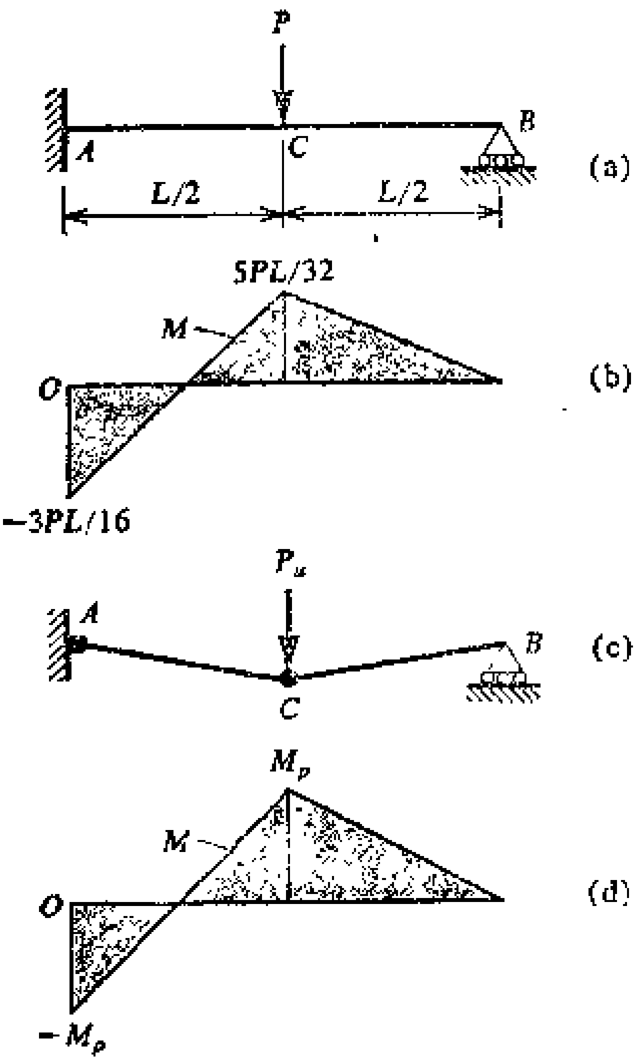


图 9-12　静不定梁的塑性分析

中所示破坏情况，藉静力学计算 P_u。由于塑性铰处的弯矩等于 M_p，破坏情况下的整个弯矩图就立即知道了（见图 9-12 d)。因此，荷载 P_u 可根据平衡考虑容易求出。例如，我们根据整个梁的自由体图可以求出支承 B 处的反力 R_b。对 A 点取力矩(图 9-12 c)得：

$$M_p - \frac{P_u L}{2} + R_b L = 0 \quad 或 \quad R_b = \frac{P_u}{2} - \frac{M_p}{L}$$

然后，应用 CB 部分的自由体图，对 C 点取力矩，我们得

$$-M_p + \frac{R_b L}{2} = 0$$

将此方程与前面的一个方程合併，我们得到梁的极限荷载：

$$P_u = \frac{6M_p}{L} \tag{b}$$

根据方程(a)和方程(b)，我们现在得到极限荷载与屈服荷载的比值：

$$\frac{P_u}{P_y} = \frac{9M_p}{8M_y}$$

它大于静定梁所得的比值。这种增大的理由可以容易看出来，虽然弯矩图的形状总是保持与静定梁相同，但静不定梁中发生弯矩重分配。在图 9-12 所示梁的例子中，初始弯矩图在截面 A 处具有最大值(图 9-12 b)。在该截面形成铰之后，即使别处的弯矩将继续增大直至到达图 9-12 d 中所示情况，但该截面处的弯矩却保持不变。这种弯矩重分配总是具有增大静不定结构的极限强度的趋势，因为只要一个截面破坏，结构的其它部分就开始承受附加荷载。

塑性分析的便利特点之一，是单独应用静力学可以容易地计算出极限荷载。单纯静力分析当然要比在线性弹性范围内所需要的静不定分析简单得多。此外，用塑性分析所得的结果受边界条件不准确的影响是不灵敏的。固定支承的微小转动或简单支承稍微降低对极限荷载没有影响，反之这同样的不准确对于结构的弹性性能却具有明显的影响。

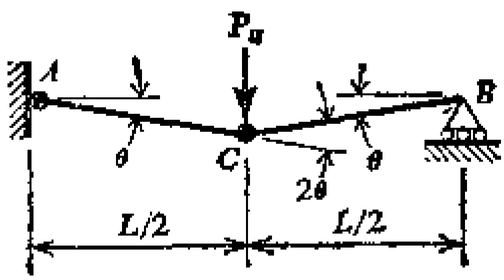


图 9-13 虚位移原理的应用

当用静力学计算极限荷载时，应用虚位移原理通常会有很大的优点。这一原理指出：如果我们有一刚体体系在一力

系作用下处于平衡，那么在该体系产生微小虚位移的过程中，这些力所做的功必定为零.让我们将这一原理用于图 9-12 中所述的例子. 我们考虑该破坏机构由 AC 和 CB 两杆于 A 和 C 处用塑性铰组成，如图 9-13 所示. 我们可藉杆 AC 转过很小的 θ 角引进虚位移. 在产生此位移当中，CB 杆将转过同样的 θ 角，而 C 点向下移动距离 $\theta L/2$. 力 P_u 所做的功为正值，且等于 P_u 乘以 $\theta L/2$. 塑性力矩所做的功 M_p 为负值，因为它们与杆的转角相反；截面 A 处的功为 $-M_p\theta$，而截面 C 处的功为 $-M_p(2\theta)$. 所以，梁的虚功方程为

$$\frac{P_u\theta L}{2}-M_p\theta-2M_p\theta=0$$

消去定义为虚位移的 θ 角，我们得

$$P_u=\frac{6M_p}{L}$$

与前面相同. 应用虚位移原理的优点在于它很简单，我们只引进虚位移，然后写出一个虚功方程. 反之，一般静力学方法需要我们应用自由体图，不仅对于整个结构，而且对于它的各部分都要应用自由体图.

在上述例子中确定塑性铰只有一种可能方法，因此只要考虑一种破坏机构. 然而，往往碰到有几种不同的可能的机构，不能明显看出那一种是正确的. 在这种情况下，我们必须依次考虑每一种机构，并计算其相应的荷载(或荷载系)值；当然，正确的破坏机构是荷载值为最小的机构. 这种荷载为结构的真正的极限荷载.

为了说明破坏机构的妥当的选择，让我们取图 9-14 a 中所示的梁 AB 作为例子. 此梁在截面 C 和 D 处承受两个集中荷载. 这种梁中弯矩的峰值将发生于荷载或反力所作用的横截面处，亦即发生于 A, C 或 D 处. 如果在这三个横截面

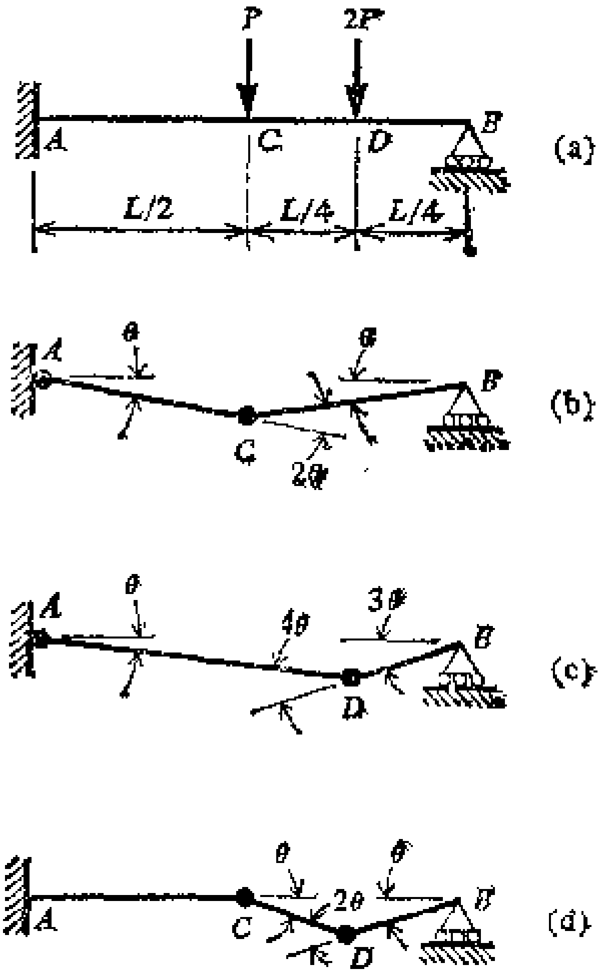


图 9-14 说明可能的破坏机构的例题

中的两个截面处存在塑性铰，那么破坏机构的形成将有三种可能性，如图 9-14 b, c 和 d 所示．对于每一种假设的机构，其荷载 P 的大小可以根据虚位移原理容易地计算出来．因此对于图 9-14 b 中所示的机构，我们得：

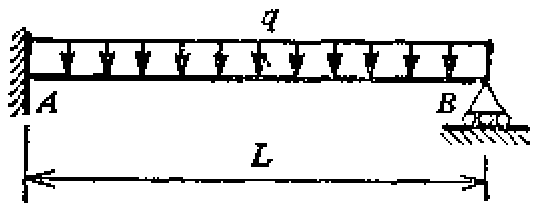
$$P\left(\frac{\theta L}{2}\right)+2P\left(\frac{\theta L}{4}\right)-M_p\theta-M_p(2\theta)=0$$

或 $P=3M_p/L$．类似地，相应于图 9-14 c 中所示机构的荷载 P 求出为 $5M_p/2L$，相应于图 9-14 d 为 $6M_p/L$．比较这三个结果，我们得出结论，图 9-14 a 所示的梁的极限荷载为

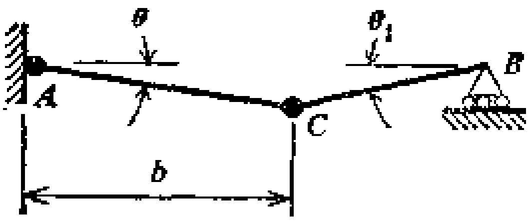
$$P_u = \frac{5M_p}{L}$$

其毁坏机构是在截面 A 和 D 处存在塑性铰.

作为另外一个塑性分析的例子，让我们研究承受均匀荷载的有支承悬臂梁(图 9-15 a)。梁中最大负弯矩发生于固定



(a)



(b)

图 9-15 承受均匀荷载的梁的塑性分析

支承 A 处，而最大正弯矩发生于靠近梁中央的地方. 因此，毁坏机构在 A 和 C 处将存在塑性铰，如图 9-15 b 所绘。如果我们引进这个机构的虚位移，并用 θ 代表 AC 部分的转角，那么 C 处的铰的竖直位移将为 θb，其中 b 为离铰的距离. 同时，CB 部分的转角成为 $\theta_1=\theta b/(L-b)$。因而，在铰处，塑性弯矩 M_p 所做的虚功为

$$-M_p\theta - M_p(\theta+\theta_1) \tag{c}$$

由于作用荷载 q 所做的功可藉取荷载的单元 qdx 乘以它移动的虚位移，然后沿梁的长度进行积分来求得. 因为 q 为常数，其结果就等于 q 与图 9-15 b 所示位移图的面积相乘. 因而，荷载 q 的虚功为：

$$q\left(\frac{L}{2}\right)(\theta b) \quad \text{(d)}$$

虚功方程借相加表达式(c)和(d)，并令其等于零来求得；求解所得的方程，得：

$$q_u = \frac{2M_p}{bL}\left(\frac{2L-b}{L-b}\right) \quad \text{(e)}$$

此表达式得出以距离 b 表示的极限荷载，此 b 仍保留为未知量．然而，我们早已观察到，当考虑各种可能的破坏机构时，其正确的机构为极限荷载值最低的一种．将这个概念用于现在的问题中，我们得出结论 b 必定是使 q_u 为最小的距离．所以，我们可以取 q_u 对于 b 的导数，令此导数等于零，并对 b 进行求解．其结果为

$$b = L(2-\sqrt{2}) \quad \text{(f)}$$

另一种方法是建立梁中弯矩的表达式，然后求出最大弯矩的位置，这个点将为塑性铰的位置．自然，刚才所述那些类型的计算方法(使 q_u 为最小或确定最大弯矩点)，只可能用于数学上容易处理的最简单的问题中．在较为复杂的情况下，藉假设几个塑性铰的位置，然后计算每一种情形的相应荷载，作这样的数值解较为容易．根据这样的计算，最小荷载 q_u 和铰的位置均可很精确地求得．

现在回到我们所讨论的问题，我们根据方程(f)采取距离 b，将它代入 q_u 的表达式(见方程 e)，得出梁上极限荷载的表达式：

$$q_u = \frac{2M_p}{L^2}(3+2\sqrt{2}) \approx \frac{11.66M_p}{L^2} \quad \text{(g)}$$

可以说明此梁极限荷载 q_u 对屈服荷载 q_y 之比值容易计算出来，此比值为 $1.46M_p/M_y$，它比静定梁的值要高得多．

固定端梁和连续梁的塑性分析可以用类似上面诸例中所述的方式来完成．固定端梁将成为有三个塑性铰形式的机构，通常是在每一支承处和某一中间位置处存在铰．连续梁在一跨中形成机构时毁坏．如果它为里面的跨度，就需要三个铰：该跨每一端处有一个铰，中间位置处有一个铰．对于带有简单支承的端跨，形成机构只需要两个铰：在里面第一个支承处有一个铰，在端跨本身中有一个铰．

塑性分析的最重要的应用是在设计平面框架中．当到达极限荷载时，这种框架形成机构，但是它们的分析要比梁复杂得多．有兴趣的读者可以学习一些有关塑性分析方法方面较深一步资料的文献(见参考文献 9-1 至 9-8)．

当分析非弹性范围内的梁或其它结构时，我们必须记住：迭加原理是不适用的，结构的性能不仅与荷载的最终值有关，而且与它们作用的次序有关．为了说明这点，讨论图 9-16 a 中所示作用有两个荷载 P 的 AB 梁．如果两个荷载同时作用，其弯矩图具有图中(b)所示形状，并且屈服荷载 $P_y=9\,M_y/L$．现在假设首先有作用于 C 点处的荷载，然后有作用于 D 点处的荷载．当仅有作用于 C 点处的荷载时，弯矩图[1]具有图 9-16 c 中所示形状，其最大弯矩为上述例子中的值的两倍[2]，因此 C 点处单独作用的荷载 P 即使保持小于上面刚计算出的 P_y 值，也可能产生塑性状态．当另一荷载 P 作用于 D 点时，这种塑性状态将不会消失，因此，显然梁的最终情况将与荷载同时作用下的情况不相同．

由于这种原因，我们总是在我们的研究中假设诸力是同时作用于结构上，并假设加载过程中诸荷载的比值保持常数．

塑性设计　　钢结构根据其极限荷载能力的设计称为塑

1）原文为弯曲图，恐系笔误，应改为弯矩图．——译者注

2）这里所说的上述例子是指两个荷载同时作用的情况．——译者注

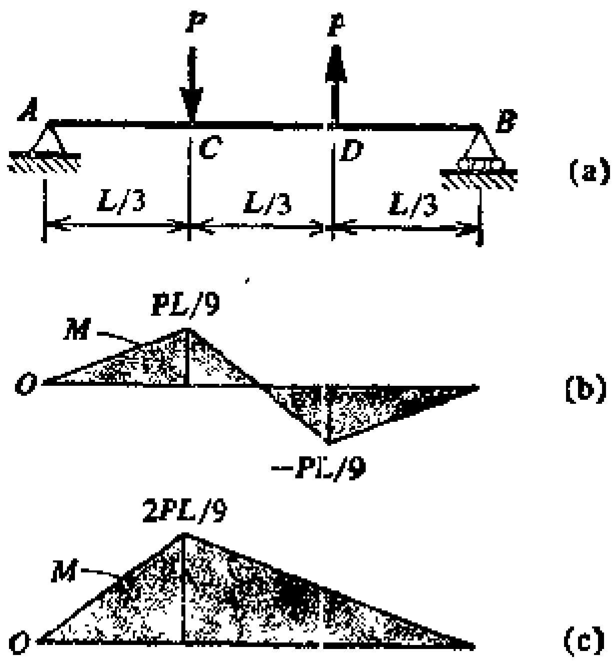


图 9-16 承受两个荷载的梁

塑性设计或**极限荷载设计**[1]. 在塑性设计中，我们首先确定结构的资用荷载，然后用一个**荷载系数**（譬如 1.7）去乘那些荷载．便得到极限荷载．结构是应用塑性分析的概念对极限荷载条件进行设计的．这种方法与比较熟悉的弹性设计或容许应力设计不同，在弹性设计或容许应力设计中，对屈服应力使用安全系数来得出资用应力，然后进行结构设计(应用弹性分析概念)，因此不超过资用应力．

这两种设计方法的主要不同点是：塑性设计使结构的所有部分在抵抗破坏上具有几乎均匀的安全系数，反之按弹性设计的结构具有抵抗屈服的均匀安全系数．根据前面关于非弹性作用过程中弯矩在结构中如何重新分配的讨论，我们可以容易地理解：在用这两种方法所设计的结构中，它们各个部分会有不同的相对的大小．

关于塑性设计和塑性分析课题方面的文献是非常多的，

1）也应用极限设计这个词．

希望从事这个课题的读者可以从本书后面所列的一些参考文献来着手（见参考文献9-1至9-18）．这些参考文献包括有该课题初始研究的文献目录．

9.6 挠度

非弹性梁的挠度可以根据曲率与挠度之间的基本关系来求得(见方程6-4)：

$$k=\frac{d^2v}{dx^2} \tag{9-20}$$

这个方程是完全根据几何考虑导出来的，因此它对任何材料的梁都能成立，自然，它限于很小的挠度．曲率 k 必须要知道，以便应用方程(9-20)去计算挠度．对于线性弹性材料，其曲率为 M/EI．对于非弹性梁（如弹-塑性梁），则必须应用适当的曲率表达式(如方程9-18)．当应用(9-20)时，剪力对于挠度的影响略去不计，对于一般用途，这样是足够精确的．

第六章中对弹性梁所述求解方程(9-20)的某些方法也可用于非弹性弯曲．例如，连续积分法是完全能成立的，即使它仅能适用于梁的初等问题．力矩-面积法也可以用，只是这里我们应称它为曲率-面积法，因为它的两个定理必须以曲率图的面积代替 M/EI 图的面积重新进行叙述．因而，曲率-面积定理为：

1．A 点和 B 点处挠度曲线的切线夹角 θ 等于这两点之间曲率图的面积．

2．B 点距 A 点处切线的挠度 Δ 等于 A 和 B 之间曲率图的面积对 B 点的一次矩．

这些定理可按力矩-面积定理用于弹性梁的同样方式用来求出非弹性梁的斜度和挠度．

因为曲率图通常不能用简单的函数来表达，所以一般需

要用数值法去求挠度. 例如，其曲率可在沿梁轴一组不连续的点上进行计算，在这些点的每一点处可以绘出曲率图的纵坐标，可用这些纵坐标以直线联起来得出近似精确的图形. 然后，该近似图形的面积和一次矩可以用数值求出；随后，其挠度和斜度可根据曲率-面积定理来确定. 只有很简单的问题可以用这些方法去处理，对于复杂结构已经创出了近似的方法. 关于求算挠度方面深一步的材料应查阅有关文献.

迭加原理不适用于任何超过比例极限的梁. 所以，当确定非弹性梁的挠度时我们不能应用迭加法.

例题 有一悬臂梁 AB，由弹-塑性材料所构成，其端点处承受集中荷载 P（见图 9-17 a）. 试确定从加载开始至破坏时梁的自由端处的转角 θ 和挠度 δ，假设该梁为矩形横截面.

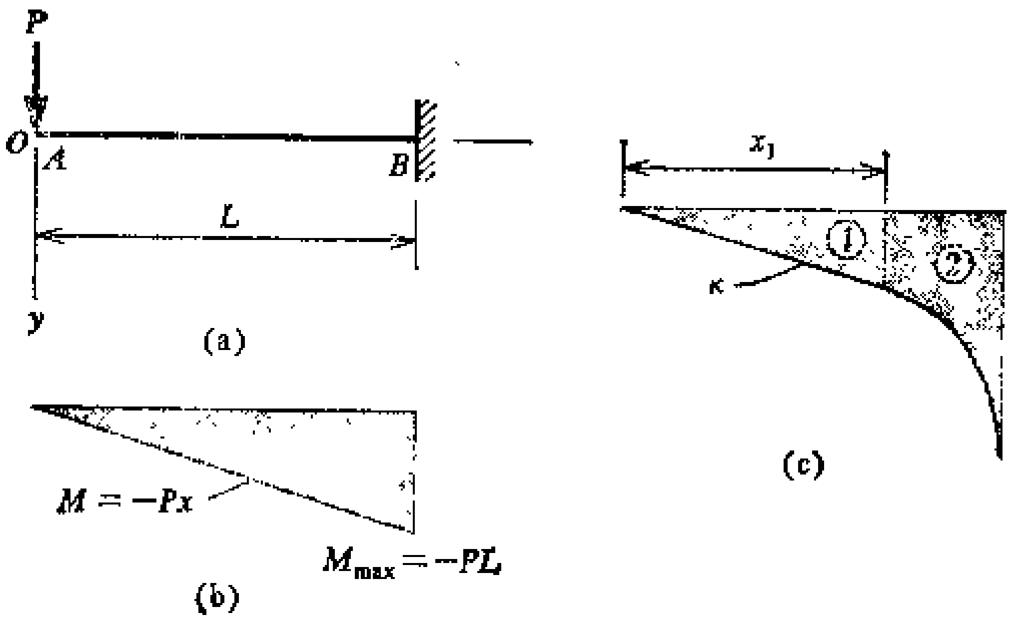


图 9-17 例题. 矩形横截面的弹塑性梁

让我们从绘制梁的弯矩图开始（图 9-17 b）. 我们看出最大弯矩等于 PL，只要此值小于屈服弯矩 M_y，该梁就是完全弹性的. 对于弹性范围，我们有

$$\theta=\frac{PL^2}{2EI} \qquad \delta=\frac{PL^3}{3EI}$$

开始使梁产生屈服的屈服荷载 P_y 用下列方程求得：

$$P_y=\frac{M_y}{L} \tag{a}$$

由于屈服荷载引起的角 θ_y 和挠度 δ_y 为：

$$\theta_y=\frac{P_yL^2}{2EI} \qquad \delta_y=\frac{P_yL^3}{3EI} \tag{b}$$

这些是弹性范围内的最大转角值和挠度值。我们可藉下列简化方程用无量纲形式表达整个弹性范围内的转角和挠度：

$$\frac{\theta}{\theta_y}=\frac{P}{P_y} \qquad \frac{\delta}{\delta_y}=\frac{P}{P_y}\left(0\leqslant\frac{P}{P_y}\leqslant 1\right) \tag{c}$$

当梁中最大力矩超过 M_y 时，该梁则有两个区域：(1) 完全弹性性能区域；(2)弹-塑性性能区域，如图 9-17 c 中曲率图所示。在区域 (1) 内，其曲率为

$$k=\frac{Px}{EI} \tag{d}$$

而在区域(2)内，它为(见方程 9-18)：

$$k=\frac{k_y}{\sqrt{3-2Px/M_y}} \tag{e}$$

式中 $k_y=M_y/EI$。弹性区域的长度 x_1 根据方程 $Px_1=M_y$ 求出，因此

$$x_1=\frac{M_y}{P} \tag{f}$$

根据曲率-面积第一定理，梁端处的转角等于曲率图的面积：

$$\theta=\int_0^{x_1}\frac{Px\,dx}{EI}+\int_{x_1}^{L}\frac{k_y\,dx}{\sqrt{3-2Px/M_y}}$$

$$=\frac{Px_1^2}{2EI}+\frac{k_yM_y}{P}\left[\sqrt{3-2Px_1/M_y}-\sqrt{3-2PL/M_y}\right]$$

如果我们将 M_y/EI 代替 k_y，将 M_y/P 代替 x_1，将 P_yL 代替 M_y，上述

方程成为：

$$\frac{\theta}{\theta_y}=\frac{P_y}{P}\left[3-2\sqrt{3-2\,P/P_y}\right] \qquad \left(1\leqslant\frac{P}{P_y}\leqslant\frac{3}{2}\right) \tag{g}$$

式中 θ_y 按方程(b)求得。此方程直到梁中的最大弯矩成为等于塑性弯矩 M_p 为止都能成立，它们相当于 $P/P_y=3/2$。当 P/P_y 到达此值的一刹那间，转角 $\theta/\theta_y=2$。接着，此角无限地增大。荷载 P/P_y 对转角 θ/θ_y 的曲线图示于图 9-18 中。

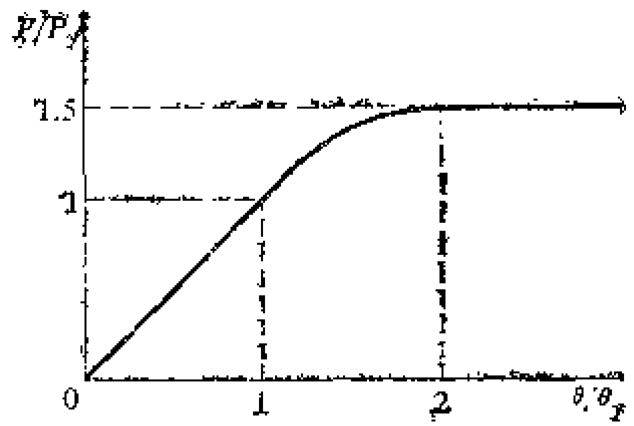


图 9-18　图 9-17所示悬臂梁的荷载与转角的关系

梁端处的挠度根据曲率-面积第二定理求出如下：

$$\delta=\int_0^{x_1}\frac{Px^2\,dx}{EI}+\int_{x_1}^{L}\frac{k_y x\,dx}{\sqrt{3-2\,Px/M_y}}$$

稍求算这些积分，并进行与方程(g)相同的置换，我们得到：

$$\frac{\delta}{\delta_y}=\left(\frac{P_y}{P}\right)^2\left[5-\left(3+\frac{P}{P_y}\right)\sqrt{3-\frac{2\,P}{P_y}}\right] \qquad \left(1\leqslant\frac{P}{P_y}\leqslant\frac{3}{2}\right) \tag{h}$$

式中 δ_y 按方程(b)求得。当 P/P_y 等于 3/2 时，挠度 $\delta/\delta_y=20/9$。其荷载-挠度图绘于图 9-19 内。

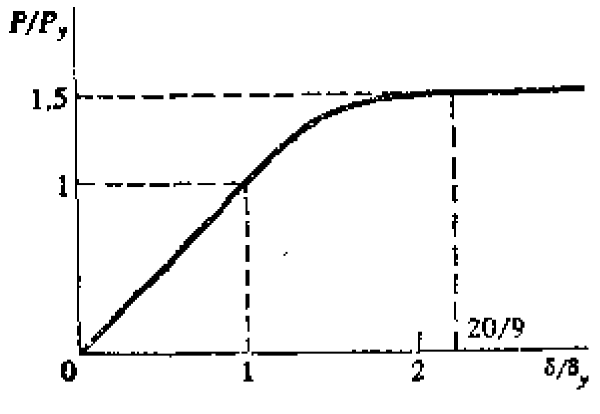


图 9-19　图 9-17 所示悬臂梁的荷载与挠度的关系

9.7 非弹性弯曲

在上述四节中，我们已详细地论及弹-塑性材料的特殊情况。由于这种材料非常精确地代表钢结构的性能，它对于工程人员是极为重要的。现在我们将讨论非弹性弯曲的较为一般的情况，在这种情况下，材料具有如图 9-20 中曲线 AOB 所示的应力-应变图。再次让我们从讨论矩形横截面梁来开始（图 9-21），梁中 h_1 和 h_2 分别为中性轴至梁顶面和底面处的距离。

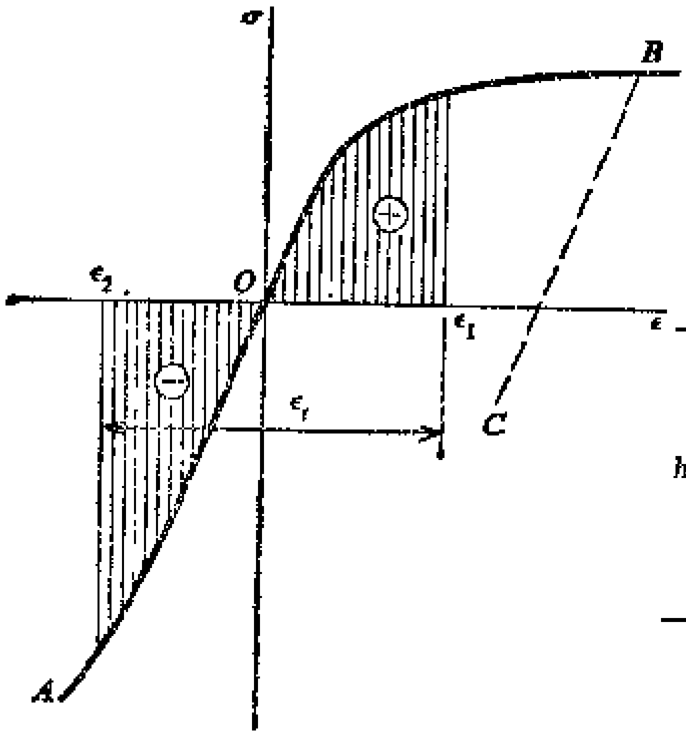


图 9-20　应力-应变图

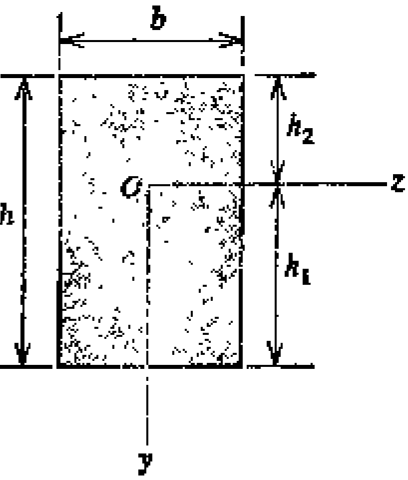


图 9-21　矩形横截面非弹性梁

为了确定矩形梁的中性轴位置，我们应用方程(9-1)和方程(9-3)。根据方程(9-1)，我们得出：

$$y=\rho\epsilon \qquad dy=\rho d\epsilon \tag{a}$$

代入方程(9-3)，得

$$\int\sigma dA=\int_{-h_2}^{h_1}\sigma b d y=\rho b\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1}\sigma d\epsilon=0$$

式中 ϵ_1 和 ϵ_2 分别为梁底面和顶面处的应变（见图 9-1）。注意：这些应变还示于图 9-20 的应力-应变曲线上。上述方程表明中性轴的位置为：

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = 0 \tag{9-21}$$

现在让我们用 ϵ_t 代表梁中最大正应变和最大负应变的绝对值之和：

$$\epsilon_t = \epsilon_1 - \epsilon_2 = kh_1 + kh_2 = kh \tag{9-22}$$

为了求解方程(9-21)，我们应用图 9-20 中的曲线 AOB，并采取使图形的拉伸面积等于压缩面积的方法在水平轴上标出长度 ϵ_t。按这种方法，我们将得到最外纤维中的应变 ϵ_1 和 ϵ_2，这些应变相应于某一总应变 ϵ_t 的假定值。于是中性轴的相应位置根据方程(9-2)容易地求出如下：

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\epsilon_1}{-\epsilon_2} = \left|\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right| \tag{9-23}$$

由于应变 ϵ 与其距中性轴的距离成线性关系（见图 9-1c），我们得出结论：如果以距离 h 代替 ϵ_t，图 9-20 中的应力-应变图形 AOB 则代表梁的整个高度上弯曲应力的分布。因而，对于 ϵ_t 的一个假定值，我们现在知道中性轴的位置，和梁的整个高度上的应力和应度。根据方程 (9-22)，我们还知道梁的曲率。

下一步是通过方程 (9-4) 的应用求出所作用的弯矩 M。根据方程(a)，我们可以使方程(9-4)成为下面形式：

$$\int \sigma y dA = \int_{-h_2}^{h_1} \sigma y b d y = \rho^2 b \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon = M \tag{b}$$

根据方程(9-22)观察到 $\rho = 1/k = h/\epsilon_t$，我们可以将方程(b)写成下面形式：

$$M = \frac{bh^2}{\epsilon_t^2} \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \sigma \epsilon d\epsilon \tag{9-24}$$

此表达式中的积分代表图 9-20 中应力-应变曲线下的面积（阴影面积）对竖直轴的一次矩。因而，藉对每一种特定情况求算这一积分，并代入方程（9-24），我们可以求出弯矩M，从而完成对假设的 ϵ_t 值的纯弯梁之分析。

对于另外的 ϵ_t 值，可以重复整个过程，每一次这样的计算得出一个曲率值和相应的弯矩。根据这些数据，可以绘出弯矩-曲率图（图 9-22）。这样的图是对于特定应力-应变曲线的，并且是对于矩形横截面特定梁的。

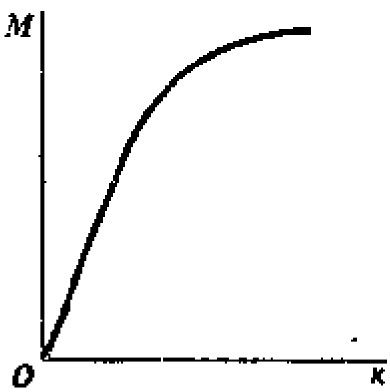


图 9-22 非弹性弯曲的弯矩-曲率图

如果应力-应变图的拉伸部分和压缩部分相同，那么计算得到简化，因为这样我们立即知道中性轴通过矩形横截面的形心。下面方程适用于这种情况：

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2} \tag{9-25}$$

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{\epsilon_t}{2} \tag{9-26}$$

$$M = \frac{2\,bh^2}{\epsilon_t^2}\int_0^{\epsilon_1} \sigma\epsilon d\epsilon \tag{9-27}$$

根据这些方程中的最后一个方程，我们可以对任何一个假设的 ϵ_t 值计算M，随后可以根据方程(9-22) 求出其曲率。

对于线性弹性材料的矩形梁这种特殊情况，我们知 $\sigma = E\epsilon$，方程(9-27)得出：

$$M = \frac{2\,bh^2}{\epsilon_t^2}\int_0^{\epsilon_1} E\epsilon^2 d\epsilon = \frac{2\,bh^2 E\epsilon_1^3}{3\epsilon_t^2} \tag{c}$$

现将 $\epsilon_t = 2\,\epsilon_1$ 和 $\sigma_{max} = E\epsilon_1$ 代入方程(c)，我们得到：

$$M = \frac{\sigma_{max}\,bh^2}{6} = \sigma_{max}\ S \tag{d}$$

式中 σ_{max} 为梁底处的应力．如果我们还将 $\epsilon_t=2\epsilon_1$ 和 $\epsilon_1=kh/2$ 代入方程(c)，我们得到：

$$k=\frac{M}{Ebh^3/12}=\frac{M}{EI} \tag{e}$$

方程(d)和(e)都是熟知的线性弹性弯曲方程．

如果我们用一些其它形状的横截面代替矩形截面，这些截面的宽度 b 是可变的（例如见图 9-1 b），那么不用方程（9-21）和方程(9-24)，而我们得到：

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1}\sigma b d\epsilon=0 \tag{9-28}$$

$$M=\frac{h^2}{\epsilon_t^2}\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1}\sigma b\epsilon d\epsilon \tag{9-29}$$

式中宽度 b 保留于积分符号内．让我们讨论 T 形截面（图 9-23）作为特殊例子．以 ϵ_3 表示腹板与翼缘联结处的应变，我们可将上面方程写成下面的形式：

$$\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_3}\sigma d\epsilon+\int_{\epsilon_3}^{\epsilon_1}\sigma\frac{b_1}{b_2}d\epsilon=0 \tag{f}$$

$$M=\frac{b_2h^2}{\epsilon_t^2}\left[\int_{\epsilon_2}^{\epsilon_3}\sigma\epsilon d\epsilon+\int_{\epsilon_3}^{\epsilon_1}\sigma\frac{b_1}{b_2}\epsilon d\epsilon\right] \tag{g}$$

根据这些方程我们看出相应于横截面中翼缘范围内应力-应变图的纵坐标必须按比值 b_1/b_2 放大（见图 9-24）．在确定中性轴时，我们像前面情况那样进行，在图 9-24 中的水平轴上标出所假设距离 ϵ_t 的位置，使两个阴影面积数值上相等．自然，该位置必须用试凑法求出．对于每一试用位置，腹板与翼缘联结处的应变 ϵ_3 根据下面方程求得：

$$\frac{\epsilon_1-\epsilon_3}{\epsilon_t}=\frac{c}{h} \tag{h}$$

按这种方式进行，求得最远纤维处的应变 ϵ_1 和 ϵ_2．

在根据方程(f)确定中性轴之后，现在我们可以根据方程

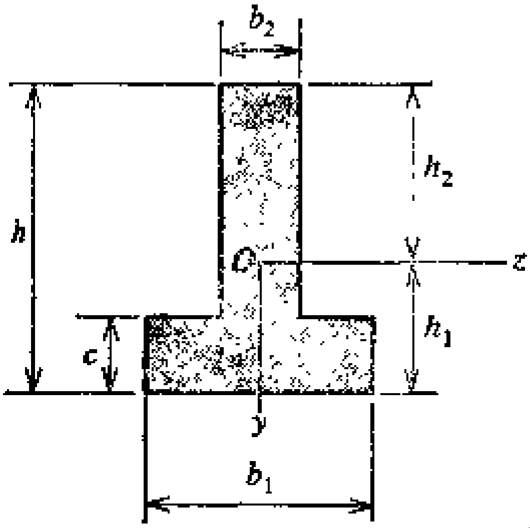


图 9-23　T 形截面的非弹性梁

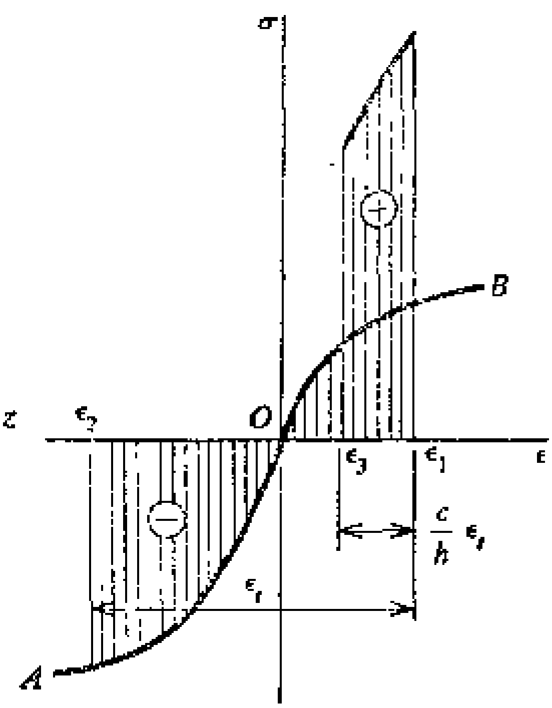


图 9-24　修正的应力-应变图

(g)求出弯矩。我们注意该方程括号中的两个积分代表图 9-24 中阴影面积对通过原点 O 的竖直轴的一次矩。先计算这个一次矩，随后代入方程(g)，我们得出相应于所假设的 ϵ_t 值的弯矩 M。我们还可以根据方程(9-22)求出其相应曲率 k，然后我们可以绘出 T 形截面梁的弯矩-曲率图。这种类似的过程可以用于宽翼缘梁。

上面所述非弹性弯曲下梁的分析是非常普遍的，可以用于任何应力-应变曲线和任何横截面形状。然而，有时应力-应变曲线可以用分析表达式近似表示；在这种情况下，可以用直接计算来确定应力、应变和曲率。通常只有在情况比较简单时才是可能的，如在下面矩形横截面梁的例子中所示。

例题　有一矩形横截面梁(见图 9-21)，由用两条线组成其应力-应变图(如图 9-25)的材料所构成。其受拉弹性模量为 E_1、受压弹性模量为 E_2，因此

$$\sigma = E_1\epsilon \qquad \epsilon \geqslant 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\sigma = E_2\epsilon \qquad \epsilon \leqslant 0 \qquad \text{(j)}$$

假设该梁承受正弯矩M. 分析的任务是确定中性轴的位置，求得弯矩-曲率表达式，并求出梁中的最大应力和应变。

让我们分别以ϵ_1和ϵ_2代表梁底和梁顶处的应变。其相应最大应力为σ_1和σ_2。这些应力和应变示于图9-25中。为了确定中性轴的位置，我们注意到应力-应变曲线下的两块阴影面积必须相等，因此

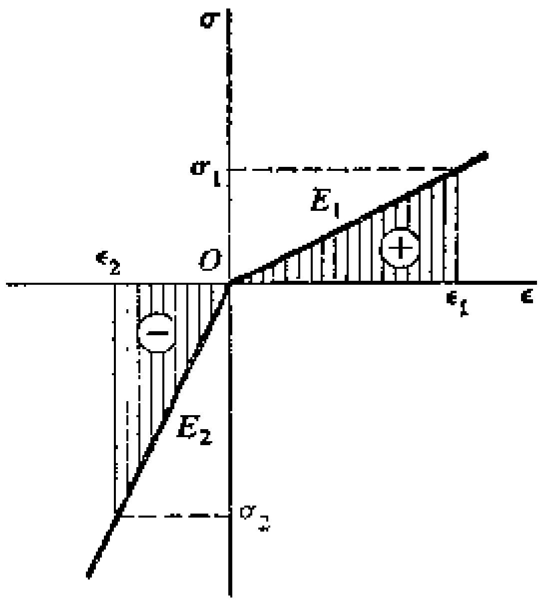


图 9-25 例题，由两条直线组成的应力-应变图

$$\frac{\sigma_1\epsilon_1}{2} = \frac{\sigma_2\epsilon_2}{2} \tag{k}$$

根据方程(i)和(j)，我们知道

$$\sigma_1 = E_1\epsilon_1 \qquad \sigma_2 = E_2\epsilon_2 \tag{l}$$

另外，我们知道这样的关系：

$$\epsilon_1 = kh_1 \qquad \epsilon_2 = -kh_2 \tag{m}$$

将上述四个方程代入方程(k)，我们得出

$$E_1h_1^2 = E_2h_2^2 \tag{n}$$

它为h_1与h_2关系的第一个方程。另外，我们知道这样的方程：

$$h = h_1 + h_2 \tag{o}$$

现在可藉联解方程(n)和(o)求出距离h_1和h_2，得到

$$h_1 = \frac{h\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}} \qquad h_2 = \frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}} \tag{9-30}$$

因而确定了中性轴的位置。

然后，我们回到方程(9-24)计算弯矩。以方程(i)和(j)代入，得到：

$$M = \frac{bh^2}{\epsilon_1^2}\left[\int_{\epsilon_2}^{0} E_2\epsilon^2 d\epsilon + \int_{0}^{\epsilon_1} E_1\epsilon^2 d\epsilon\right]$$

它成为

$$M=\frac{bh^2}{3\epsilon_t^2}\left[-E_2\epsilon_2^3+E_1\epsilon_1^3\right] \tag{p}$$

借方程(m)使应变 ϵ_1 和 ϵ_2 与曲率联系起来，将方程(9-30)代入方程(m)，得到，

$$\epsilon_1=kh\frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}},\quad \epsilon_2=-kh\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}$$

另外，应变 ϵ_t 等于 kh（见方程 9-22）。现在我们可以将 ϵ_1、ϵ_2 和 ϵ_t 的表达式代入方程(p)，得，

$$M=\frac{4E_1E_2Ik}{(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})^2} \tag{q}$$

式中 $I=bh^3/12$。最后，让我们引进下面符号，

$$E_r=\frac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})^2} \tag{9-31}$$

从而方程(q)成为 $M=E_rIk$，因此曲率成为，

$$k=\frac{M}{E_rI} \tag{9-32}$$

E_r这个量称为**折合弹性模量**，总是等于 E_1 和 E_2 之间的值。在这两个模量相同且均等于 E 的特殊情况下，于是 E_r 也就等于 E。

梁的最外纤维的应力和应变现在很容易用弯矩表示求出来。我们采用 ϵ_1 和 ϵ_2 的方程(m)，并代以曲率的方程(9-32)，得到

$$\epsilon_1=\frac{Mh_1}{E_rI}\qquad \epsilon_2=-\frac{Mh_2}{E_rI} \tag{9-33}$$

然后，应力-应变的方程(方程 l)得出

$$\sigma_1=\frac{Mh_1}{I}\frac{E_1}{E_r}\qquad \sigma_2=-\frac{Mh_2}{I}\frac{E_2}{E_r} \tag{9-34}$$

到此梁的分析已经完成。

挠度 对于静定非弹性梁，只要我们知道弯矩-曲率图，我们就能求出其挠度。进行计算的方法早已在第9.6节

中讨论过。然而，在静不定梁的情况下，其分析要复杂得多，因为我们不能应用迭加原理去求赘余反力。让我们讨论一个简单的例子来说明其着手方法。

假设我们有一非弹性梁，一端固定，而另一端为简支。固定支承处的反弯矩可以用下面方式藉试凑法求得。这种弯矩的试用值是假设的，然后绘制相应的弯矩图。其次，藉应用弯矩-曲率关系绘制梁的曲率图。根据曲率图，我们可计算固定支承处的转角。如果赘余弯矩的试用值选择得正确，该角应为零。藉重复试算，我们最后可以得到赘余弯矩的真实值。这种类似方法可以用于任何静不定梁的分析。

9.8 残余应力

当梁为非弹性弯曲，并随后把荷载移去，梁将产生某些永久性残留变形，梁不恢复到它的原来形状。梁中应力超过弹性极限的那些纤维将具有永久性残留变形，并且在卸载后将阻止属于弹性应力的纤维恢复到它们初始的长度。因此梁中将存在某些**残余应力**。

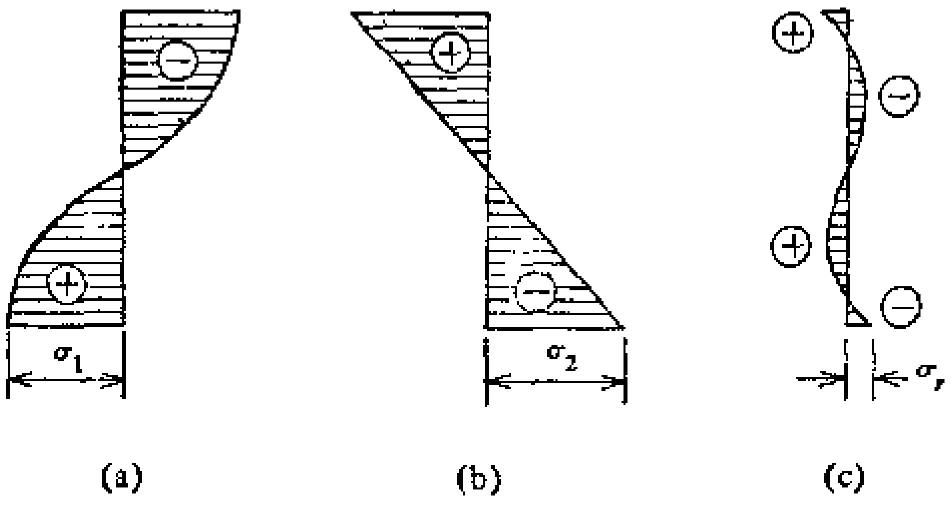


图 9-26 非弹性弯曲时的残余应力

如果由于初始非弹性弯曲所产生的应力为已知，梁中残

余应力图形是不难确定的．假设由于正弯矩M使梁中所产生的应力分布按图 9-26 a 中所示图形给出．为了简化，我们假设梁的横截面具有两根对称轴．而且材料对于受拉和受压具有同样的性能，从而得出中性轴位于梁的一半高度处，而且最大拉应力和最大压应力(等于σ_1)数值上相同．当此梁卸载时，它等效于与M相等的负弯矩使梁引起弯曲．在卸载过程中，梁的材料假设属于弹性，且服从虎克定律，如图 9-20 中应力-应变图上 BC 线所示．所以，卸载过程中所迭加上去的应力分布为一直线（图 9-26 b），从而这些应力根据公式 $\sigma=My/I$ 求得．最大卸载应力 $\sigma_2=M/S$．

初始非弹性弯曲应力与直线卸载应力的迭加将得出荷载移去后梁中残留下的应力．这种残余应力绘于图 9-26 c 中．可以按图 9-26 a 和 b 中所绘应力的代数和容易算出来．例如，在梁的底缘处，其残余应力 $\sigma_r=\sigma_1+\sigma_2$．对于所绘情况，$\sigma_2$ 为负值且数值上大于 σ_1，因此 σ_r 也将为负值．

现在假设原来的正弯矩M重新作用于具有图 9-26 c 所示残余应力的梁上．梁的每一纤维将保持弹性并服从虎克定律，直到其应力到达卸载之前原来值为止．所以，现在所作用的力矩M将产生具有线性关系的应力，而梁将表现为线性弹性方式只要所作用的弯矩不超过M．由于M产生的应力将与图 9-26 b 所示的相同，只是方向反过来，而其最终应力将如图 9-26 a 所示．因此，初始非弹性弯曲与卸载产生其附带残余应力的效应，是使梁表现为线性弹性状态，只要其弯曲方向不变，而且弯矩不超过初始弯矩．

按本节中的意思，残余应力是在结构加载而又卸载后残留下来的应力．轧制结构型钢存在另一种由于制造过程所产生的残余应力．由于轧制操作以及截面非均匀加热和冷却，生产出来的结构梁中存在着应力．这种应力通常称为残余应

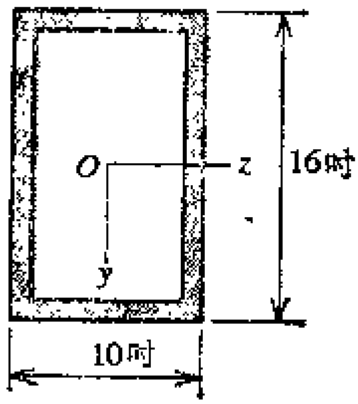
力或初始应力，可能大到 10千磅/吋^{2}或 15 千磅/吋^2. 关于结构梁中残余应力方面的资料见参考文献 9-19 至 9-21. 关于弯曲时残余应力包括用实验方法确定它们的附加资料列于参考文献 9-22 和 9-23 中。

习　　题

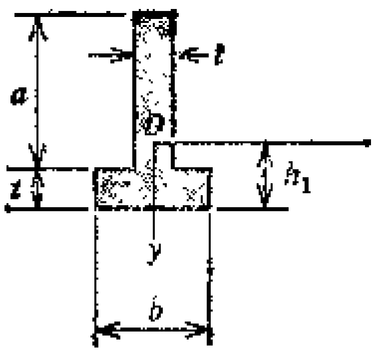
第 9.3 节中的习题，按材料为弹-塑性的假定进行求解

9.3-1　试确定图中所示空心箱形截面的塑性弯矩 M_p，假设 $\sigma_y=36,000$ 磅/吋^2，壁厚为 0.75 吋。

9.3-2　对于图中所示 T 形截面确定完全塑性情况下的中性轴位置（亦即求出距离 h_1），还求出塑性弯矩 M_p 的值，假设 $a=8$ 吋，$b=6$ 吋，$t=2$ 吋，$\sigma_y=36,000$ 磅/吋^2.



习题 9.3-1



习题 9.3-2

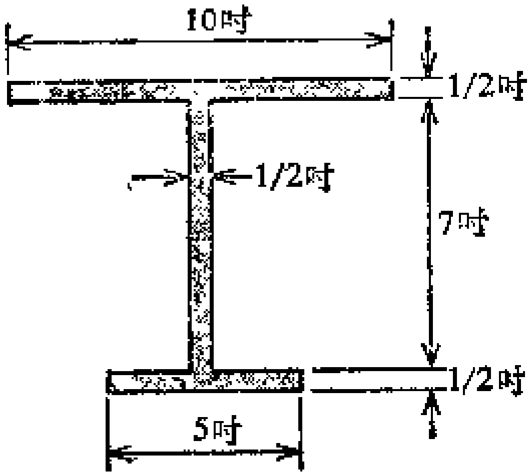
9.3-3　试计算截面 W 12×31（见附录 C）的塑性模量 Z。

9.3-4　有一非对称宽翼缘钢梁（屈服应力等于 35,000 磅/吋^2），具有图中所示的横截面。试问其塑性弯矩 M_p 为多少？

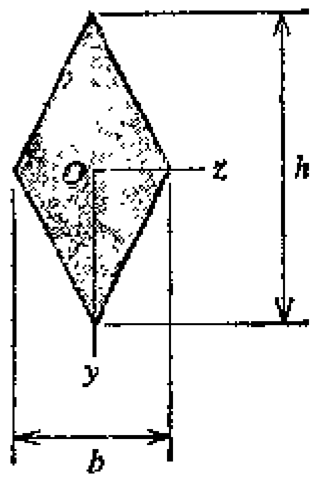
9.3-5　试确定圆形横截面梁的形状系数 f。

9.3-6　试确定棱形横截面的形状系数 f（见图）。

9.3-7　(a) 试确定外半径为 r_1，内半径为 r_2 的圆形管状横截面的形状系数。(b) 对于非常薄的管子的特殊情况，试问其形状系数 f 为多少？



习题 9.3-4



习题 9.3-6 和 9.3-11

9.3-8　试确定截面 W 16×50 (见附录 C)的形状系数 f.

9.3-9　有一矩形横截面(b=宽度,h=高度) 由弹-塑性材料构成,承受大于屈服弯矩 M_y 但小于塑性弯矩 M_p 的弯矩 M、试求中性轴至塑性区域距离 e 的公式(见图 9-7)。

9.3-10　有一截面为 W 14×38 的钢梁(σ_y=36,000 磅/吋^2,E=30×10^{6}磅/吋^2)承受使整个翼缘产生塑性屈服但腹板保持弹性的弯矩 M 作用。(a)试求该弯矩 M 的大小。(b)求出其曲率 k。

9.3-11　试导出棱形横截面弹-塑性梁(见问题 9.3-6 中的图)中 M/M_y 与 k/k_y 关系的弯矩-曲率方程(类似于方程 9-17)。

第 9.4 节的习题按材料为弹-塑性的假定进行求解

9.4-1　有一长度为 L 的简支梁承受均匀分布荷载。如果最大弯矩等于塑性弯矩 M_p,试确定梁中心处塑性区域的长度 L_p。

9.4-2　对于矩形横截面梁和 M_{max}=1.46 M_y 的情况,按比例绘出图 9-9 (计算足够多个的数值以便能够正确地绘出塑性区域的边界、弯矩图和曲率图)。

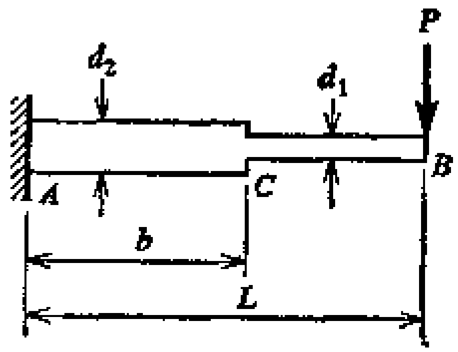
第 9.5 节的习题按材料为弹-塑性的假定进行求解

9.5-1　试对下列情况确定其极限荷载 P_u: (a)自由端处作用有集中荷载 P,长度为 L 的悬臂梁,(b)长度为 L,承受离端头距离为 $L/3$

的两个相等荷载的简单梁。

9.5-2　试问整个跨度上作用有均匀荷载的简单梁之极限荷载 q_u 是多大？假设 $L=4$ 呎，$\sigma_y=32,000$ 磅/吋²，截面为 3 吋 × 3 吋的方形截面。

9.5-3　有一圆形横截面悬臂梁 AB，具有两个不同的直径 d_1 和 d_2，如草图所示。自由端处作用荷载 P。(a) 试确定当荷载到达极限荷载 P_u 以使截面 A 和截面 C 处同时形成塑性铰时其直径之比值 d_1/d_2。(b)求出使梁承受极限荷载 P_u 时梁为最轻的距离 b。



习题 9.5-3

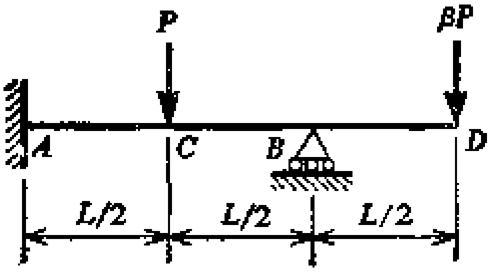
9.5-4　有一如图 9-12 a 所示有支承悬臂梁，距固定支承距离 b 处承受集中荷载 P。(a)试计算此梁的极限荷载 P_u，(b)假设该荷载可置于跨度上任何位置处，试问为使它具有最坏极限加载情况时距离 b 应为多少？

9.5-5　有一固定端梁，其中点处承受集中荷载 P。(a)试求极限荷载 P_u，(b)试问此梁的极限荷载与屈服荷载之比值 P_u/P_y 为多少？

9.5-6　有一承受均匀荷载 q 的固定端梁。(a) 试问极限荷载 q_u 为多少？(b)试问极限荷载与屈服荷载之比值 q_u/q_y 为多少？

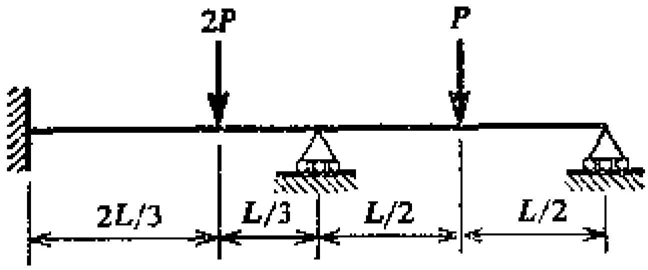
9.5-7　试确定图 9-14 a 中所示梁的极限荷载 P_u，假设梁的两端均固定。

9.5-8　图中所示的梁，A 端处为固定支承，而 B 端处为简单支承。截面 C 处作用荷载 P，D 端作用荷载 βP，这里 β 为一正数的系数。(a)试求此梁的极限荷载 P_u。(b)试问 β 为什么值时，梁上的总极限荷载为最大？



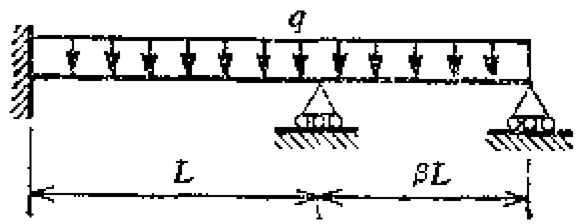
习题 9.5-8

9.5-9　试确定两跨梁承受如图所示荷载时的极限荷载 P_u。



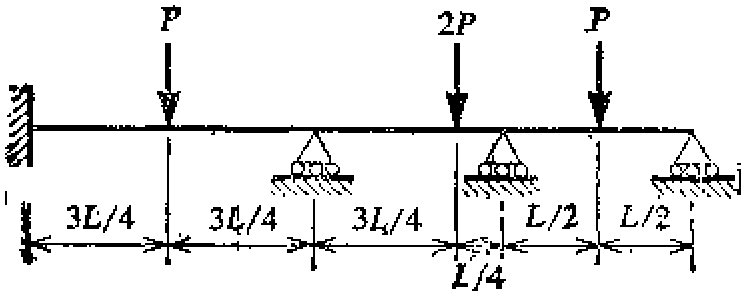
习题 9.5-9

9.5-10　试求图中所示两跨梁的极限荷载，假设(a)系数 $\beta=2/3$，(b)系数 $\beta=1$。



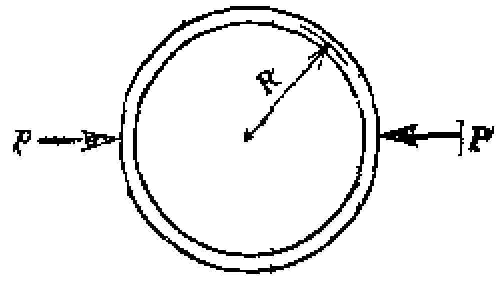
习题 9.5-10

9.5-11　试确定图中所示三跨连续梁的极限荷载 P_u。



习题 9.5-11

9.5-12　试求半径为 R 的薄壁圆环承受两个如图所示力作用时的极限荷载 P_u。



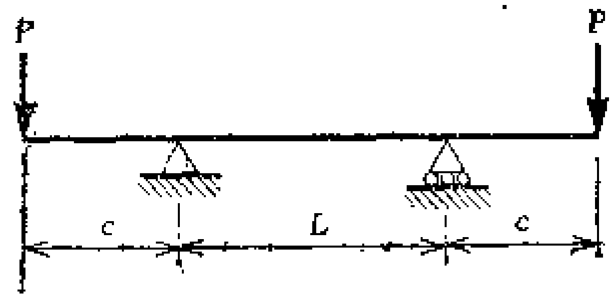
习题 9.5-12

9.6-1　有一两端带有挑臂的梁，承受两个力 P 的作用，如图所示．该梁为矩形横截面，由弹-塑性材料所构成．试导出梁中点处的下列挠度 δ 公式：

$$\frac{\delta}{\delta_y}=\frac{P}{P_y}\qquad\left(0\leqslant\frac{P}{P_y}\leqslant 1\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_y}=\left(3-\frac{2P}{P_y}\right)^{-1/2}\qquad\left(1\leqslant\frac{P}{P_y}\leqslant\frac{3}{2}\right)$$

式中 $\delta_y=P_ycL^2/8EI$，$P_y=M_y/c$． 按比例绘出 P/P_y 与 δ/δ_y 的关系图。



习题 9.6-1

9.6-2　有一长度为 L 的矩形横截面简单梁，其中心处承受集中荷载 P．该梁由弹-塑性材料构成．试导出支承处的下列转角 θ 公式和中央处的下列挠度 δ 公式：

$$\frac{\theta}{\theta_y}=\frac{P_y}{P}\left[3-2\sqrt{3-\frac{2P}{P_y}}\right] \quad \left(1\leqslant\frac{P}{P_y}\leqslant\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_y}=\left(\frac{P_y}{P}\right)^2\left[5-\left(3+\frac{P}{P_y}\right)\sqrt{3-\frac{2P}{P_y}}\right] \quad \left(1\leqslant\frac{P}{P_y}\leqslant\frac{3}{2}\right)$$

式中 $\theta_y=P_yL^2/16\,EI$. $\delta_y=P_yL^3/48\,EI$ $P_y=4\,M_y/L$（见图 9-18 和图 9-19 中这些公式的图形）。

9.6-3　试导出长度为 L 的矩形横截面悬臂梁自由端处的下列转角 θ 表达式和下列挠度 δ 的表达式，假设该梁承受单位长度上强度为 q 的均匀荷载，并假设其材料为弹-塑性者：

$$\frac{\theta}{\theta_y}=\sqrt{\frac{9q_y}{2q}}\left[\arcsin\sqrt{\frac{2q}{3q_y}}-0.4839\right] \quad \left(1\leqslant\frac{q}{q_y}\leqslant\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta_y}=\frac{q_y}{q}\left[3-2\sqrt{3-\frac{2q}{q_y}}\right] \quad \left(1\leqslant\frac{q}{q_y}\leqslant\frac{3}{2}\right)$$

式中 $\theta_y=q_yL^3/6\,EI$，$\delta_y=q_yL^4/8\,EI$，$q_y=2\,M_y/L^2$。还按比例绘制 q/q_y 对 θ/θ_y 和 q/q_y 对 δ/δ_y 的图形。

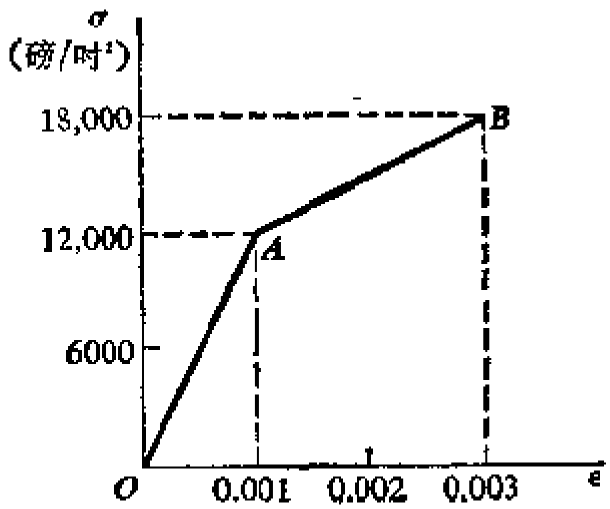
9.7-1　有一矩形横截面梁（$b=3$吋，$h=6$ 吋），由具有表 9-1 中数据所定义的应力-应变曲线的材料所构成。受拉和受压的应力-应变曲线相同．该梁由于产生最大应力为 1075 磅/吋^2 的弯矩作用下而弯曲．试计算其弯矩M值。

表 9-1　习题 9.7-1 的数据

应　力　σ（磅/吋^2）	应　变　ϵ（10^{-6}）
0	0
700	16
800	25
900	42
1000	70
1100	113
1200	183

9.7-2　有一宽度为6吋、高度为12吋的矩形梁，承受弯矩 $M=$ 12,800 呎-磅。梁的材料的受拉弹性模量 $E_1=1\times10^6$ 磅/吋²，受压模量 $E_2=4\times10^6$ 磅/吋²（见图9-25）。(a) 试确定梁的中性轴（见图9-21），(b)确定梁中最大拉应力和最大压应力，(c)计算梁的曲率半径。

9.7-3　有一梁由具有图中所示两根直线 OAB 近似表示的受拉应力-应变图的脆性材料所构成。于 B 点处发生断裂。受压图与受拉图相同，该梁为矩形横截面，宽度为4吋，高度为12吋。试确定此梁的最大抵抗弯矩 M_{max}。



习题 9.7-3

9.7-4　有一矩形横截面梁（宽度为 b，高度为 h），由按下列方程确定受拉的应力-应变图的材料所制成：

$$\sigma=B_1\epsilon-B_2\epsilon^2$$

式中 B_1 和 B_2 均为常数。受压的图与受拉的图相同。假如最大应变为 ϵ_1，试导出梁的抵抗弯矩 M 的公式。

9.7-5　有一根梁，假设其材料的受拉应力-应变规律的形式为 $\sigma=B\epsilon^n$，其中 B 和 n 均为常数($0\leqslant n\leqslant1$)。受压的应力-应变图与受拉的相同。梁的横截面为矩形，其宽度为 b，高度为 h。(a) 试对该梁导出下列弯矩-曲率关系公式：

$$M=\frac{bh^{n+2}Bk^n}{2^{n+1}(n+2)}$$

(b)导出梁中下列最大应力的公式：

$$\sigma_1=\frac{MC}{I}\,\frac{n+2}{3}$$

式中 $c=h/2, I=bh^3/12$。(c)导出离中性轴距离 y 处下列梁中应力公式：

$$\frac{\sigma}{\sigma_1}=\left(\frac{2y}{h}\right)^n$$

绘出表示不同 n 值时梁中应力分布的图式(为了方便,选择 $n=1, 1/2, 1/4, 0$,绘出 σ/σ_1,对 $2y/h$ 的图形)。(d) 研究上面所有结果,并说明 $n=1$ 和 $n=0$ 时特殊情况。

9.7-6 有一矩形梁(宽度为 b,高度为 h),中性轴至底面的应力分布按下式确定：

$$\frac{\sigma}{\sigma_1}=1-\left(1-\frac{2y}{h}\right)^m$$

式中 σ_1 为底面处的最大应力，y 自中性轴往下度量，m为一常数 ($m\geqslant 1$)。中性轴位于梁的一半高度处，梁的上半部应力分布与下半部相同。(a)试求该梁的弯矩 M,(b) 绘出表明对于不同 m 值时梁中应力分布的图式(为了方便,选择 $m=1,2,4,10$ 绘制 σ/σ_1 对于 $2y/h$ 的图形)。

9.7-7 有一长度为 L 的悬臂梁,其自由端处承受荷载 P。该梁的截面为矩形,宽度为b,高度为h。梁的材料的应力-应变曲线由方程$\sigma=B\sqrt{\epsilon}$确定,式中 B 为一常数。受拉和受压的应力-应变曲线相同。试求梁的自由端处的转角 θ 和挠度 δ。

9.8-1 有一矩形横截面梁，由具有屈服应力 σ_y 的弹-塑性材料所构成。该梁承受着等于塑性弯矩 M_p 的正弯矩。然后将此弯矩移去。(a)试绘出表明梁的残余应力的图形，(b) 试问梁顶处的残余应力为多少？(c)试问正位于横截面中点上面的残余应力为多少？(d) 如果这根具有残余应力的梁重新承受正弯矩作用，试问能作用于梁上而使梁仍具有线性弹性性能的弯矩最大值是多少？又问此弯矩与初始加载时的屈服弯矩之比值是多少？

9.8-2 有一正弯矩 M 作用于具有双向对称横截面的梁上,该梁由具有屈服应力 σ_y 的弹-塑性材料所制成。该弯矩 M 介于梁的屈服弯矩 M_y与梁的塑性弯矩 M_p 之间。当移去该弯矩 M 后，发现梁的最顶面纤维中存在等于 $\beta\sigma_y$ 的残余拉应力。(a) 试问该弯矩 M 值是多少？(b)试问数字系数 β 的范围是多少？

第十章　柱

柱的选择往往是结构设计中极为重要的部分，因为柱的破坏通常具有毁坏性的作用．另外，柱的设计要比受弯或受扭杆件的设计困难得多，因为它们的性能是比较复杂的．如果柱的长度与其宽度相比是很长的话，它可能由于屈曲而破坏，亦即最后由于弯曲和横向变位而破坏，而不是由于直接压缩而破坏．屈曲可能是弹性的或非弹性的，随柱的细长度而定．在下面诸节中我们将主要讨论属于弹性的细长柱的性能．

10.1　承受偏心轴向荷载的柱

为了研究柱的性能，我们将从讨论承受偏心轴向荷载 P 的细长柱来开始(图 10-1)．柱简支于端点处，从横截面形心至轴向力作用线量得的偏心距为 e．假设 xy 平面为柱的对称平面，我们观察到：柱将在这同一平面内弯曲．

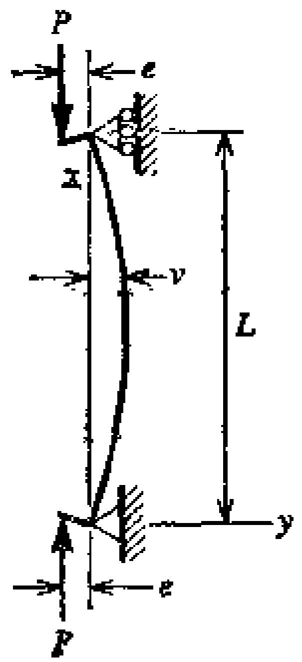


图 10-1　承受偏心作用轴向荷载的柱

柱中离其底端距离 x 处的弯矩为

$$M=P(e+v) \qquad \text{(a)}$$

式中 v 为柱顺 y 方向的侧向挠度．方程(a)中弯矩的正负号按前面确定梁的挠度时(见第 6.1 节)所采用的规则来确定．于是，图 10-1 所示柱的挠度曲线方程成为(见方程 6-9a)：

$$EIv'' = -M = -P(e+v) \tag{b}$$

引进下列符号：

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{10-1}$$

我们可以将方程(b)写成下列形式

$$v'' + k^2 v = -k^2 e \tag{c}$$

此方程为具有常数系数的线性微分方程，它的解由两部分组成：(a)将等号右边代以零所求得的相应齐次方程的解，(b)相应于方程(c)的实际右边的特解。其齐次方程的解有时称为余解，它为

$$v_H = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

式中 C_1 和 C_2 为根据边界条件求算的任意常数。其特解为

$$v_P = -e$$

所以，方程(c)的通解等于 $v_H + v_P$，为

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e \tag{d}$$

它可藉表达式(d)代入方程(c)容易地得到验证。

两个积分常数必须根据杆端处的条件来确定，这些条件是：

在 $x=0$ 和 $x=L$ 处，　$v=0$

将这些边界条件用于方程(d)，我们得

$$C_2 = e \qquad C_1 = \frac{e(1-\cos kL)}{\sin kL} = e\,\mathrm{tg}\,\frac{kL}{2}$$

所以，挠度曲线的方程为

$$v = e\left(\mathrm{tg}\frac{kL}{2}\sin kx + \cos kx - 1\right) \tag{e}$$

知道了偏心距 e 和荷载 P，我们可以根据此方程计算柱的挠度。

柱中央处的挠度可将 $x = L/2$ 代入方程(e)来求出，得

$$\delta = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right) \tag{10-2}$$

我们根据此方程可以看出，作为特殊情况，如果 $P=0$（这意味着 $k=0, \sec kL/2=1$），挠度 δ 为零。如果我们现在选定偏心距 e 的某一值 e_1，我们可以根据方程(10-2)绘出荷载-挠度曲线（P 对 δ）。这种曲线示于图 10-2 中，我们看出，即使其关系是非线性的，但当荷载 P 增加时，挠度 δ 增大。如果选择一个新值 e_2（大于 e_1），那么其挠度相应地要大一些。

根据图 10-2，我们看出：当荷载 P 接近某一临界值时，其挠度无限止地增大。这种临界荷载值以 P_{cr} 表示，藉观察方程 (10-2) 看出，当 $kL/2=\pi/2$ 时公式中的正割项成为无穷大，可以由此求出 P_{cr}。因此，当 $kL=\pi$ 时，其挠度 δ 变为无穷大，从此得出下列 P 值（见图 10-1）：

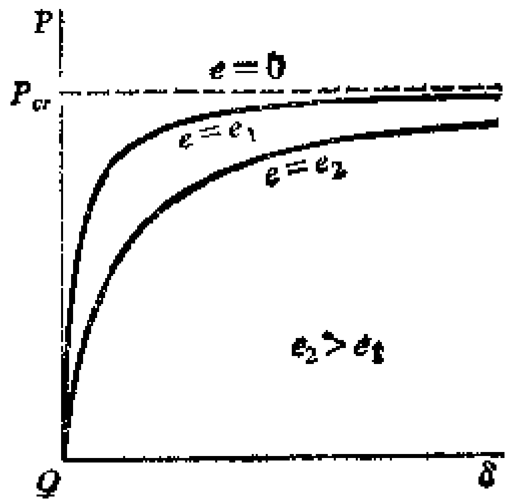


图 10-2 图 10-1 所示的柱的荷载-挠度图

$$P=P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{10-3}$$

藉讨论偏心距为零的情况可以得到临界荷载的相同结果。如果 $e=0$，对于所有小于 $\pi/2$ 的 $kL/2$ 值，根据方程(10-2)所得的挠度 δ 均为零，因为在所有这种情况中，该方程右边第二项为有限值。因而，当 P 小于 P_{cr} 时，其挠度保持为零。但是当 $P=P_{cr}$ 和 $kL/2=\pi/2$ 时，用方程 (10-2) 不能确定其挠度 δ，而 δ 可以为任意值。这种情况在荷载-挠度图上（图 10-2）用了标明 $e=0$ 的水平线来表示。

必须记住，在讨论图 10-2 中所示曲线时，方程 (10-2) 的推导是建立在小挠度和线性弹性性能的假设之上的。所以，只是在假设的意义上来说，δ 才可以成为大挠度。如果挠度

不小，则必须应用曲率的精确表达式，如前面第 6.1 和 6.12 节所讨论那样。此外，在真实柱中，当挠度变为很大之前，可能已超过比例极限。

我们根据图 10-2 可以得到一个重要的观察结果，荷载 P 与它所产生的挠度之间不成比例。因而，即使挠度保持很小，而且材料保持为线性弹性者，但迭加原理是不能应用的。如果我们将图 10-1 中所示荷载视为等效于端点中心作用荷载 P 加上力偶 Pe，此结论的理由就可以容易理解。如果力偶 Pe 单独作用，则将产生按梁的通常弯曲方式(见第六章)所能求得的挠度。在这种情况下，梁的很小挠度的存在不会改变荷载的作用，梁中的弯矩可以不考虑梁的挠度而计算出来。然而，当柱上还有一个轴向荷载时，力偶 Pe 所产生的挠度使轴向力除了有压缩作用外，还附有弯曲作用。轴向力的这种弯曲作用将产生附加挠度，该挠度反过来对弯矩有影响。因而，其弯矩不与挠度相联系是不能求出来的，轴向荷载与挠度之间存在着非线性关系[1]。

如果图 10-1 中所示作用于柱上的轴向力与其临界荷载相比非常小时(譬如小于临界荷载的百分之 2)，那么，$kL/2$ 这个量将相当小，我们可以对正割函数采用其级数展开式中的前两项来表示：

$$\sec\frac{kL}{2}\approx 1+\frac{k^2L^2}{8}$$

将此表达式代入方程(10-2)，我们得出

$$\delta=\frac{k^2L^2e}{8}=\frac{PeL^2}{8EI} \tag{f}$$

此结果与两端承受力偶 Pe 作用下简支梁中央处的挠度相同（见第 6.5 节，例题 1)。所以，我们可以得出结论，只要轴向力与 P_{cr} 相比为很小

1) 关于梁承受横向荷载与轴向荷载联合作用的较为广泛的讨论将在《高等材料力学》中给予介绍。

时，如在短柱(见第 5.10 节)中，挠度对于弯矩值的影响可以略去不计，而且可以应用普通梁的挠度公式(见第六章和附录D)。

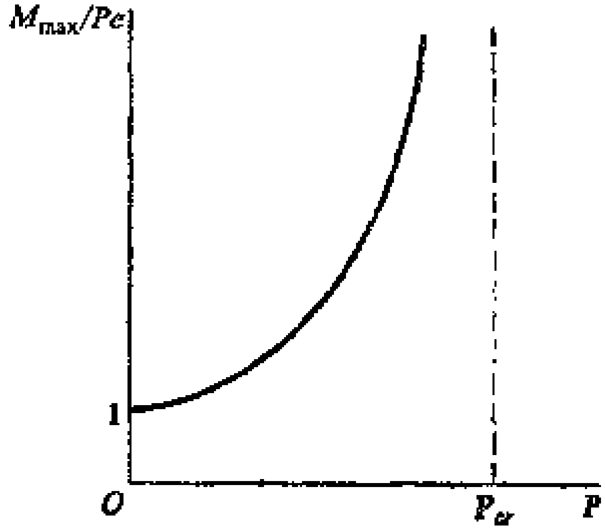


图 10-3　图 10-1 中所示柱的最大弯矩曲线图

图 10-1 中偏心加载柱的最大弯矩发生于柱的中央处，且由下式求得：

$$M_{max}=P(e+\delta)=Pe\sec\frac{kL}{2} \tag{10-4}$$

此方程的图解示于图 10-3 中．我们看出：对于很小的 P 值，其最大弯矩为 Pe，它为略去挠度影响时柱中的弯矩。当 P 增大时，弯矩非线性地增大，当 P 接近它的临界值 π^2EI/L^2时，弯矩成为非常大。柱中的最大压应力发生于凹侧，它为

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A}+\frac{M_{max}}{S}=\frac{P}{A}+\frac{Pe}{S}\sec\frac{kL}{2} \tag{10-5}$$

式中 S 代表截面模量．此方程将在第 10.4 节中作较详细的讨论．

在上述整个讨论中，已假定柱的弯曲发生于对称平面内(图 10-1 中的 xy 平面)．如果柱具有两个对称平面，而偏心距 e 不在横截面的任何一根主轴方向上，则需要将弯曲力偶

Pe 分解成两个分力偶，每一个分力偶作用于柱的一个对称平面内．在这两个对称平面中每一平面内的挠度可按上面所讨论的方式进行研究．

10.2 柱的临界荷载

在上节中已指出：当轴向力接近临界值时，偏心受压柱的挠度增大得很快．当 P 等于 P_{cr} 时，其挠度公式和弯矩公式(方程 10-2 和方程 10-4)得出无穷大的值．对于简支柱，我们求出 $P_{cr}=\pi^2EI/L^2$，该值仅与柱的尺寸和材料的弹性模量有关．只要柱保持弹性，我们就可以认为临界荷载为柱的极限荷载，因为当接近此荷载时柱的挠度变成非常大．在实际设计中，引进合理的安全系数，其采用的容许荷载比临界荷载小得多．

许多普通尺寸的柱在到达临界荷载之前，其应力将超过比例极限．这样的柱在低于弹性临界荷载的荷载作用下产生

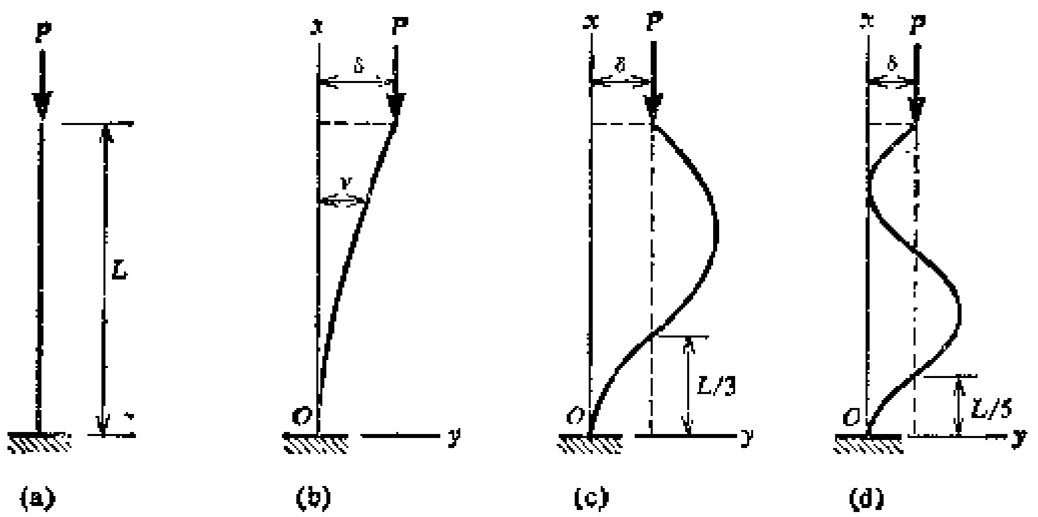


图 10-4 根部固定顶端自由的理想细长柱：(a) 发生屈曲之前；(b) $n=1$ 的屈曲型形状；(c) $n=3$ 的屈曲型形状；(d) $n=5$ 的屈曲型形状

非弹性屈曲．然而，本章内将只涉及弹性屈曲[1]．

柱的临界荷载可藉考虑理想柱的性能以直接方式求算出来．理想柱假设是完全平直的，且因中心作用荷载（通过横截面形心作用的荷载）而压缩．让我们首先讨论一根长度为 L 的细长理想柱，柱的下端固定住，其上端自由（图 10-4 a）．柱的材料假设是线性弹性者．如果轴向荷载 P 小于临界值，该杆保持为直的，而且仅有轴向压缩．这种平衡的直的形式是稳定的，也就是：如果作用一横向荷载，使之产生很小的挠度，当横向力移去后，挠度将消失，而杆将回到其直的形式．然而，当 P 逐渐增大，在 P 等于 P_{cr} 时，则到达中性平衡情况．在此荷载下，柱在理论上可能有任一很小的挠度值，而且很小的横向力将产生横向力移去后并不消失的挠度．在更大荷载值时，柱是不稳定的，并将毁坏．这种不稳定现象称为屈曲，我们可认为在临界荷载下，柱发生屈曲，或变为不稳定．该临界荷载也可定义为足以保持柱处于微小弯曲形式的轴向力（图 10-4 b）．

柱的临界荷载可应用挠度曲线的微分方程来求得．对于图 10-4 b 中所示的柱，离其底面距离 x 处的弯矩为：

$$M=-P(\delta-v)$$

式中 δ 为自由端处的挠度，于是其微分方程为：

$$EIv''=-M=P(\delta-v) \tag{a}$$

因为柱的顶端可以顺任何方向自由挠曲，该柱的屈曲将发生于弯曲刚度 EI 为最小的平面内，亦即，弯曲将绕具有较小惯性矩的主轴而发生．我们假设屈曲发生的平面为 xy 平面，而且与平面为柱的对称平面．应用上节中所引进的符号 $k^2=$

1）非弹性屈曲在《高等材料力学》中讨论，也在参考文献 10-1 和 10-2 中讨论．

P/EI，我们可将方程(a)写成下面形式：

$$v''+k^2v=k^2\delta$$

此方程的通解为

$$v=C_1\sin kx+C_2\cos kx+\delta \qquad \text{(b)}$$

为了求出常数 C_1 和 C_2，我们应用柱的嵌固端处的边界条件：

$$\text{在 } x=0 \text{ 处，}\quad v=v'=0$$

方程(b)的微分得出：

$$v'=C_1k\cos kx-C_2k\sin kx \qquad \text{(c)}$$

现在将边界条件代入方程(b)和(c)，我们求出：

$$C_1=0,\quad C_2=-\delta$$

其挠度曲线为

$$v=\delta(1-\cos kx) \qquad \text{(d)}$$

挠度 δ 在此方程中仍保持不定。

为了求得较多的有关挠度的资料，我们应用柱上端处的下列条件：

$$\text{在 } x=L \text{ 处，}\quad v=\delta$$

此条件得出(见方程 d)：

$$\delta=\cos kL=0 \qquad \text{(e)}$$

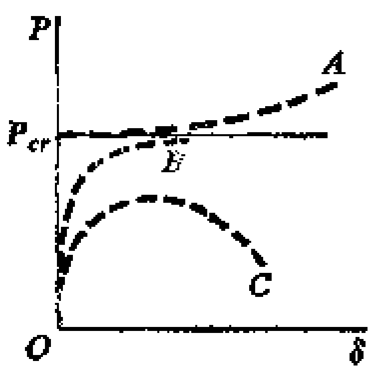


图 10-5　柱的荷载-挠度图

根据它，我们得出结论，或者 $\delta=0$ 或者 $\cos kL=0$。如果 $\delta=0$，杆无挠度，因此没有屈曲(图 10-4 a)。在这样情况下，kL这个量可以具有任何值，而方程(e)仍将满足。所以荷载 P 也可以具有任何值。此结果用图 10-5 中所示荷载-挠度图的竖直轴来表示

另一种可能性是 $\cos kL=0$，在这种情况下，我们根据方

程(e)看出δ可以具有任何微小值. $\cos kL=0$这个条件需要：

$$kL=\frac{n\pi}{2} \tag{f}$$

式中$n=1,3,5\cdots$. 为了得到满足方程(f)的P之最小值，我们取$n=1$，得到$kL=\pi/2$，根据它得到：

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{4L^2} \tag{10-6}$$

此方程给出图10-4a所示柱的最小临界值.亦即，它给出能保持柱为微小弯曲形状的最小轴向力值. 为了确定挠度曲线的形状，我们观察出$k=\dfrac{\pi}{2L}$，因此方程(d)中的kx量自0变至$\pi/2$. 所以挠度曲线的形状如图10-4b所示. 用这个解，挠度δ的值仍是不定的，此种情况藉荷载-挠度图上$P=P_{cr}$处的水平线来表示. 自然，我们必须再次记住：在这种理想化分析中，假设挠度是很小的.

理想弹性柱的临界荷载P_{cr}通常称为欧拉荷载，因为著名数学家莱昂哈德·欧拉(1707—1783)是第一个研究细长柱的屈曲和确定其临界荷载的人(参考文献1-1至1-3以及10-1至10-6).

根据方程(10-6)，我们看出柱的临界荷载与弯曲刚度EI成正比，而与其长度的平方成反比. 还可以注意到：临界荷载与材料的受压强度无关. 因而，细长钢柱的临界荷载不会因为应用较高屈服应力的钢材而增大. 然而，临界荷载可以藉增大其横截面的惯性矩I而增大. 这种结果可藉将材料尽可能远离横截面形心分布来实现. 因此，管状杆件对于柱来说比具有相同横截面积的实心杆要经济一些. 藉缩小这种截面壁的厚度而增大其横向尺寸，可使柱的稳定性增大，因为这样I就比较大. 然而，壁的厚度有一下限，低于此下限，壁本

身就变成不稳定. 这样,不是按柱的整体产生屈曲,而是壁身以起皱或皱折形式使壁身产生局部屈曲. 这种类型的屈曲称为局部屈曲,需要较详细的研究(参考文献 10-1).

现在回到方程(f),我们看出:藉采用较高的指数n值,我们可以得到无穷多个临界荷载. 因而,对于图 10-4 a 中所绘的柱,一般地

$$P_{cr}=\frac{n^2\pi^2EI}{4L^2} \tag{g}$$

相应的挠度曲线方程为(见方程 d):

$$v=\delta\left(1-\cos\frac{n\pi x}{2L}\right) \tag{h}$$

此方程表明:当n增大时,挠度曲线具有愈来愈多个波数. 当$n=1$时,其曲线为二分之一个波,如图 10-4 b 所示. 对第二种情况($n=3$),我们得:

$$P_{cr}=\frac{9\pi^2EI}{4L^2} \qquad v=\delta\left(1-\cos\frac{3\pi x}{2L}\right)$$

对$n=5$,我们得

$$P_{cr}=\frac{25\pi^2EI}{4L^2} \qquad v=\delta\left(1-\cos\frac{5\pi x}{2L}\right)$$

这两种情况的挠度曲线分别示于图 10-4 c 和 d 中. 虽然它们在理论上代表柱的可能屈曲形式,但是它们没有实际意义,因为当荷载P到达方程(10-6)所给的值时柱将按第一种形式而屈曲(图 10-4 b).

带有简支端的柱和带有固定端的柱,其临界屈曲荷载可以根据上述情况的解来求得. 例如,根据对称性显见具有铰端的柱的挠度曲线(图 10-6 a)处于第一种屈曲形式时,其中点处会有竖向切线. 因此,柱的各一半处于与图 10-4 b 中的杆之相同情况,用$L/2$代替L,根据方程(10-6)求得其临界荷载:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{L^2} \tag{10-7}$$

这种相同的结果在前面第 10.1 节中已经导出过（见方程 10-3）．在实践中假设柱为简支端者要比任何其它形式更为经常，它被称为棱柱形杆屈曲的基本情况．

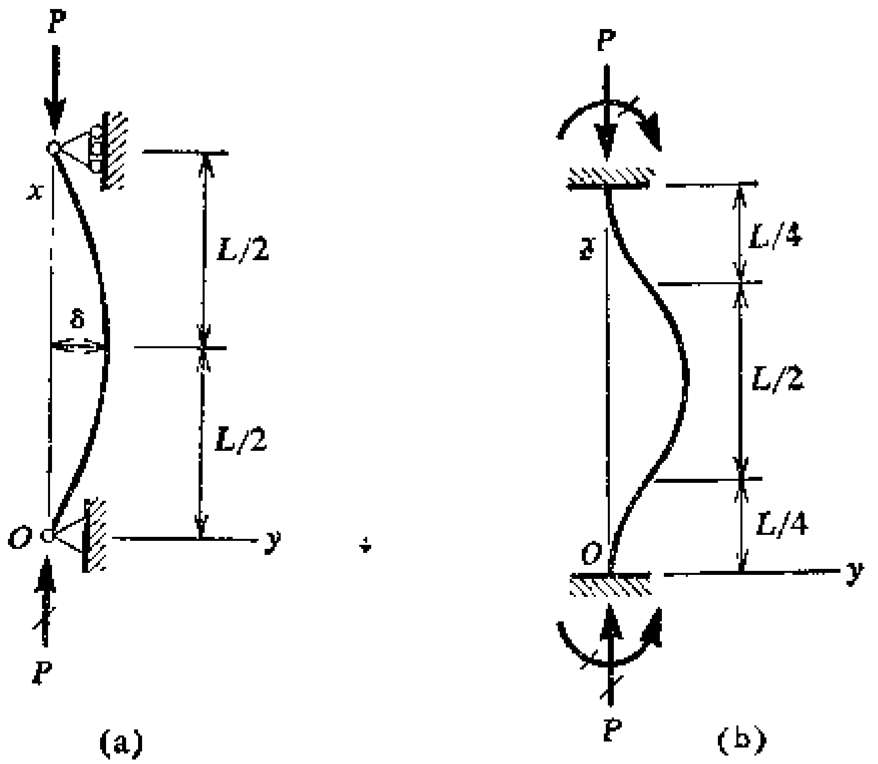


图 10-6 (a) 铰接端的柱；(b) 固接端的柱

如果柱的两端固定住（图 10-6 b）、在屈曲过程中，其支承处产生反弯矩．对于第一种屈曲形式的挠度曲线为余弦曲线，离端点 $L/4$ 的距离处存在反弯点．柱的每四分之一长度表现为一悬臂柱（图 10-4 b）．所以用 $L/4$ 代替方程（10-6）中的 L 来求得其临界荷载为：

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2 EI}{L^2} \tag{10-8}$$

对于其它支承条件下和其它加载条件下柱的临界屈曲荷载，在本章末尾的例题中作了推导，在《高等材料力学》中也作了推导．

柱的大挠度　在挠度曲线方程(方程d)推导中，最大挠度δ是不定的．所以我们得出结论，在$P=P_{cr}$时，柱可以有任意很小的挠度，用图10-5中的水平线代表其情况．此理论限于很小的挠度，因为我们应用了柱的曲率近似表达式v''而没有用其精确的表达式(方程6-10)．对于某些情况的精确微分方程的解已经求得(参考文献10-1)，并表明实际上不存在柱的挠度的不确定性．而我们发现理想弹性柱的荷载-挠度图形遵循图10-5中标以A的虚线．在产生很大挠度后，如果柱中的应力超过其比例极限，那么荷载-挠度曲线将自曲线A向下降低．

在弹性柱的实验中，其荷载-挠度图形通常相似于图10-5中的曲线B(亦见图10-2)．由于加载的不准确和柱构造的不准确，在低于P_{cr}的荷载时就出现横向挠度，而当接近临界荷载时，此横向挠度变得较大。杆构造得愈精确和加载愈准确，则曲线B愈接近于理论结果(两根直线，其中一根竖直，一根水平)．如果在低于P_{cr}的荷载下柱中的应力已超出比例极限，其荷载-挠度图形将相似于曲线C．此曲线上的最大点代表柱的非弹性屈曲的理论屈曲荷载，此荷载小于同一柱的欧拉荷载．

例题　有一长度为L的细长柱，其下端固定住，上端简单地支承着(图10-7)．试导出此柱最低临界荷载的表达式，并确定其相应屈曲型的形状．

当柱屈曲时，柱的上端产生水平反力R(图10-7)．固定端处，产生水平力和力偶．根据静力平衡，我们看出：两个力大小相等但方向相反，而且力偶M等于RL．离底面距离x处的弯矩为：

$$M=Pv-R(L-x)$$

挠度曲线的微分方程为

$$EIv''=-Pv+R(L-x)$$

此方程的通解为

$$v=C_1\sin kx+C_2\cos kx+R(L-x)/P \quad \text{(i)}$$

式中 $k^2=P/EI$。

为了确定常数 C_1 和 C_2 以及未知反力 R，我们有端点处的下列三个条件：

在 $x=0$ 处，$v=v'=0$

在 $x=L$ 处，$v=0$

将这些条件用于方程式(i)，得出

$$C_2+RL/P=0 \qquad C_1k-R/P=0$$

$$C_1\mathrm{tg}kL+C_2=0 \quad \text{(j)}$$

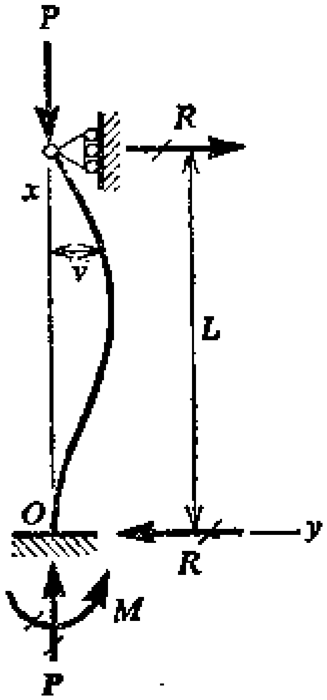


图 10-7 例题．根部固定顶端铰接的柱

取 $C_1=C_2=R=0$，所有这些方程都得到满足，在此情况中，挠度为零，我们得到直的、无屈曲的平衡形式。为了使屈曲的平衡形式成为可能，我们需要方程(j)的非平凡解。我们可以观察出方程(j)为带有未知数 C_1、C_2 和 R 的齐次方程，仅当诸系数的行列式等于零时，这样的方程组才具有非平凡解。从而，我们得到下列**屈曲方程**：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & L/P \\ k & 0 & -1/P \\ \mathrm{tg}kL & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

倘展开该行列式，得出，

$$kL=\mathrm{tg}kL \quad \text{(k)}$$

此超越方程确定临界荷载，kL 满足此方程的最小非零值为 $kL=4.493$，它可藉试凑求得。其相应临界荷载则为：

$$P_{cr}=(kL)^2\frac{EI}{L^2}=\frac{20.19\,EI}{L^2} \quad (10\text{-}9)$$

它介于铰接端柱和固定端柱的临界荷载值之间(见方程 10-7 和 10-8)

现在我们可以回到方程(i)，求出以 R 表示的 C_1 和 C_2：

$$C_1=\frac{R}{kP} \qquad C_2=-\frac{RL}{P}$$

代入方程(i)，得到挠度曲线的方程：

$$v=\frac{R}{Pk}\left[\sin kx-kL\cos kx+kL\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] \qquad (l)$$

此方程中的 P 值和 k 值根据上段均成已知。方括弧中的诸项代表屈曲柱挠度型的形状，但其挠度的大小仍是不定，因为 R 是任意的。

10.3 柱中的应力

中心加载柱内的平均压应力藉横截面积去除轴向力来求得。当轴向力等于临界荷载时，以这种方式所得的应力称为**临界应力** σ_{cr}。因而，对于屈曲的基本情况(图 10-6 a)，其临界荷载藉方程(10-7)求得，而应力为：

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2EI}{AL^2}=\frac{\pi^2E}{(L/r)^2} \qquad (10\text{-}10)$$

在此式中我们用到这样的符号：

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}} \qquad (a)$$

它为横截面的最小迴转半径。方程 (10-10) 中分母内所出现的比值 L/r 称为柱的**长细比**。我们可以注意到，临界应力与此比值的平方成反比。自然，应力 σ_{cr} 必须保持低于材料的比例极限，以使方程(10-10)能够成立。

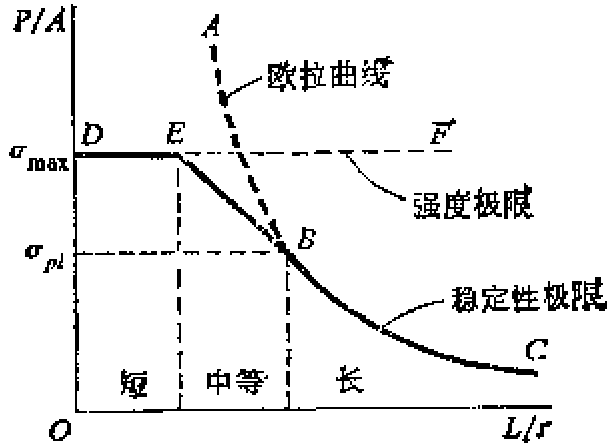


图 10-8 轴向压应力 P/A 与长细比 L/r 的关系图

现在可以绘制出柱中压应力对长细比的图解（见图10-8）．曲线 ABC 是根据方程(10-10)绘制的，它被称为欧拉曲线。实际上，此曲线仅在 BC 范围内能够成立，在此范围内 σ_{cr} 小于比例根限 σ_{pl}。L/r 的限制值（超过此值欧拉柱公式将适用)可令方程(10-10)中 $\sigma_{cr}=\sigma_{pL}$，对 L/r 求解求出来．以结构钢为例，假设 $\sigma_{pl}=36$ 千磅/吋^2 和 $E=30,000$ 千磅/吋^2，我们发现图 10-8 中相应于 B 点处的 L/r 值近似地为91。因而，对于$L/r<91$ 的简支理想钢柱，在屈曲发生之前其平均压应力已到达比例极限，因而，临界荷载的欧拉公式不适用于这种情况，并得出过高的压应力值．如果 $L/r>91$，柱将由于弹性屈曲而失败，欧拉公式可以应用。

图 10-8 中的曲线 BC 表明：当长细比很大时，临界应力变得非常小；因此，非常细长的柱在低压应力时发生屈曲．这种情况不能藉应用较高强度的材料来改善，只有藉增大迴转半径或藉应用较高弹性模量的材料来提高临界应力．

当柱的长细比很小时，我们可以预料柱的破坏是由于材料本身破坏．这种破坏可采取材料压碎的形式，如材料为混凝土时将发生这种形式的破坏；或者以材料屈服的形式而破坏，如结构钢中所发生的破坏．在这些情况下，可以确立某个最大压应力 P/A 作为材料强度的极限，从而可以确定其极限荷载．此极限在图 10-8 中用通过最大应力 σ_{max} 所绘的水平线 DEF 来表示，它代表柱的强度极限。

在短柱和长柱范围之间，有一中间长细比区段，对于控制弹性稳定太小，而对于单独控制强度又太大，这种中间长度的柱非弹性地屈曲．对于实际应用，往往绘一直线 EB 就足可以了(图 10-8)，并考虑它代表中间长度柱的临界应力．以这种方式，我们得到折线 $DEBC$，它可用作任何长度的柱的设计基础．另一种方式，可以采用联结 D 点和 B 点的光滑

曲线(见第 10.6 节)。

根据图 10-8 所示一类图所得的应力 P/A 必须被看作柱的最大应力 σ_{max}. 在此应力时，柱或因材料直接破坏而破坏，或因屈曲而破坏，这要随长细比而定. 压缩下容许资用应力 σ_w 必须取为 σ_{max}/n，这里 n 为安全系数. 对于 n 值的选择要根据荷载 P 不可预见或偶然增大的可能性、荷载中心作用时的可能误差以及柱中初弯曲的可能性来确定. 当柱较长时，柱中的缺陷往往增加，所以，引进随长细比的增大而变的安全系数是合理的. 结构物工作的安全系数的典型值介于 1.5 至 3 之范围内. 一些资用应力的具体公式列于后面第10.6 节中.

柱的有效长度　　当绘制图 10-8 中所示的欧拉曲线时，我们仅考虑屈曲的基本情况(方程 10-10). 然而，藉引进有效长度(或等效长度)的概念，可使该曲线适用于其它端点条件的情况. 将悬臂柱的临界荷载（见方程 10-6）与端点铰接柱的临界荷载（方程 10-7）相比较，我们看出后一种情况的公式也可以用于悬臂梁，只要用等于 2 L 的有效长度去代替 L，亦即采用悬臂柱长度的两倍去代替 L. 因而，我们可以把临界应力的方程(10-10)写成下面形式来使它普遍化：

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \tag{10-11}$$

式中 KL 为有效长度. K 这个量称为有效长度系数. 对于悬臂柱等于 2，对于两端固定的柱为 0.5（见方程 10-8），对于一端固定另一端铰接的柱为 0.70（见方程 10-9）. 对于端点铰接的柱为 1. 一般地，方程（10-11）可以用于任何端点条件的柱，只要知道其有效长度系数.

10.4 柱的正割公式

当简支柱由于偏心作用的轴向力而压缩时（图 10-1），柱中最大压应力(见方程 10-5)为：

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A}+\frac{Pe}{S}\sec\frac{kL}{2} \tag{a}$$

此方程右边第一项代表直接压缩影响，第二项代表柱的弯曲影响．回忆截面模量 $S=I/c$，其中 c 为中性轴离柱凹面一侧最外纤维的距离，并引进迴转半径的符号 $r=\sqrt{I/A}$，我们可以用下面形式来表达方程(a)：

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A}\left(1+\frac{ec}{r^2}\sec\frac{kL}{2}\right)$$

然后，用$\sqrt{P/EI}$代替 k，我们得到

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A}\left[1+\frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \tag{10-12}$$

此方程称为偏心荷载柱的正割公式．它所得出的柱中最大应力为平均压应力 P/A、偏心距比率 ec/r^2 和长细比 L/r 的函数．

如果我们给最大应力 σ_{max} 一个极限，于是我们可以根据方程(10-12)计算相应的平均压应力 P/A．例如对于结构钢，我们可以取屈服应力 σ_y 作为极限应力．方程(10-12)则可重新排列如下：

$$\frac{P_y}{A}=\frac{\sigma_y}{1+\frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P_y}{EA}}\right)} \tag{10-13}$$

式中 P_y 是使柱中最严重受力纤维产生屈服所需要的力．对于任一选择的偏心距比率，我们可藉试凑求解方程(10-13)，

绘出表示 P_y/A 为长细比的函数之曲线。对于 $\sigma_y=36,000$ 磅/吋^2 和 $E=30,000$ 千磅/吋^2 的几根这种曲线示于图 10-9 中。在得到 P_y 之后，柱上的容许荷载 P_w 可藉安全系数去除 P_y 来求得。

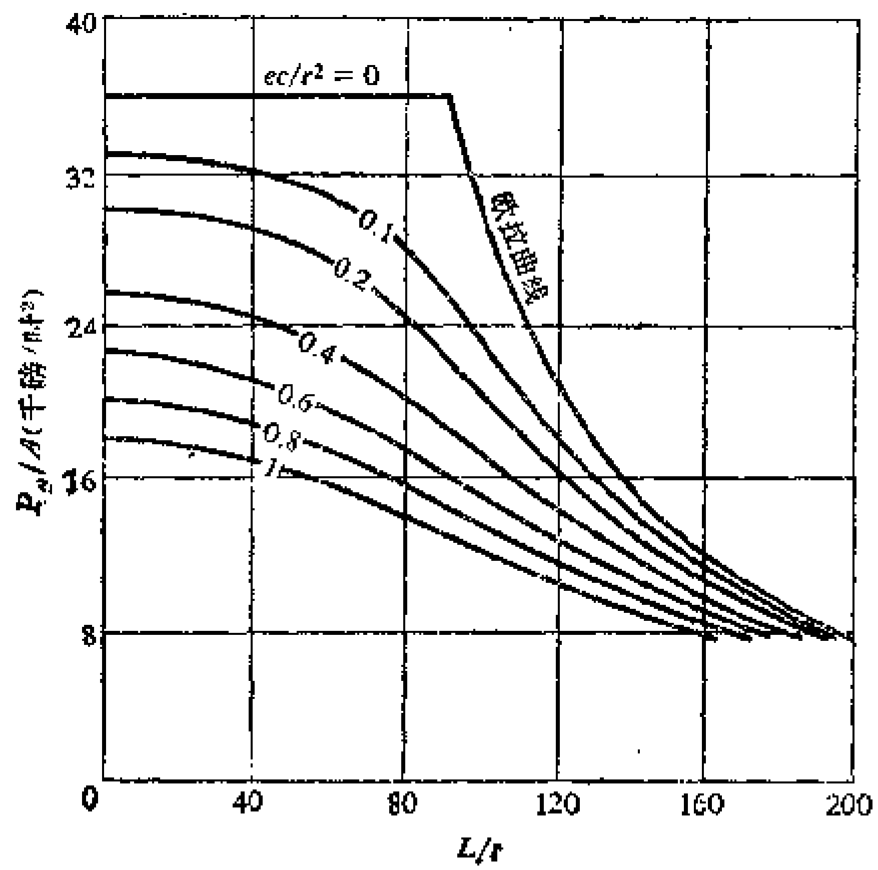


图 10-9 当 $\sigma_y=36,000$ 磅/吋^2 和 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2 时方程(10-13)的曲线图

例题 有一铰端钢柱，其截面为W 14×103(图 10-10 a)，长度为 25 呎。它承受中心作用荷载 $P_1=350$ 千磅和位于 2-2 轴上距 1-1 轴为 16 吋的偏心作用荷载 $P_2=50$ 千磅(见图 10-10 b)。(a)应用正割公式计算柱中最大压应力。(b)如果钢的屈服应力 $\sigma_y=40,000$ 磅/吋^2，试问柱抵抗初始屈服的安全系数是多少？

(a) 如图 10-10 b 所示作用着的 P_1 和 P_2 两个荷载，它们静力等效于偏心 $e=2.00$ 吋单个荷载 $P=400$ 千磅的作用(见图 10-10 c)。应用附录 C 中所列的特性表，我们求出

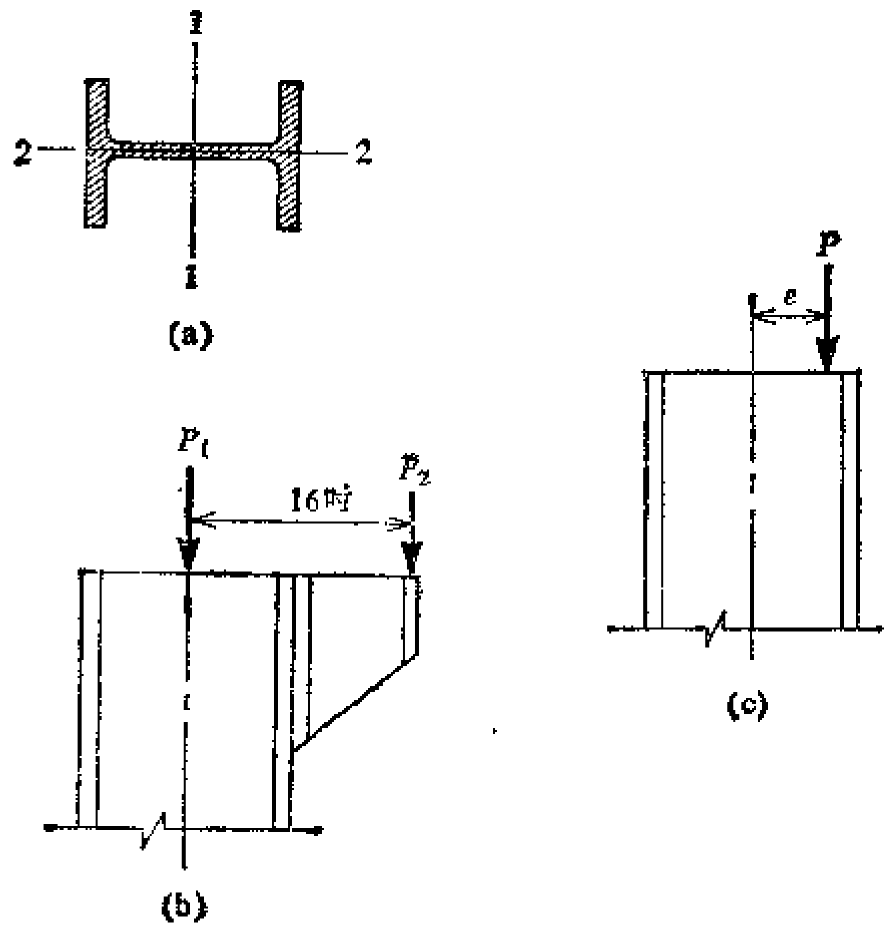


图 10-10 例题

$$\frac{P}{A}=\frac{400,000}{30.3}=13,200\text{ 磅/吋}^2 \quad \frac{L}{r}=\frac{25(12)}{6.21}=48.3$$

$$\frac{ec}{r^2}=\frac{eA}{S}=\frac{(2.00)(30.3)}{164}=0.370$$

代入方程(10-12)，并应用 $E=30\times10^6$磅/吋²，我们得出

$$\sigma_{max}=18,800\text{ 磅/吋}^2$$

(b) 最早使柱产生屈服且以偏心 e 作用的荷载 P_y，可藉 σ_y 为 40,000 磅/吋²代入方程(10-13)，然后对 P_y 用试凑解出．其结果 $P_y=$ 812 千磅．所以，我们得出抵抗屈服的安全系数为

$$n=\frac{P_y}{P}=\frac{812}{400}=2.03$$

10.5 柱的缺陷

在中心作用压缩荷载下,柱的初始曲率、荷载作用时不可避免的偏心、不完全的端点条件、材料的不均匀等缺陷对于柱的性能是有重要影响的. 这种缺陷的程度对于这一根柱与另一根柱有很大的不同. 在柱试验结果中引起很大的离散. 一般地,缺陷的存在,结果使柱既承受弯曲又直接压缩. 所以,看来得出下面结论是符合逻辑的:有缺陷的中心加载柱的性能与承受具有偏心距 e 的力所作用的理想柱相似. 这种推理提出藉选择适当的偏心距比率 ec/r^2 考虑缺陷的影响使正割公式可以用于想象上直的中心加载柱的设计. 自然,ec/r^2 的值必须建立在试验结果之上;尽管如此,按这种方式应用正割公式,为考虑缺陷影响提供了合理的方法,这样比仅增大安全系数要好.

对于结构钢的销接端柱, 通常所用的偏心率 $ec/r^2=0.25$. 将此值用于方程(10-13), 在知道屈服应力 σ_y 和柱的尺寸之后, 我们可以计算使柱的外面纤维产生初始屈服的荷载 P_y. 然后柱上的容许荷载可藉安全系数去除 P_y 来求出(例如,我们可合理地采用 $n=2$).

当采用刚才叙述的方式应用正割公式时, 我们假设不可避免的缺陷可以用荷载的偏心距来代表. 另一种处理问题的方法是假设各项不准确性等效于柱的初始弯曲. 对于销接端柱,我们可以假设柱的初始挠度 v_0 为具有最大挠度等于 a 的正弦曲线之半波:

$$v_0=a\sin\frac{\pi x}{L} \tag{a}$$

于是,当轴向荷载 P 为中心作用时,柱中的弯矩成为:

$$M=P(v_0+v)$$

式中 v 为由于弯曲使柱产生的附加挠度. 这个 M 的表达式可以代入挠度曲线的微分方程,然后它可按第 10.1 节所述的方式去求解. 柱中央处总挠度的所得表达式为:

$$\delta_{\max}=\frac{a}{1-\alpha} \tag{10-14}$$

式中 α 为轴向荷载与柱的临界荷载之比率:

$$\alpha=\frac{P}{P_{cr}}=\frac{PL^2}{\pi^2 EI} \tag{10-15}$$

方程 (10-14) 表明: 轴向荷载的效应是引起柱的初始挠度按系数 $1/(1-\alpha)$ 来增大. 由于 α 小于 1,此系数总是大于 1.

柱中的最大弯矩为:

$$M_{\max}=P\delta_{\max}=\frac{Pa}{1-\alpha}$$

最大压应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{P}{A}+\frac{Pac}{(1-\alpha)I}=\frac{P}{A}\left[1+\frac{ac}{r^2(1-\alpha)}\right] \tag{10-16}$$

如果我们象对正割公式那样来进行(见第 10.4 节),且规定最大应力 $\sigma_{\max}$ 的极限,那么,我们可以根据方程(10-16)计算相应的 P/A 值.

为了用图解表示方程(10-16),让我们再次假设材料为具有屈服应力 σ_y 的结构钢. 此外让我们假设柱的横截面为宽翼缘截面或 I 形截面, 绕其较强的主轴弯曲. 于是在大多数实际应用中, 我们可以将横截面理想地看成由位于翼缘处的两个相等面积所构成. 这种理想的宽翼缘截面的惯性矩和迴转半径早已得到,为:

$$I=Ac^2 \qquad r=c \tag{b}$$

式中 c 为中性轴至翼缘的距离, A 为总横截面积. 将方程(b)的 I 和 r 代入方程(10-16),还令 $\sigma_{\max}=\sigma_y$, 我们得到下列方程:

$$\frac{P_y}{A}=\frac{\sigma_y\left[\pi^2 E-\frac{P_y}{A}\frac{L^2}{r^2}\right]}{\pi^2 E\left(1+\frac{L}{r}\frac{a}{L}\right)-\frac{P_y}{A}\frac{L^2}{r^2}} \tag{10-17}$$

象前面一样，式中 P_y为使柱的最外缘纤维产生屈服所需要的轴向荷载，对于 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2，$\sigma_y=36,000$ 磅/吋^{2}且 a/L 值等于 1/1000，1/700 和 1/400 的结构钢，此方程的图解示于图 10-11 中．对于非常短的柱，三条曲线都得出 $P_y/A=36,000$ 磅/吋^2．对于非常长细的柱，按诸曲线所得的值均接近按欧拉曲线所得的值．应用诸曲线中的一根曲线，以适当的安全系数(譬如 $n=2$)去除按曲线所得的 P_y/A 值，就得到平均压应力的容许值．这种方法的优点是可以应用不变的安全系数．因为随柱的长度 L 而增加的不准确性早已藉假设初

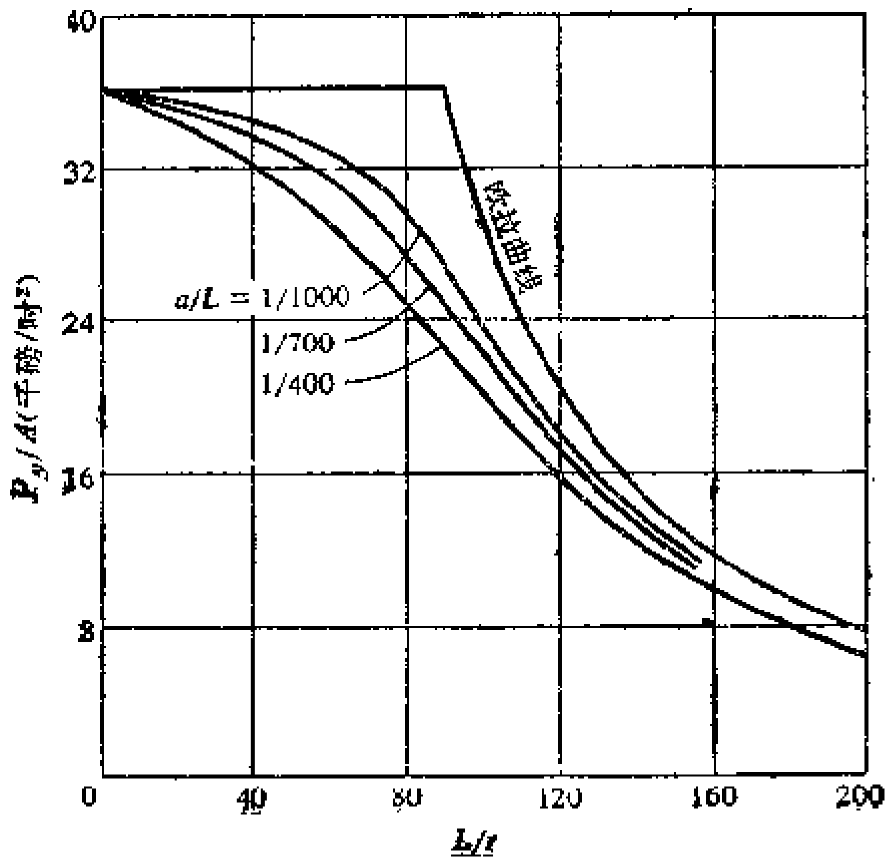


图 10-11　当 $\sigma_y=36,000$ 磅/吋^{2}和 $E=30\times10^6$ 磅/吋^{2}时，理想宽翼缘截面的方程(10-17)之曲线图

始挠度与长度成比例而得到了考虑。然而初始挠度的大小不太好确定，而与实验数据有关。通常采用 L/a 的值介于 400 和 1000 之间，如图中曲线所选定的那样(见参考文献 10-1 和 10-7 中有关缺陷效应的附加讨论)。

10.6 柱的设计公式

上节所述关于预测柱的承载能力之方法是基于理论考虑之上的。在应用它们时仍然存在某些不定的事情，譬如，安全系数的选择（多半随 L/r 而变）以及假设的不准确和偏心距合理值的选择。仅当有实际柱的试验结果可以利用时，这些量才能合理地选择出来。根据这样的试验，我们可以选择安全系数，从而得到柱中平均压应力的容许值。于是这些容许应力可用经验公式来表达，这些公式通常给出 σ_w（等于 P_w/A)为长细比 L/r 的函数。经验设计公式的应用，倘仅在这些公式所确立的范围内而且在此范围内有足够实验数据，则是完全合理的。

对于中心加载的结构钢之钢柱设计，柱研究委员会(CRC) 根据下面考虑提出了柱的公式（参考文献 10-8)。当 L/r 很大时，最大应力 σ_{max}（等于横截面积去除假设的极限荷载或破坏荷载)以临界荷载的欧拉公式为基础。所以，我们得到：

$$\sigma_{max}=\frac{\pi^2E}{(KL/r)^2} \tag{a}$$

式中有效长度 KL 是为了用来使该公式对各种端点条件的柱都能够成立。方程 (a) 仅适用于柱中实际应力低于比例极限的情况，对于结构钢，该极限可取为屈服应力 σ_y。然而，由于结构钢的截面中存在残余应力，屈曲时柱中的实际压应力为：

$$\sigma_c=\sigma_{max}+\sigma_r \tag{b}$$

式中 σ_r 为柱中残余压应力，它可能高到 $\sigma_y/2$，σ_{max} 等于 P/A。为了确定方程(a)的适用范围，我们令 σ_c 等于它的极限值 σ_y，并令 σ_r 等于它的假设的最大值 $\sigma_y/2$。于是根据方程(b)我们求出 $\sigma_{max}=\sigma_y/2$。因而，我们得出结论：只要 σ_{max} 小于 $\sigma_y/2$，方程(a)就可以应用。相应的 KL/r 的极限值用 λ 来表示，它藉方程(a)中 σ_{max} 等于 $\sigma_y/2$，对 λ 进行求解而得到：

$$\lambda=\sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_y}} \tag{10-18}$$

只要有效长细比 KL/r 等于或大于 λ，临界应力的欧拉公式(方程 a)就可以应用。

用钢的屈服应力去除方程(a)，这样便于用无量纲形式来表达方程(a)。因而，最大应力的方程成为：

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y}=\frac{\pi^2E}{\sigma_y(KL/r)^2}=\frac{\lambda^2}{2(KL/r)^2} \qquad 当\frac{KL}{r}\geqslant\lambda \tag{10-19}$$

此方程绘于图 10-12 中。

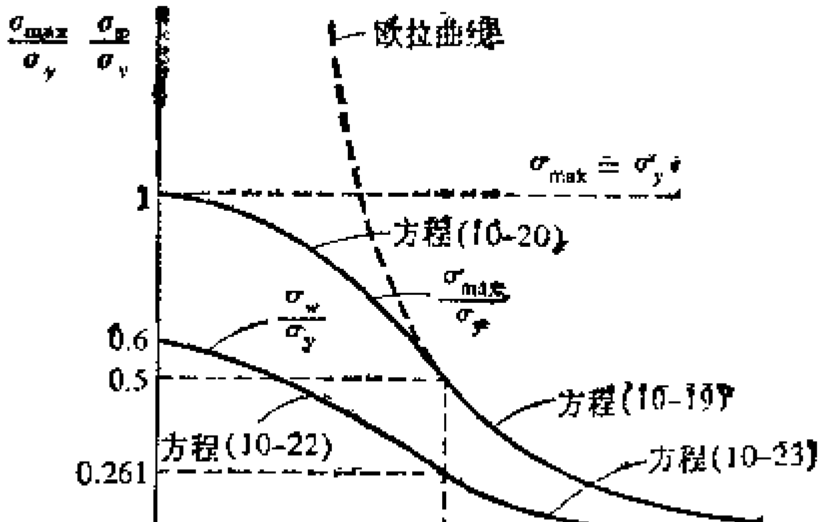


图 10-12 对于结构钢钢柱设计的最大应力 σ_{max} 与容许应力 σ_w 的曲线图

对于非弹性屈曲范围 ($KL/r\leqslant\lambda$)，柱研究委员会建议用下列方程所得的抛物线：

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_y}=1-\frac{(KL/r)^2}{2\lambda^2} \qquad 当\frac{KL}{r}\leqslant\lambda \tag{10-20}$$

此方程也绘于图 10-12 中，从图中我们看出：当 $KL/r=0$ 时，σ_{max} 的值为 σ_y。此曲线在 $KL/r=0$ 处有一水平切线，而在 $KL/r=\lambda$ 处与方程(10-19)的曲线平顺相接。

为了设计中应用，必须引进适当的安全系数，以便根据最大应力得出容许资用应力 σ_w ($\sigma_w=\sigma_{max}/n$)。美国钢结构协会 (AISC) 对于应用柱研究委员会的公式建议了下列安全系数[1]

$$n_1=\frac{5}{3}+\frac{3(KL/r)}{8\lambda}-\frac{(KL/r)^3}{8\lambda^3} \qquad 当\frac{KL}{r}\leqslant\lambda \tag{10-21a}$$

$$n_2=\frac{23}{12}\approx1.92 \qquad 当\frac{KL}{r}\geqslant\lambda \tag{10-21b}$$

因而，容许应力的方程为：

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_y}=\frac{1-(KL/r)^2/(2\lambda^2)}{n_1} \qquad 当\frac{KL}{r}\leqslant\lambda \tag{10-22}$$

$$\frac{\sigma_w}{\sigma_y}=\frac{\lambda^2}{2n_2(KL/r)^2} \qquad 当\frac{KL}{r}\geqslant\lambda \tag{10-23}$$

这些资用应力的方程也已绘于图 10-12 中。它们相当于 AISC 规范内对于中心作用荷载下结构钢钢柱设计所给的方程。

结构铝柱是根据两条直线和欧拉曲线所组成的最大应力图(图 10-8 中的 $DEBC$ 线)进行设计的。此曲线的纵坐标值随着所用的特定的铝合金而变，可按设计手册求得(参考文献 10-10)。根据该图求出最大应力 σ_{max} 之后，引进例如 2 或

1) 见参考文献 10-9。AISC 采用了与这里不同的符号，例如对 λ 采用了 C_c，对 σ_w 采用了 F_a，对 σ_y 采用了 F_y。另外，AISC 规定模量 E 为 29,000,000 磅/吋²。

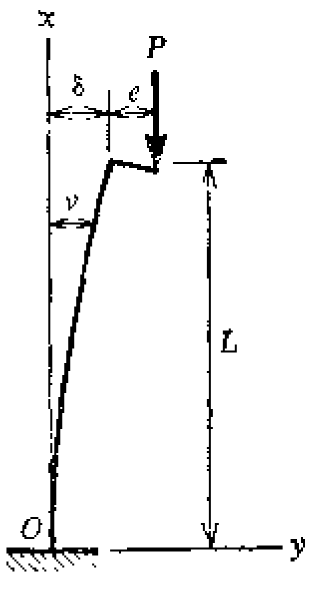
2.5 的安全系数，得出容许应力 σ_w。

在指定机构所编写的许多建筑法规和规范中给出了柱的设计公式. 这些公式仅用于某些材料和仅用于规定条件下. 这种法规和规范为工程设计人员共同应用着.

对于规定荷载下柱截面的选择， 通常需要一些试凑计算. 在知道轴向荷载之后， 我们从容许应力 σ_w 的估算和近似计算所需要的横截面面积来开始. 然后，根据现有规格表选择截面. 此截面必须借助适当的柱公式去校核，看它是否足以承受荷载. 如果不能的话，则选择较大的截面，这样反复地进行；如果表现设计过于安全，便选择较小的截面，并且进行校核.

习　题

10.1-1　图 10-1 中所示柱的最大挠度按方程(10-2)得出为 $\delta_1 = e(\sec kL/2 - 1)$. 如果挠度对于力 P 产生的弯矩的影响略去不计， 最大挠度 $\delta_2 = PeL^2/8EI$(见第 10.1 节，方程 f). 比值 δ_1/δ_2 可视为代表挠度对弯矩影响的"放大系数". 求出以 kL 表示 δ_1/δ_2 的表达式，并根据此表达式绘出 δ_1/δ_2 对于 kL 的图解(作为图解的校核，注意：当 $kL=0$ 时，δ_1/δ_2 必须等于 1，当 $kL=\pi$ 时必须成为无穷大).



习题 10.1-2

10.1-2　图中所示的柱，其底面固定，上端自由. 压力 P 以偏心距 e 作用于柱的顶面. 试导出下面公式：(a)柱的最大挠度 δ，(b)柱中最大弯矩 M_{max}.

10.1-3　有一方形截面杆(2 吋×2 吋)，其长度为 6 呎，由力 $P=9000$ 磅偏心地压缩. 其偏心距 e 沿方形的对角线，且等于 1 吋. 假设该杆的两端均为简支，且 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2. 试求杆中最大压应力.

10.1-4 有一长度为 4 呎、截面为 1 吋×2 吋的矩形杆，由于力 $P=3000$ 磅产生偏心压缩。压力的作用线通过横截面的一个角点。试求杆中最大压应力，假设该杆的端点为简支，$E=30\times10^6$磅/吋^2。

10.1-5 有一铰接端柱，由 C 8×11.5 槽形截面构成（见附录 C）。有一压力 P 作用于槽形截面对称平面内 1-1 轴与槽的背面相交的点上，亦即位于距形心 0.571 吋处。试求柱中央处的挠度和柱的最大拉应力和最大压应力，假设 $P=4000$ 磅，$L=10$ 呎，$E=30\times10^6$磅/吋^2。

10.1-6 有一用 W 8×40 截面构成的铰接端柱。压缩荷载 P 以偏心距 $e=3$ 吋作用于 2-2 轴上（见附录 C）。试问荷载 P 为多大值时将使柱产生屈服？假设 $\sigma_y=36,000$ 磅/吋^2、柱长 $L=16$ 呎、$E=30\times10^6$ 磅/吋^2。

10.1-7 有一铰接端钢管柱，其外径 $d=21/16$ 吋，厚度 $t=1/16$ 吋。压缩荷载 P 作用于边圈的中心处，亦即，其偏心 $e=1$ 吋。柱的长度 $L=6$ 呎，$E=30\times10^6$磅/吋^2。试问 P 为多大值时将使管中产生屈服，假设 $\sigma_y=40,000$ 磅/吋^2？

10.2-1 从挠度曲线的微分方程开始，导出简支端柱（见图 10-6 a）的临界屈曲荷载表达式和相应的屈曲型的形状。

10.2-2 从挠度曲线的微分方程开始，导出固定端柱（见图 10-6 b）的临界屈曲荷载表达式和相应的屈曲型的形状。

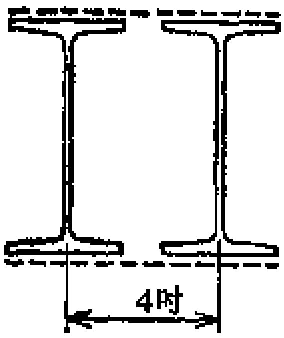
10.2-3 有两根长度、横截面积、弹性模量都相同的简支柱。其中一根柱为实心圆形横截面，另一根为实心方形横截面。试比较该圆柱和方柱的临界荷载 P_c 和 P_s。

10.2-4 有一宽翼缘柱（$E=30\times16^6$磅/吋^2），其截面为 W 14×84，长度为 45 呎。柱的下端嵌固住，上端为铰接。试计算该柱的临界荷载。

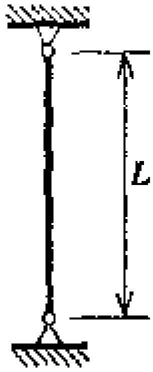
10.2-5 计算由 S 6×12.5 截面制成的柱的临界荷载。假设该柱的两端点为简支，而且 $L=6$ 呎，$E=30\times10^6$磅/吋^2。

10.2-6 试求算由两根如图所示方向排列的 I 形截面所组成的简支端组合柱的临界荷载。其中每一杆的截面为 S 6×12.5，它们并排地连到一起如同单根柱一样。假设 $L=12$ 呎，$E=30\times10^6$磅/吋^2。

10.2-7 有一铰端细长杆，藉固定支承装于端点处（见图）。假



习题 10.2-6



习题 10.2-7

设处于理想条件和弹性状态。试问杆中温度增大多少(ΔT)时杆将产生屈曲?(假设 α=热膨胀系数)。

10.2-8　根据附录 C 中的表选择最轻的宽翼缘截面($E=30\times 10^6$磅/吋^2)用作简支端柱(长度为 20 呎),假设其压缩荷载 P 为 450 千磅,抵抗弹性屈曲破坏所需要的安全系数 $n=2.5$。

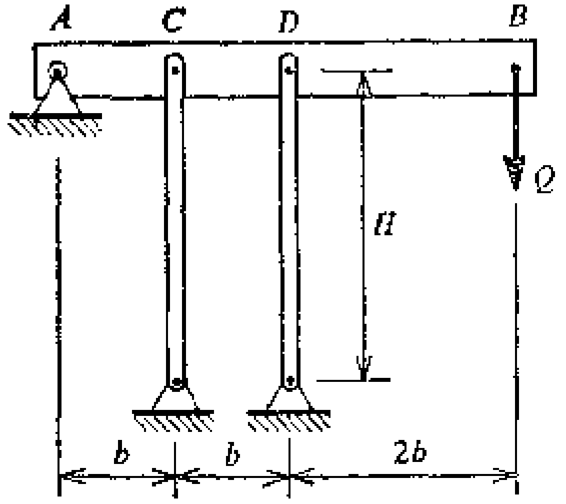
10.2-9　根据附录 C 中的表选择最轻的等肢角形截面用作简支端柱(长度等于 10 呎),假设所作用的压缩荷载 $P=20$ 千磅,抵抗弹性屈曲破坏所需要的安全系数 $n=2.5$(应用 $E=30,000,000$ 磅/吋^2)。

10.2-10　有一细长铝柱($E=10\times 10^6$磅/吋^2),长度为 6 呎,由外径为 2 吋的圆形管所制成。如果压缩荷载 $P=3000$ 磅,抵抗弹性屈曲所需要的安全系数 $n=2$,试确定所需要的厚度 t(假设柱的端点均为简支)。

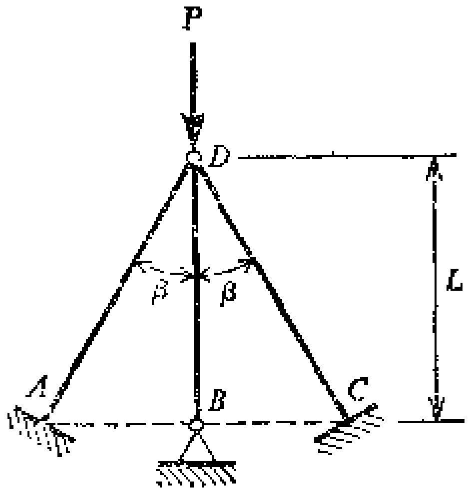
10.2-11　有笨重的、相当刚性的 AB 杆,A 端为销轴支承,另外用两根销接同等细长柱支承于 C 和 D 处,如图中所示。每一柱的弯曲刚度为 EI。试问荷载 Q 为多大时,该体系遭到毁坏?

10.2-12　有一结构 $ABCD$ 由三根具有同样弯曲刚度 EI 的细长杆所组成(见图)。其 B 点和 D 点为销接,而支点 A 和支点 C 为固定者。角度 $\theta=30°$。假设由于杆件屈曲引起毁坏,试确定作用于节点 D 处荷载 P 的临界值。

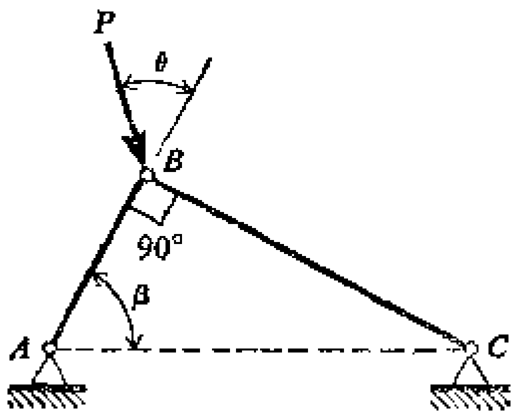
10.2-13　有一销接桁架 ABC 由两根具有相同截面和同样材料的细长杆所组成(见图)。假设由于杆的屈曲引起毁坏,试确定使荷载 P 为最大时的 θ 角(假设 $0<\theta<\pi/2$)。



习题 10.2-11



习题 10.2-12



习题 10.2-13

10.3-1 有一 1 吋 × 2 吋的矩形横截面钢杆，其端点均为简支，承受轴向压缩荷载。试问应用临界荷载的欧拉公式时，柱的最短长度 L 为多少？假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2，$\sigma_{pl}=30,000$ 磅/吋^2。

10.3-2 计算上一习题中所述柱的临界应力 σ_{cr}，假设它的长度 $L=5$ 呎。

10.3-3 有一圆形横截面(直径等于 1 吋)实心钢杆，其端点固定，承受轴向压力。试问应用临界荷载的欧拉公式时柱的最短长度 L 为多少？假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2，$\sigma_{pl}=30,000$ 磅/吋^2。

10.3-4 计算上一习题中所述柱的临界应力 σ_{cr}，假设它的长度 $L=5$ 呎。

10.3-5 有一 2 吋 × 4 吋矩形横截面钢杆($E=30\times10^6$ 磅/吋^2)，

承受轴向荷载 P 的压缩，该杆可以考虑为简支端情况。要求留有抵抗破坏的安全系数 $n=2$。试问在下列长度 L 时，柱中许可的容许应力 σ_w 为多少：(a) 6 呎，(b) 8 呎，(c) 10 呎？

10.3-6　有一截面为 W 12×106 的铰端柱，其长度 $L=30$ 呎，试确定其临界压应力 σ_{cr}（假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2）。如果安全系数 $n=2.5$，试问柱上的容许压缩荷载为多少？

10.3-7　试问上一习题中所述的柱在许可应用临界荷载的欧拉公式时柱的最短长度 L 为多少？假设 $\sigma_{pl}=40{,}000$ 磅/吋^2。

10.4-1　试求出习题 10.1-2 悬臂柱中最大应力与正割公式（方程 10-12）相似的公式。

10.4-2　有一截面为 W 14×84 的钢柱（$E=30\times10^6$ 磅/吋^2），其端点为铰接，长度为 25 呎。该柱承受中心作用荷载 $P_1=200$ 千磅和偏心荷载 $P_2=100$ 千磅（见图 10-10）。荷载 P_2 作用于 2-2 轴上距形心距离为 7.5 吋处。(a) 应用正割公式计算柱中的最大应力，(b) 试问如果 $\sigma_y=40{,}000$ 磅/吋^2，抵抗柱的初始屈服的安全系数为多少？

10.4-3　在一长度为 6 呎、截面为 4×4×3/8 吋角形截面（见附录 C）的简支端钢柱（$E=30\times10^6$ 磅/吋^2）上，有一作用于该角两肢相交的外侧角点处荷载 P。试问要求抵抗屈服的安全系数 $n=2$ 和 $\sigma_y=40{,}000$ 磅/吋^2 时容许压缩荷载 P 为多少？

10.4-4　用 W 16×50 的截面作简支柱（$L=16$ 呎，$E=30\times10^6$ 磅/吋^2）。它承受荷载 P 作用，以致绕次要主轴（2-2 轴）弯曲，其偏心率 $ec/r^2=0.2$。如果抵抗屈曲的安全系数 $n=2$ 和 $\sigma_y=36{,}000$ 磅/吋^2 时，试问 P 的容许值为多少？

10.4-5　有一钢管柱底面固定住，而顶端为简支（$L=12$ 呎，$E=30\times10^6$ 磅/吋^2）。管的外径和内径分别为 3.5 吋和 3.0 吋。假设偏心率 $ec/r^2=0.25$，$\sigma_y=36{,}000$ 磅/吋^2，$n=2$，试求容许荷载 P。

10.4-6　有一铰端钢柱（$L=10$ 呎，$E=30\times10^6$ 磅/吋^2），其截面为 W 12×72。有一荷载 $P_1=100$ 千磅通过形心作用，另一偏心荷载 P_2 作用于 1-1 轴上距 2-2 轴 4 吋处，假设 $\sigma_y=40{,}000$ 磅/吋^2，$n=2.5$，试求 P_2 的容许值。

10.5-1　藉求解挠度曲线的微分方程，导出具有初始挠度的柱

的最大挠度方程(10-14)。

10.5-2 对方形横截面柱导出类似于方程(10-17)的方程.

10.5-3 有一 W 8×48 钢柱 ($E=30\times10^6$ 磅/吋^2), 其端点为铰接,承受轴向荷载 $P=225$ 千磅. 柱的长度为 15 呎,它绕横截面较弱的主轴弯曲而屈曲. 该柱具有正弦曲线单波形的初始挠度, 中央处的挠度等于 0.2 吋. (a)应用方程(10-16),计算柱中的最大应力,(b)试问如果 $\sigma_y=40,000$ 磅/吋^2,柱抵抗屈服的安全系数有多大?

10.5-4 有一长度为 4 呎的简支钢柱 ($E=30\times10^6$磅/吋^2), 假设该柱为实心、直径为 2 吋的圆形横截面柱,试问容许压缩荷载 P 为多少? 应用方程(10-16),并假设抵抗屈服的安全系数 $n=2$, $\sigma_y=40,000$ 磅/吋^2, $L/a=400$。

10.5-5 有一3×3×1/4 吋角形截面构成的固定端钢柱, 假设柱的长度 $L=10$ 呎, $E=30\times10^6$磅/吋^2, $n=1.5$, $\sigma_y=40,000$ 磅/吋^2, $a/L=1/800$,试求容许压缩荷载 P(解中应用方程 10-16)。

10.6-1 试问截面为 W 10×72、长度为 15 呎的铰端钢柱的容许荷载 P 为多少? 应用 AISC 公式,并假设 $E=29,000,000$ 磅/吋^2, $\sigma_y=50,000$ 磅/吋^2.

10.6-2 对 W 10×45 钢柱在下面每一种长度时按 AISC 公式确定其容许荷载 P(假设 $E=29\times10^6$磅/吋^2, $\sigma_y=36\times10^3$磅/吋^2): $L=$ 10 呎, 20 呎和 30 呎. 假设为铰端条件.

10.6-3 有一钢管柱,其外径为 3.5 吋, 内径为 2.9 吋, 承受轴向荷载 $P=21,000$ 磅. 试问不超过根据 AISC 公式的容许应力时柱的最大长度 L 为多少? 假设该柱为简支, $E=29\times10^6$磅/吋^2, $\sigma_y=36\times10^3$ 磅/吋^2.

第十一章　结构分析和能量法

11.1　引言

结构分析的目的是求出各种类型结构的应力合力、位移和反力，特别是求出静不定结构的这些值．这个课题早已在前面章节中作了介绍，在那里我们讨论了梁、受扭杆以及轴向受力构件的静不定问题．正如这些讨论所表明的，结构分析与材料力学是相互紧密联系的．此外，功和能量的概念，包括虚功、应变能、位能以及余能，在结构分析中都具有重要的作用．

本章我们将从讨论虚位移原理和虚功原理来开始．接着我们应用虚功原理去导出单位荷载法．这种方法对于确定结构的位移是非常有力和非常有用的．作为单位荷载法的应用，讨论了梁的剪切挠度．随后，在后面内容中，介绍位移互等定理和功能互等定理．其次，我们介绍和说明柔度法和刚度法，这些都是结构分析的基本方法．最后，本章后一半专门介绍能量方法．

介绍是从有关应变能和余能的一些基本概念来开始，然后将能量法用于结构分析．应变能的讨论包括卡斯提里阿诺(Castigliano)第一定理、势能逗留值原理[1]、瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)法以及它们与结构分析的位移法和刚度法的关系．余能的讨论包括克罗第-恩格塞(Crotti-Engesser)定理和最小余能原理，这二者与结构分析的力法和柔度法是有关的．另外，对于线性结构，余能定理化为卡斯提里阿诺第二定理和最

[1] The principle of stationary potential energy 或译为平稳势能原理．——译者注

小应变能原理。

本章所讨论的理论和方法，用仅包含梁、平面桁架和简单平面框架的实例进行说明。然而，所有的概念却代表了应用力学的基本原理，因此，它们能用于包括空间桁架、空间框架、板和壳结构等较为复杂的结构类型。

11.2 虚功原理

虚位移和虚功的概念，通常在学习静力学过程中已作了介绍，在那里，它们被用来求解静力平衡问题。这个"虚"字意味着该量纯粹是假设的，从真实意义或实际意义上来说它们是不存在的。因此，虚位移是一种任意加到结构上的虚构位移；它不是一种实际位移，譬如象由于作用于结构上的荷载所引起的挠度那样。在产生虚位移过程中真实的力所做的功称为虚功。

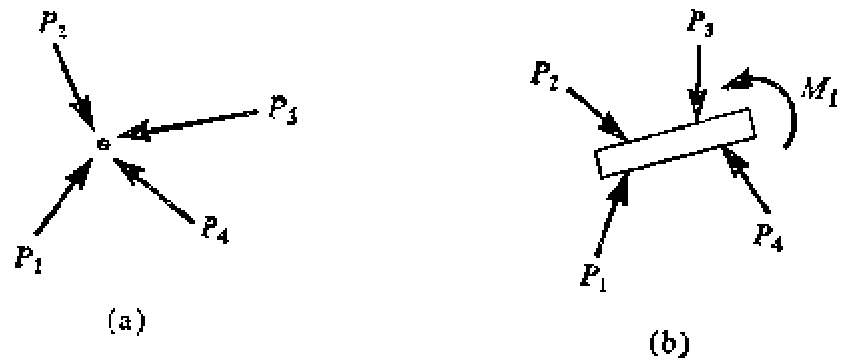


图 11-1 虚位移原理：(a) 对于一质点；(b) 对于一刚体

当一个质点在力系作用下处于静力平衡时（见图11-1a），我们可以给该质点沿任何方向一平移虚位移，在产生此虚位移过程中诸外力所做的虚功必须等于零，因为这些力处于平衡状态。这个表现简单的叙述是为**虚位移原理**。正如在静力学学习中所指出该原理可以用来代替求解问题时所熟悉的平衡方程。

虚位移原理也可以用于荷载系作用下处于平衡的刚体，

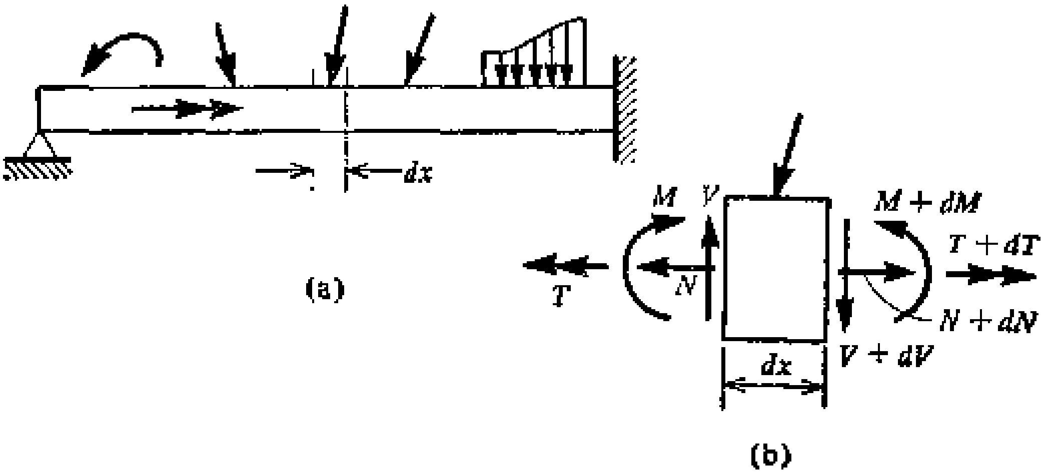


图 11-2 虚功原理的推导

该荷载系可以包括力、力偶和分布荷载(图 11-1 b). 可以给刚体一个虚位移(包括顺任何方向平移、绕任何轴旋转或旋转和平移相结合的位移)，如果该刚体处于平衡，那么所有情况下诸力所做的虚功将等于零. 通常我们必须限制虚位移为一很小的位移，以使在产生虚位移过程中诸力的作用线不改变[1].

为了用于结构分析，我们必须将虚位移原理推广到可变形结构的情况. 对于这种结构，我们不仅必须考虑外力的虚功，而且要考虑与内力或应力合力有关的虚功. 为了说明如何进行这种考虑，让我们讨论图 11-2 a 中所示的结构. 这种结构假设是承受力、弯曲力偶、扭矩和分布荷载全面作用的一般形式. 自然，该结构在各种荷载作用下处于静止和平衡. 结构上任一横截面可能存在轴向力 N、弯矩 M、剪力 V 和扭转力偶 T 等形式的应力合力，如同作用于从杆件切下长度为 dx 单元左侧面上所示的那样(图 11-2 b). 在该单元的另一面，其应力合力可能存在微分量的变化，因此它们表示为 $N+$

1) 虚位移原理是 John Bernoulli (1667—1748) 首先系统阐述的(见参考文献 1-1，第 27 页和参考文献 6-1).

dN、$M+dM$、$V+dV$以及$T+dT$。

现在，假设给结构（图 11-2 a）一个使其弯曲形状有很小变化的虚变形。此虚变形以某种非规定方式加于结构上，而且与结构由于作用在它上面的荷载早已产生的真实挠度完全无关。这种真实挠度具有一定的值，它由荷载性质和结构性质所决定。然而，虚变形代表给予结构的附加变形，该结构在真实荷载作用下原先已处于平衡形状。对于虚位移的唯一限制是它必须代表实际可能发生的变形形状，换句话说，形状的虚变化必须与结构所能变形的条件不相矛盾，而且在结构诸单元之间必须保持连续性。由于梁的虚变形的结果，梁轴上诸点将产生虚位移，譬如顺竖向的挠度。

在虚变形过程中，结构的每一单元将移动到新的位置，而且形状上也将变形。所以，作用于单元上的力（包括应力合力和外荷载，如图 11-2 b 所示）将做虚功。让我们用 dW_e 表示此虚功的总值。这个与一个单元相关联的功，它可考虑由两部分组成：(1) 单元视为刚体时由于位移（包括平移和转动）所做的功 dW_r，(2) 与该单元的变形有关的功 dW_d。因而

$$dW_e = dW_r + dW_d$$

由于该单元处于平衡状态，在将该单元视为刚体时，其位移过程中诸力（包括外力和内力）所做虚功 dW_r 必须为零，因而上面的方程化为

$$dW_e = dW_d \tag{a}$$

此方程指出：在单元产生虚位移过程中，作用于该单元上所有力做的总虚功（亦即，包括刚体位移产生的虚功和该单元变形产生的虚功）等于该单元仅产生虚变形过程中相同诸力所做的虚功。如果现在我们将结构上所有单元用方程 (a) 所表示的虚功加起来，我们得到

$$\int dW_e=\int dW_d \qquad (b)$$

显然式中的积分是对整个结构来进行。

对于方程(b) 中诸积分可以给予简单的说明. 该方程左边的积分为结构虚变形过程中所有力（包括作用于所有单元的所有面上的荷载和应力合力. 图 11-2 b中所示的单元是代表性的)所做的总虚功. 然而,我们注意到: 每一单元的侧边都是与相邻单元的侧边直接接触的,所以,作用于一个单元上应力合力的虚功恰恰与作用于相邻单元上相等而相反的应力合力的虚功相抵消. 剩下仅有的虚功为作用于单元外面边界上（譬如图 11-2 b 中所示单元顶面或底面）的外力的功. 因此,我们得到结论: 方程(b)左边的积分等于作用于结构上的外力的虚功. 我们称此量为**外功**,并用 W_{ext} 来表示.

方程 (b) 右边一项藉对与单元变形有关的虚功进行积分来求得. 这种功包括作用于该单元上所有力（包括应力合力和外力)的影响. 然而，当单元变形时，仅应力合力完成某一个功. 因而,方程(b)中的第二项实际上代表应力合力单独做的虚功. 此虚功等于应力合力作用于该单元上而考虑虚变形时所做的功. 这种虚功的总值藉对所有单元加起来求得，称为**内功**,以 W_{int} 表示. 因面,方程(b)成为

$$W_{ext}=W_{int} \qquad (11-1)$$

此方程代表**虚功原理**，可将它叙述如下：如果对荷载系作用下处于平衡的变形结构给一微小的虚变形,那么由于外力(或荷载)所做的虚功等于内力(或应力合力)所做的虚功.

虚功原理是极为有力的手段,在结构分析中有很多用处. 然而，在应用该原理之前，强调一下它的两个特点却是很重要的：第一，虚变位或虚位移必须与结构的支承不相矛盾，还必须保持结构的连续性. 在遵守这个限制之下，形状的虚

变化可以任意加于结构上；不应把它与真实荷载所引起结构形状的变形混淆起来。第二，回顾该原理的推导，可说明讨论中根本没有涉及结构的材料特性。所以，虚功原理适用于所有结构，不管材料性能是线性的或非线性的，也不论是弹性的或非弹性的。

现在让我们讨论方程(11-1)中所出现的外虚功项和内虚功项的求算。其外功 W_{ext} 是产生虚位移过程中作用于结构上的荷载所完成的功。因为当虚位移加上去时，这些荷载以它们的全部值作用着，它们所完成的虚功简单地为荷载与位移之乘积。具体地说，集中荷载的虚功为该力与其作用点的虚位移之乘积。在这种情况下，位移的正方向必须取与力的正方向相一致。如果荷载为一力偶，那么其虚功为该力偶矩与它所旋转的虚角之乘积。

应力合力的内虚功 W_{int} 的求算，要稍难理解。作用于单元上(图11-2 b)的应力合力所做的虚功与产生虚位移过程中该单元的变形有关。各类虚变形示于图 11-3 中。该图的(a)部分表示单元中均匀轴向应变组成的虚变形，因而，该单元的长度增大为 $d\delta$。这种虚变形引起轴向力做虚功$(N+dN)d\delta$(图11-2 b)，而不引起弯矩、剪力或扭转力偶做虚功。我们还应注意：这时没有提到任何造成虚变形 $d\delta$ 的原因，很清楚它不是轴向力 N 本身所引起的。第二类虚位移为该单元两侧相对转动 $d\theta$ 形成的弯曲变形(图 11-3 b)。在这种虚变形过程中，做功的应力合力仅仅是弯矩，它的虚功为$(M+dM)d\theta$。剪切虚变形和扭转虚变形分别示于图 11-3 c 和 d 中。前者由该单元的一边对另一边的侧向平移 $d\lambda$ 所形成，后者由围绕纵轴相对转动 $d\phi$ 所形成。与这些虚变形有关的虚功项为$(V+dV)d\lambda$ 和$(T+dT)d\phi$。

在上述内虚功的四个表达式中，每一式均可藉两微量乘

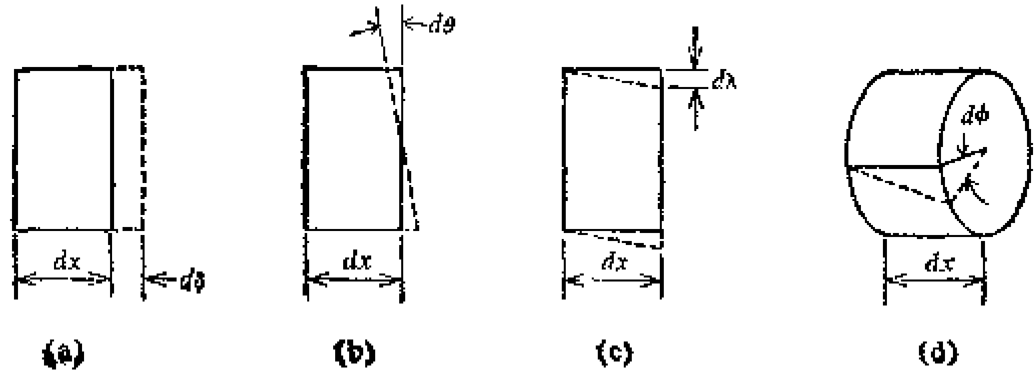


图 11-3　结构一单元的虚变形：(a)轴向的；(b)弯曲的；(c)剪切的；(d)扭转的

积(如 $dNd\delta$)与有限项和微量之乘积（如 $Nd\delta$）相比而略去不计来进行简化．因而，作用于结构中一个单元上诸应力合力所做的内虚功表达式成为：

$$Nd\delta+Md\theta+Vd\lambda+Td\phi$$

对结构的所有单元进行积分，得出内虚功的完整表达式：

$$W_{int}=\int Nd\delta+\int Md\theta+\int Vd\lambda+\int Td\phi \quad (11\text{-}2)$$

在此表达式中，应力合力 N, M, V 和 T 为真实荷载作用下结构中所产生的实际应力合力，反之，变形 $d\delta$、$d\theta$, $d\lambda$ 和 $d\varphi$ 为与结构的虚位移有关的虚构变形．在下一节中，我们将叙述利用方程(11-1)和(11-2)求出结构位移的方法．

11.3　用以计算位移的单位荷载法

上节中所述的虚功原理可以用来导出单位荷载法，它是求结构位移的一种重要方法．我们早已讨论过求梁挠度（见第六章）和求简单桁架挠度(见第 1.5 节)的方法．然而，单位荷载法不仅能用于梁、桁架和其它简单类型的结构，而且可用于具有许多杆件的非常复杂的结构．此外，单位荷载法适用于求各种类型的位移，包括结构中某点的挠度、杆轴的转角、

两点间的相对位移等．虽然在实际应用中这个方法限于静定结构，因为它的应用需要知道整个结构的应力合力，但是从理论上说，它可用于静定结构和静不定结构．

由于单位荷载法的基本方程可以根据虚功原理导出，所以该法有时被称为虚功法，也被称为虚荷载法和马克斯威尔-莫尔法．前一个名词的得来是因为该法需要应用虚荷载（亦即，单位荷载），而后一名词的得来是因为J. C. 马克斯威尔(J. C. Maxwell)于1864年和O. 莫尔(O. Mohr)于1874年各自独立提出了这个方法[1]．

当应用单位荷载法时，必须考虑两种荷载系作用于结构上．第一个荷载系由结构承受的实际荷载、温度变化或其它产生所要计算位移的原因组成．第二个加载系由结构上单独作用单位荷载所组成．该单位荷载是一虚构荷载，它完全是为了计算实际荷载所产生的结构位移 Δ 的目的而引进来的．单位荷载必须相应于所需求的位移 Δ．相应于该位移的荷载是指作用于结构上需要确定位移的特定点处之作用荷载，这个荷载顺位移的正方向而作用．"位移"一词在这里用作广泛的意义，因而，位移 Δ 可能为平移、转动、相对位移或相对转动．如果计算的位移为平动，相应的单位荷载则为作用于发生平动点上顺平动正方向为其正方向作用的一个集中力．如果计算的位移为转动，那么单位荷载为作用于结构上发生转动点处的力偶；此单位力偶的正方向必须与转动的正方向相同．如果位移为两点沿连接它们的连线上相对平动，那么单位荷载由两个沿一直线但方向相反地作用于这两点上的力所组成．最后，如果位移为两线间的相对转动，单位荷载则包括两个相等而方向相反的力偶．所有这些可能性将在本节后面举例来说明．

1）见参考文献 11-1 和 11-4．

组成第二个荷载系的单位荷载作用于结构上使支承处产生反力，使杆内产生应力合力．让我们用符号 N_U, M_U, V_U 和 T_U 表示这些应力合力．这些量连同单位荷载和反力构成处于平衡的力系．按照虚功原理，如果对结构给一微小的虚变形(或形状改变)，那么外力的虚功等于内力的虚功(见方程11-1)．现在我们介绍单位荷载法推导中的关键步骤：我们必须合理地选择虚变形．让我们取第一个荷载系所引起结构的实际变形作为加于第二个荷载系（带有单位荷载的结构）的虚变形．在产生此虚变形过程中，唯一的外虚功为单位荷载自身所做的功，因为它是结构上唯一的外荷载．此虚功为单位荷载与它移动所经过的位移 Δ 之乘积，因此

$$W_{ext}=1\cdot\Delta \tag{a}$$

式中 Δ 代表由于实际荷载使结构所产生的需要求出的位移(让我们回想：单位荷载是有意地相应于 Δ 来选择的)．

内虚功是结构单元在产生虚变形时应力合力 (N_U, M_U, V_U 和 T_U)所做的功．然而，虚变形是按结构承受真实荷载时所发生的实际变形一样来选择的．用 $d\delta$, $d\theta$, $d\lambda$ 和 $d\phi$ 代表这些变形，如图 11-3 所示．我们得到内功(见方程11-2)为

$$W_{int}=\int N_U d\delta+\int M_U d\theta+\int V_U d\lambda+\int T_U d\phi \tag{b}$$

最后，令外功等于内功(见方程 a 和 b)，我们得到单位荷载法的基本方程：

$$\Delta=\int N_U d\delta+\int M_U d\theta+\int V_U d\lambda+\int T_U d\phi \tag{11-3}$$

在此方程中 Δ 代表需要求算的位移，它可能为平动、转动或相对位移；应力合力 N_U, M_U, V_U 和 T_U 代表相应于 Δ 的单位荷载所引起的轴向力、弯矩、剪力和扭转力偶；而 $d\delta$, $d\theta$, $d\lambda$ 和 $d\phi$ 代表实际荷载所引起的变形．因为单位荷载已从方程

(11-3)的左边分开，仅留下Δ一项，需要考虑 N_U, M_U、V_U和 T_U 诸量具有所作用单位荷载每单位力或力矩的量纲.

单位荷载法的基本方程(方程 11-3)是极为普遍的，不受任何有关结构材料线性性能的限制. 换句话说，不需要为了应用方程(11-3)一定要求迭加定理能够成立. 然而，当结构的材料服从虎克定律且结构属于线性时，成为最普遍的情况. 在这种情况下，我们可以容易地得到由于作用于结构上的真实荷载所引起的变形 $d\delta$、$d\theta$、$d\lambda$ 和 $d\phi$ 的表达式. 如果我们以 N_L、M_L、V_L 和 T_L 表示由于真实荷载所引起的结构中的应力合力，那么单元的变形为：

$$d\delta=\frac{N_L dx}{EA} \quad d\theta=\frac{M_L dx}{EI} \quad d\lambda=\frac{\alpha_s V_L dx}{GA}$$

$$d\phi=\frac{T_L dx}{GJ} \tag{c}$$

这些方程中的第一个方程得出由于轴向力 N_L 所产生的单元的伸长量(见图 11-3 a). 类似地，剩下的三项得出相应于弯曲、剪切和扭转的变形（见图 11-3 b,c 和 d). 这四个方程都是建立于前面诸章中所导得的方程的基础上的（见方程1-9，6-25,6-43 和 3-8). 将这四个表达式代入方程(11-3)，得出下列形式的单位荷载法之方程：

$$\Delta=\int\frac{N_U N_L dx}{EA}+\int\frac{M_U M_L dx}{EI}+\int\frac{\alpha_s V_U V_L dx}{GA}+\int\frac{T_U T_L dx}{GJ} \tag{11-4}$$

当材料为线性弹性者，且迭加原理能成立时，此方程可用来求结构任一点处的位移Δ. 方程中每一项积分表示一种变形对总位移的影响. 因而，第一项积分得出轴向变形对于位移Δ的影响. 第二项得出弯曲变形的影响，等等.

对于方程 (11-4) 中出现的应力合力，采用的正负号规则

必须一致，因而，轴向力 N_U 与 N_L 必须按相同的正负号规则求得，同时，M_U 必须与 M_L 一致，V_U 必须与 V_L 一致，T_U 必须与 T_L 一致. 只有在这些条件下，位移 Δ 才具有与单位荷载相同的正的方向。

藉单位荷载法应用方程(11-4)计算位移的程序可以概括如下：(1) 确定实际荷载所引起结构中的应力合力 N_L, M_L, V_L 和 T_L，(2) 相应于所需求算的位移 Δ，在结构上置放单位荷载，(3) 确定单位荷载所引起的应力合力 N_U, M_U, V_U 和 T_U，(4) 建立方程(11-4) 所示诸项，并对整个结构进行每一项积分，(5) 将结果加起来得出位移 Δ. 这些步骤将在后面例题中给予说明.

根据结构的类型，我们可以预料方程 (11-4) 中的某些项是不需要的. 例如，有一铰接桁架仅在节点处承受荷载，那么诸杆中将不存在弯曲变形、剪切变形和扭转变形，而只需要方程(11-4)中的第一项. 此外，杆中的轴向力在杆子的整个长度中将为一常数，因此，如果杆件为棱柱形者，对于一根杆的积分得到 N_UN_LL/EA，式中 L 为杆的长度. 于是对于桁架所有杆之总和为

$$\Delta=\sum\frac{N_UN_LL}{EA} \tag{11-5}$$

此方程说明桁架中任一节点处的挠度 Δ 可按下列程序求出：(1)分别确定由于单位荷载和实际荷载使所有杆中产生的轴向力 N_U 和 N_L，(2) 对每一根杆建立表达式 N_UN_LL/EA，(3)将所有杆的这些表这式加起来便得出其挠度.

通常在梁或平面框架的情形中只有弯曲变形是重要的. 所以，单位荷载方程简化为

$$\Delta=\int\frac{M_UM_Ldx}{EI} \tag{11-6}$$

此表达式可以对结构的每一杆进行积分，然后将结构中全部杆的所得项相加起来。

一般来说，根据结构类型，将方程(11-4)中诸项采取适当的组合，就可以求算出结构的位移。

温度效应 如果位移不是由于荷载而是由于其它效应所引起，譬如温度的变化，那么我们必须应用 $d\delta$、$d\theta$、$d\lambda$ 和 $d\phi$ 的适当表达式代替方程(c)中仅对荷载效应所列的表达式。例如，均匀温度增加，则产生按下面方程所得的长度之增长(见图11-3 a)：

$$d\delta=\alpha(\Delta T)dx$$

式中 α 为热膨胀系数，ΔT 为温度的增加(见图 1-10)。于是单位荷载方程(方程 11-3)采取下面形式：

$$\Delta=\int N_U\alpha(\Delta T)dx \tag{11-7}$$

此方程甚至可以用于温度变化 ΔT 沿杆轴变化的情况，只需要将 ΔT 表达为 x 的函数，然后进行积分。然而，在温度的变化沿每一杆的长度为一常数的一般情况下，我们可将所有杆总和起来去代替方程(11-7)中的表达式：

$$\Delta=\sum N_U\alpha L(\Delta T) \tag{11-8}$$

式中 L 为杆的长度。因而，必须对结构中每一杆求算 $N_U\alpha L\cdot(\Delta T)$ 一项，然后将这些项总加起来，得出其位移。

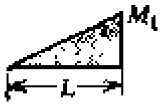
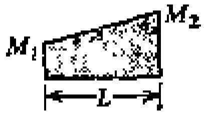
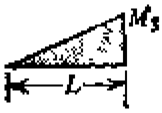
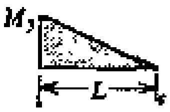
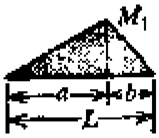
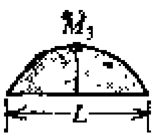
当温度自梁的一侧至另一侧呈直线变化，但沿杆的长度为一常数时，其变形为图 11-36 中所示类型，其变形 $d\theta$ 为

$$d\theta=\frac{\alpha(T_2-T_1)dx}{h}$$

它是按方程(6-41)所得，其中 h 为梁的高度，T_2 为底面的温度，T_1 为顶面的温度。因而，在这些条件下，我们得：

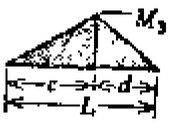
$$\Delta=\int\frac{M_U\alpha(T_2-T_1)dx}{h} \tag{11-9}$$

表 11-1 $\int_0^L M_U$

M_U ╲ M_L		
	$\frac{L}{2}M_1M_3$	$\frac{L}{2}(M_1+M_2)M_3$
	$\frac{L}{3}M_1M_3$	$\frac{L}{6}(M_1+2M_2)M_3$
	$\frac{L}{6}M_1M_3$	$\frac{L}{6}(2M_1+M_2)M_3$
	$\frac{L}{6}M_1(M_3+2M_4)$	$\frac{L}{6}M_1(2M_3+M_4)$ $+\frac{L}{6}M_2(M_3+2M_4)$
	$\frac{L}{6}\left(1+\frac{c}{L}\right)M_1M_3$	$\frac{L}{6}\left(1+\frac{d}{L}\right)M_1M_3$ $+\frac{L}{6}\left(1+\frac{c}{L}\right)M_2M_3$
	$\frac{L}{3}M_1M_3$	$\frac{L}{3}(M_1+M_2)M_3$
	$\frac{L}{4}M_1M_3$	$\frac{L}{12}(M_1+3M_2)M_3$

注：所有曲线均为带有用黑点表示顶点的二次抛物线。

$M_L\,dx$ 的值

	
$\frac{L}{2}M_1M_3$	$\frac{2L}{3}M_1M_3$
$\frac{L}{6}\left(1+\frac{a}{L}\right)M_1M_3$	$\frac{L}{3}M_1M_3$
$\frac{L}{6}\left(1+\frac{b}{L}\right)M_1M_3$	$\frac{L}{3}M_1M_3$
$\frac{L}{6}\left(1+\frac{b}{L}\right)M_1M_3$ $+\frac{L}{6}\left(1+\frac{a}{L}\right)M_1M_4$	$\frac{L}{3}M_1(M_3+M_4)$
当 $c\leqslant a$ 时： $\frac{L}{3}M_1M_3$ $-\frac{L(a-c)^2}{6ad}M_1M_3$	$\frac{L}{3}\left(1+\frac{cd}{L^2}\right)M_1M_3$
$\frac{L}{3}\left(1+\frac{ab}{L^2}\right)M_1M_3$	$\frac{8L}{15}M_1M_3$
$\frac{L}{12}\left(1+\frac{a}{L}+\frac{a^2}{L^2}\right)M_1M_3$	$\frac{L}{5}M_1M_3$

在此方程中，当梁的顶面纤维缩短，底面纤维伸长时，$d\theta$ 假设为正，如图 11-3b 所示。所以，必须对相同情况的弯矩 M_U 采取为正值，其意思是当梁的顶面产生压缩时，M_U 为正值。

乘积积分的求算 当求算方程(11-4)中的积分时，通常我们讨论的杆，其材料性能和横截面尺寸自一端至另一端均为常数。所以，刚度 EA, EI, GA/α_s 和 GJ 可放到积分符号的外面。所有剩下的积分则为一乘积形式，例如

$$\int M_U M_L dx \tag{11-10}$$

这些乘积积分必须对每一杆的全长进行求算，然后将所有杆加起来。对于任一特定杆，乘积中的每一个量（例如 M_U 或 M_L）为沿杆轴所度量的距离 x 的函数，具体地说，这些量可能沿长度为常数，也可能沿长度按直线变化，或者可能为高次方的函数，例如二次方或三次方。在计算时，为了节省时间，这些乘积积分可以预先求算出来，并将其结果列成表，以备查用。对于最常见函数的乘积积分简表已列于表 11-1 中。该表是以函数 M_U 和 M_L 来表示的，显然这些函数可以用任何其它函数来代替，例如以 V_U 和 V_L 或者以 T_U 和 T_L 来代替。该表的应用说明，将在下面诸例中进行叙述。

例题 1 图 11-4a 中所示桁架，于 A 点处承受荷载 P 和 $2P$。桁架的所有杆件均假设为棱柱形者，而且具有同样的轴向刚度 EA。试用单位荷载法计算该桁架 B 点的水平挠度和竖直挠度。

由于荷载仅作用于节点上，每根杆件中的轴向力沿该杆的整个长度为一常数。所以，我们可以应用方程(11-5)确定所需要求的挠度，关于这些挠度的计算列于表 11-2 中。该表前面两行标明桁架的杆件和它们的长度。用图 11-4a 所示桁架的静力平衡分析得到的轴向力 N_L 列于该表的第 3 行(拉力为正值)。

为了求出节点 B 的水平挠度 δ_H，我们在结构的 B 处加上水平单位

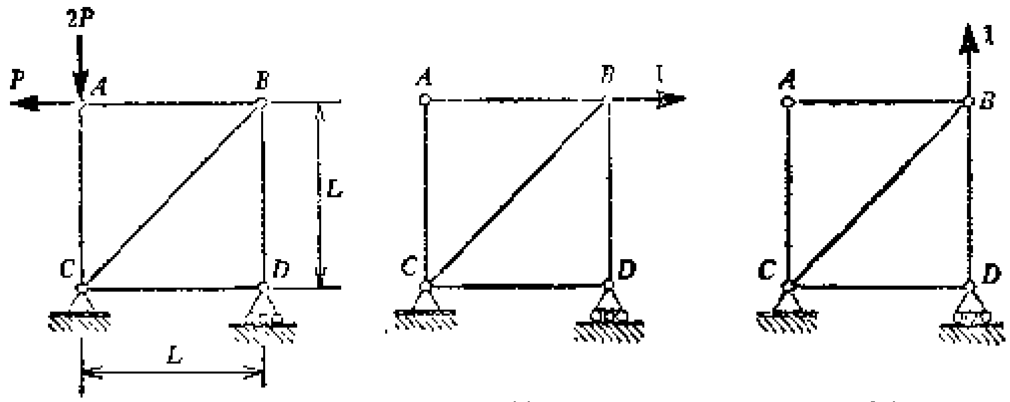


图 11-4 例题 1，用单位荷载法求桁架的变位

荷载(见图 11-4 b)。由于此单位荷载所产生的轴向力 N_U 列于表的第4行中。然后，对每一根杆件计算其乘积 $N_U N_L L$，并总加起来(第 5 行)。用 EA 去除此结果，得到所需要求的位移：

$$\delta_H = -3.828\frac{PL}{EA}$$

该表达式中的负号意味着挠度位于与单位荷载相反的方向，亦即向左。

可以用同样程序求 B 点的竖直挠度 δ_V。其相应单位荷载（采取向上为正)绘于图 11-4 c 中，对于这种加载情况的轴向力 N_U 列于表内第6行。在最后一行中，计算出乘积 $N_U N_L L$，并总加起来。最后，用 EA去除其和，得：

$$\delta_V = \frac{PL}{EA}$$

表 11-2 例题 1 的计算

(1) 杆	(2) 长 度	(3) N_L	(4) N_U	(5) $N_U N_L L$	(6) N_U	(7) $N_U N_L L$
AB	L	P	0	0	0	0
AC	L	$-2P$	0	0	0	0
BD	L	P	-1	$-PL$	1	PL
CD	L	0	0	0	0	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$-2.828PL$	0	0
				$-3.828PL$		PL

由于此结果为正，我们知道由于荷载 P 和 $2P$ 使节点 B 所产生的竖直挠度向上。

在此例中，为了简化，我们假设所有杆具有相同的横截面积。如果不是这样的情况，那么表 11-2 中需要增加附加行，列出其面积。然后，我们应该计算 $N_U N_L L/A$ 去代替第 5 行和第 7 行计算 $N_U N_L L$。当诸杆为不同弹性模量时可以同样容易地完成。

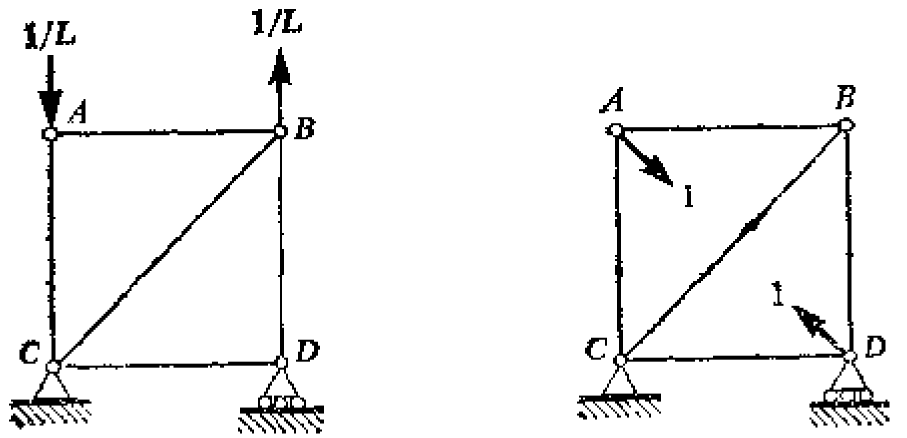


图 11-5 例题 2

例题 2 在本例中，我们将再次讨论图 11-4 a 中所示受力的桁架。然而，不是求节点的挠度，我们将要确定杆件的转角和两节点间距的变化。让我们首先假设需要求 AB 杆的转角。一般地，相应于转角的单位荷载为一单位力偶。对于本例，单位力偶由作用于 AB 杆端处相等而相反的力所组成，如图 11-5 a 所示。每一个力等于用 AB 杆的长度去除单位力偶。容易看出：相应于此力偶的位移为 AB 杆反时针方向旋转，我们只需要注意：在桁架产生虚变形过程中这两个力所做的外功为：

$$W_{ext}=\frac{1}{L}(\delta_a)+\frac{1}{L}(\delta_b)=\frac{1}{L}(\delta_a+\delta_b) \qquad \text{(d)}$$

式中 δ_a 为节点 A 的向下挠度，而 δ_b 为节点 B 的向上挠度。方程(d)中所出现的诸项的单位是一致的，因为每一个“1”代表单位力偶，其单位为长度乘力。δ_a 和 δ_b 这两个挠度之和被杆的长度去除则为 AB 杆的转角：

$$\theta_{ab}=\frac{\delta_a+\delta_b}{L} \tag{e}$$

根据方程(d)和(e)，我们得到

$$W_{ext}=1\cdot\theta_{ab} \tag{f}$$

这与预期的一样。因此，以图 11-5 a 所示两个力的形式表示单位力偶的作用能使我们求出转角 θ_{ab}。

表 11-3　　例题 2 的计算

(1) 杆	(2) 长　度	(3) N_L	(4) N_U	(5) N_UN_LL	(6) N_U	(7) N_UN_LL
AB	L	P	0	0	$-1/\sqrt{2}$	$-0.707\,PL$
AC	L	$-2\,P$	$-1/L$	$2\,P$	$-1/\sqrt{2}$	$1.414\,PL$
BD	L	P	$1/L$	P	$-1/\sqrt{2}$	$-0.707\,PL$
CD	L	0	0	0	$-1/\sqrt{2}$	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	0	0	1	$-2\,PL$
				$3\,P$		$-2\,PL$

表 11-3 给出了本例的计算；前三行与表 11-2 相同，但第 4 行包括图 11-5 a 所示荷载下的轴向力 N_U。第 5 行给出乘积 N_UN_LL，根据这些项之和我们得出

$$\theta_{ab}=\frac{3\,P}{EA}$$

式中正的结果，意味着杆为反时针方向转动。因而，荷载 P 和 $2\,P$ 所产生的需要求出的转角已经求得。可以用类似的程序确定任一其它杆的转角。

其次，让我们仍讨论图 11-4 a 中桁架的另一种位移，即两节点间距的变化。假设需要确定节点 A 和节点 D 沿它们连线的相对平动值 δ_{ad}。其相应单位荷载由两个作用于 A 与 D 连线上相等而相反的单位力(见图 11-5 b)组成。该桁架中所得的轴向力 N_U 均列于表 11-3 的第 6 行中，其乘积 N_UN_LL 均列于第 7 行中。因而，A 点和 D 点的相对平动为

$$\delta_{ad}=-\frac{2\,PL}{EA}$$

式中的减号表示 A 点与 D 点的间距增大（亦即，与单位荷载的方向相反）。

例题 3 在本例中我们将讨论图 11-4 a 所示桁架内一根杆件有均匀温度变化的效应。假设 BD 杆的温度均匀地增大 ΔT，因而该杆的长度增长 $\alpha L(\Delta T)$。为了计算该桁架诸节点的挠度，我们必须应用方程(11-8)。然而，由于桁架仅一根杆因温度变化而发生长度改变，在方程(11-8)中的总加号内将只有一项。

当求由于温度变化使节点 B 产生的水平挠度时，我们应用图 11-4 b 所示单位荷载，并从表 11-2 中第 4 行采用 N_U。因而，BD 杆中的力为$N_U=-1$，水平挠度为：

$$\delta_H=-\alpha L(\Delta T)$$

式中减号的意思是该挠度向左。用类似的程序，我们可以容易地计算此桁架任一其它节点的位移。

例题 4 本例中，我们回过去讨论梁的位移。假设需要确定部分跨度上承受强度为 q 的均匀荷载之棱柱形悬臂梁自由端 B 处的挠度 δ 和转角 θ（见图 11-6 a）。对此目的，我们将应用仅考虑弯曲变形影响

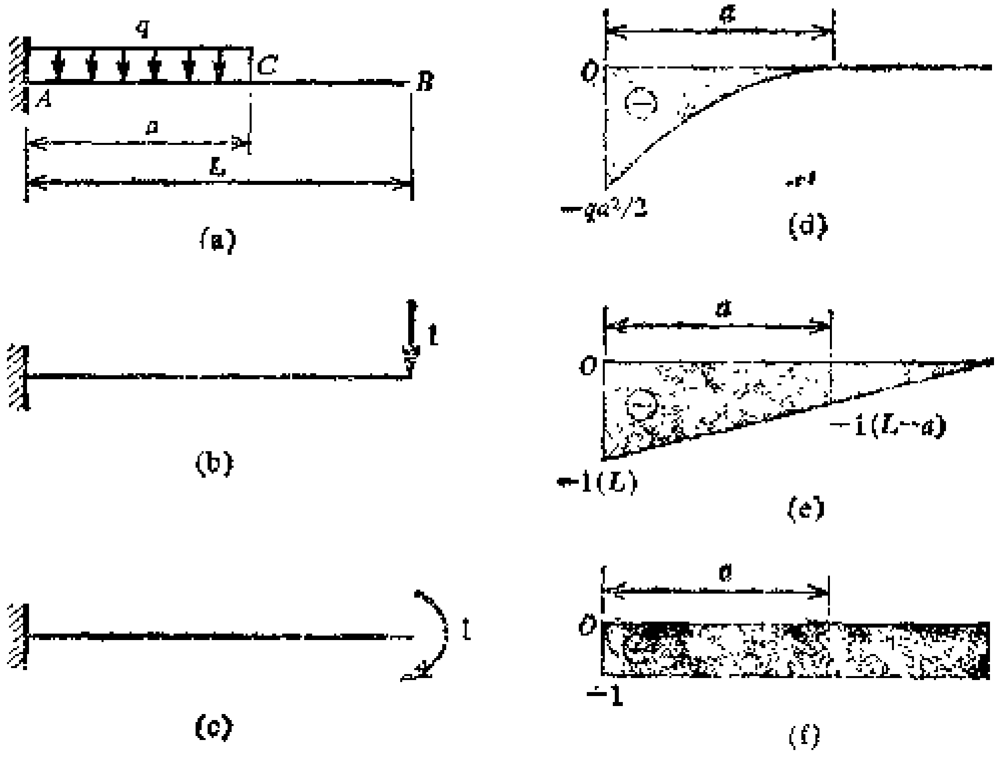


图 11-6 例题 4、用单位荷载法求梁的位移

的单位荷载方程(见方程 11-6)。

如果我们取左端 A 处为坐标原点，向右度量 x，那么由于荷载所产生的弯矩 M_L 的方程为

当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时 $\quad M_L=-\frac{q}{2}(a-x)^2$

当 $a\leqslant x\leqslant L$ 时 $\quad M_L=0$

式中正弯矩引起梁顶面受压。

相应于挠度 δ 的单位荷载示于图 11-6 b 中，此荷载引起的弯矩如下：

当 $0\leqslant x\leqslant L$ 时 $\quad M_U=-1(L-x)$

将 M_U 和 M_L 代入方程(11-6)，然后进行积分，我们得到 B 点向下的挠度：

$$\delta=\frac{1}{EI}\int_0^a(-1)(L-x)\left(-\frac{q}{2}\right)(a-x)^2dx=\frac{qa^3}{24EI}(4L-a)$$

求转角 θ 的方法是相类似的，只是单位荷载为一单位力偶，如图 11-6 c 所示。由于此荷载产生的弯矩为

当 $0\leqslant x\leqslant L$ 时 $\quad M_U=-1$

单位荷载方程成为

$$\theta=\frac{1}{EI}\int_0^a(-1)\left(-\frac{q}{2}\right)(a-x)^2dx=\frac{qa^3}{6EI}$$

此结果的正号表示 θ 角与单位荷载的方向(顺时针)相同。

另一种求位移的方法是应用乘积积分表 11-1。荷载 q 的弯矩图沿距离 a 为二次抛物线，如图 11-6 d 所示。在梁的这个相同范围内由于单位荷载产生的弯矩图分别为梯形和矩形 (见图 11-6 e 和 f)。采取表 11-1 中抛物线情况和梯形情况，我们得到乘积积分值：

$$\frac{a}{12}[-1(L-a)-3(L)]\left(-\frac{qa^2}{2}\right)=\frac{qa^3}{24}(4L-a)$$

现在用 EI 去除，我们得到与前面相同的挠度表达式。另外，按抛物线情况和矩形情况[1]得

$$\frac{a}{12}(-4)\left(-\frac{qa^2}{2}\right)=\frac{qa^3}{6}$$

1) 对于矩形的情况，可按表 11-1 中具有 $M_1=M_2$ 的梯形来求得。

它导致与上述转角 θ 相同的结果。乘积积分表连同弯矩图的应用，通常要比写出弯矩方程然后进行积分快一些。

例题 5　有一跨长为 L 并带有长度为 b 的挑臂的梁 ABC(图11-7 a)，温度发生变化，梁顶面温度为 T_1，底面温度为 T_2。试求该梁挑臂端的竖直挠度 δ_c。

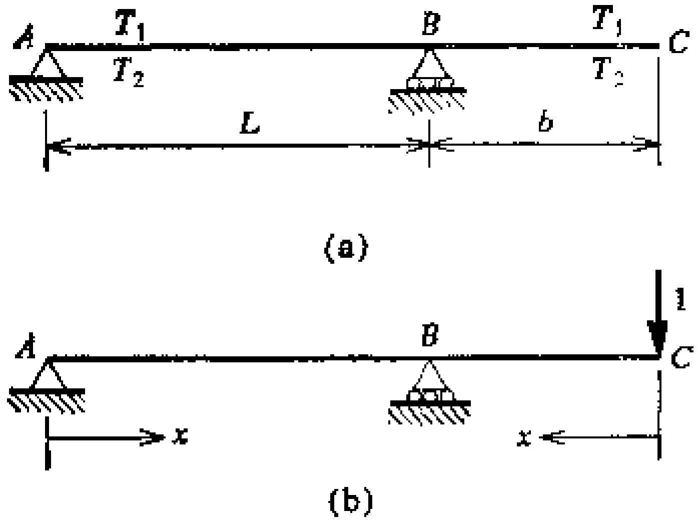


图 11-7　例题 5．温度差影响下的梁

相应于 δ_c 的单位荷载绘于图 11-7 b 中，由于此单位荷载作用，AB 范围内的弯矩为：

$$当 0\leqslant x\leqslant L 时 \qquad M_U=-1\left(\frac{b}{L}\right)x$$

式中 x 是从 A 点向右度量的距离。另外，BC 范围内的弯矩为

$$当 0\leqslant x\leqslant b 时 \qquad M_U=-1(x)$$

式中 x 是从 C 点向左度量的距离。在梁的这两部分中，弯矩 M_U 为负，因为梁的顶面产生拉伸。

知道此弯矩后，现在我们可以直接代入方程(11-9)，得出挠度：

$$\delta_c=\int_0^L-1\left(\frac{b}{L}\right)(x)\frac{\alpha(T_2-T_1)}{h}dx+\int_0^b-1(x)\frac{\alpha(T_2-T_1)}{h}dx$$

根据它得出

$$\delta_c=\frac{\alpha b(T_1-T_2)(L+b)}{2h}$$

式中 h 为梁的高度，α 为热膨胀系数。如果算得的 δ_c 值为负，那么其挠度实际上向上，只要 T_2 大于 T_1，这种情况就将存在。

例题 6 图 11-8 a 所示平面框架于 A 点处为一固定支承，自由端 C 处承受竖直荷载 P。AB 杆与 BC 杆刚接于 B 处，框架的两根杆具有常数弯曲刚度 EI。试确定 C 点处的水平挠度 δ_H、竖直挠度 δ_V 和转角 θ。

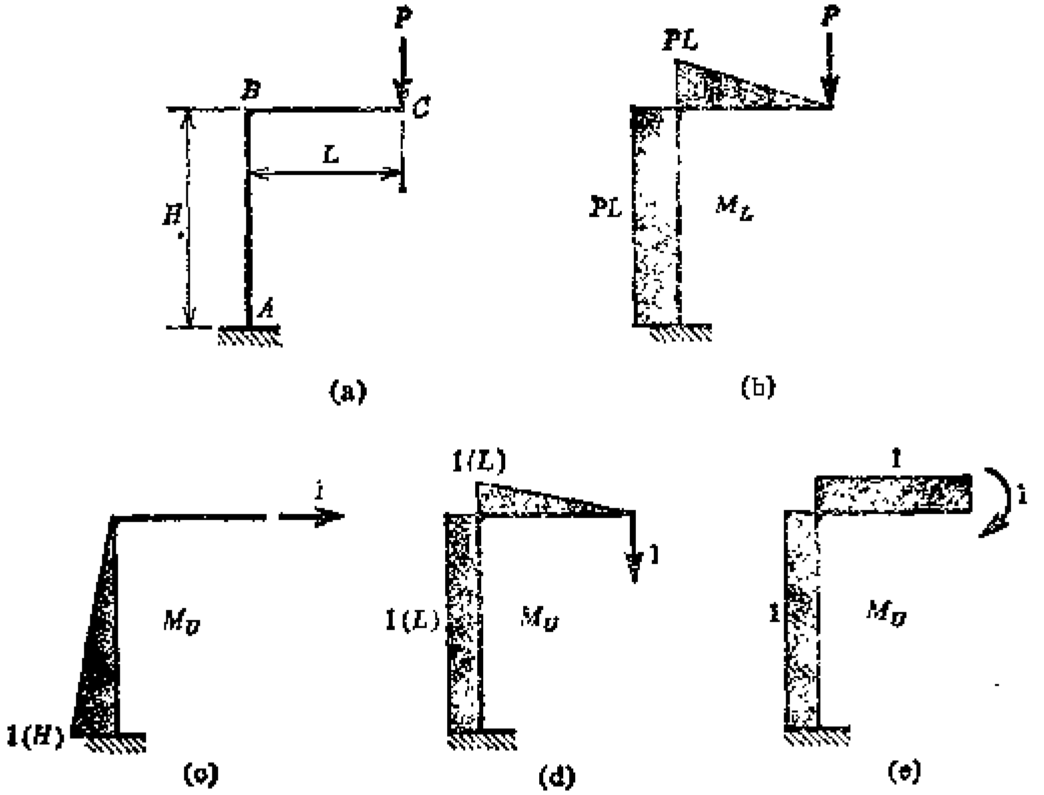


图 11-8 例题 6 和 7、平面框架的位移

由于荷载 P 引起的弯矩 M_L 绘于图 11-8 b 中，该弯矩图绘于杆件受拉一侧。相应于 C 点处水平挠度的单位荷载、竖直挠度的单位荷载和转角的单位荷载示于该图的后面三部分内。每一种情况中所产生的 M_U 弯矩图均示于杆件的受拉侧。

知道弯矩之后，现在我们可以用积分（见方程 11-6）或应用表 11-1 中所列乘积积分公式来求出其挠度。这后一种方法在本例中似乎比较简单。例如，为了求 δ_H，我们根据图 11-8 c 采用 M_U，根据图 11-8 b 采用 M_L。然后应用表 11-1，我们得：

$$\frac{H}{2}(1)(H)(PL)$$

用 EI 去除此表达式得出 C 点的水平挠度：

$$\delta_H = \frac{PLH^2}{2EI}$$

根据图 11-8 b 和 d 以类似方式求出竖直挠度。对于 BC，我们有两个三角形的情形，对于 AB 有两个矩形的情形，因而，根据表 11-1，我们求出：

$$\frac{L}{3}(1)(L)(PL)+\frac{H}{2}(2L)(PL)=\frac{PL^3}{3}+PL^2H$$

竖直挠度则为

$$\delta_V = \frac{PL^2(L+3H)}{3EI}$$

最后，应用图 11-8 b 和 c 以及表 11-1，我们得到

$$\frac{L}{2}(PL)(1)+\frac{H}{2}(1)(2PL)=\frac{PL^2}{2}+PLH$$

根据它得出

$$\theta = \frac{PL(L+2H)}{2EI}$$

因而，框架所需要求的挠度已经确定。

例题 7　参照例题 6 所述平面框架，让我们确定杆中轴向变形对位移 δ_H，δ_V 和 θ 的附加影响。假设两杆具有常数轴向刚度 EA。

附加位移借助方程(11-5)来求出。该方程中轴向力 N_L 是由于图 11-8 a 所示荷载 P 所引起的力，唯一的这种力是 AB 杆中的 $N_L=-P$。为了求水平挠度 δ_H，我们从图 11-8 c 采取轴向力 N_U。唯一的这种力是 BC 杆中的 $N_U=1$，所以，我们得出结论：水平挠度 δ_H 不受轴向变形存在的影响。

为了求得竖向挠度 δ_V，我们根据图 11-8 d 观察出：由于单位荷载所引起的唯一的轴向力为 AB 杆的 $N_U=-1$，因此，由于轴向变形所产生的竖直挠度(根据方程 11-5)为：

$$\sum\frac{N_UN_LL}{EA}=\frac{(-1)(-P)(H)}{EA}=\frac{PH}{EA}$$

此量加到例题 6 早已求得的结果上，可以得出 C 点处的总竖直挠度：

$$\delta_V=\frac{PL^2(L+3H)}{3EI}+\frac{PH}{EA}$$

将数字值代入此表达式，通常将发现代表轴向变形影响的最后一项与其第一项相比非常小。由于这个理由，在分析平面框架时通常的做法是仅考虑弯曲变形的影响，而完全略去轴向变形的影响。

为了完成这个例题，现在我们转到旋转角 θ 上。从观察看到相应单位荷载(图 11-8 e)对于杆件不产生轴向力。因此，轴向变形的存在对 θ 没有影响。

例题 8 有一曲杆 AB，其中心线形成半径为 R 的四分之一圆，如图 11-9 a 所示。该杆 A 点处为固定支承，自由端 B 处承受竖直荷载 P。试求出 B 点水平挠度 δ_H 的表达式。

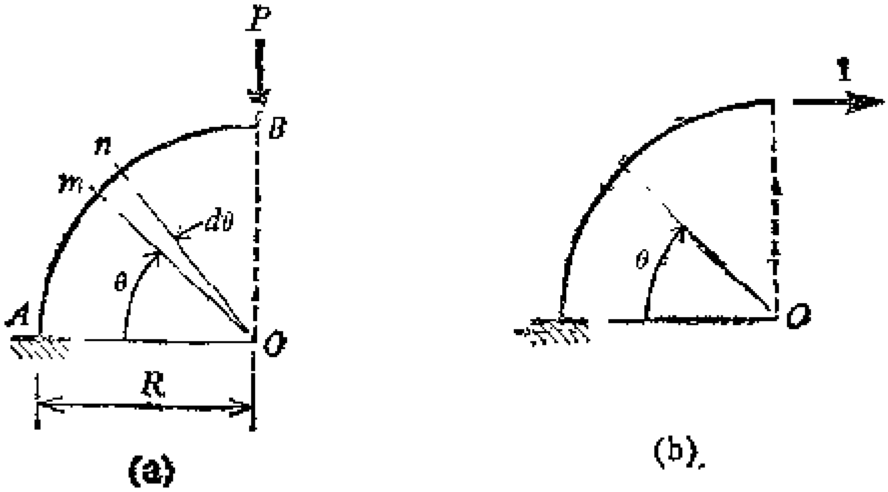


图 11-9 例题8. 曲杆的挠度

用以求曲杆位移的单位荷载方程可写成下列一般形式

$$\Delta=\int\frac{M_U M_L ds}{EI} \tag{11-11}$$

式中 ds 等于 $Rd\theta$，它为杆上单元 mn 的长度。假设该杆与半径 R 相比是很薄的，因而原来对直杆弯曲所导得的上面公式可以应用[1]。

由于荷载 P 所引起的弯矩 $M_L=-PR\cos\theta$，式中假设正弯矩引起曲杆外侧受压。另外，由于水平单位荷载(图 11-9 b) 所产生的弯矩

1) 粗曲杆的弯曲在《高等材料力学》中作了讨论。

$M_U=-R(1-\sin\theta)$。将 M_U 和 M_L 代入方程(11-11)，进行积分，我们得出：

$$\delta_H=\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}(-R)(1-\sin\theta)(-PR\cos\theta)Rd\theta=\frac{PR^3}{2EI}$$

因而，B 点的水平挠度已用单位荷载法求出。

11.4 梁的剪切挠度

虚功原理和单位荷载法对求解剪力效应所引起梁的挠度提供了极好的方法。在前面第 6.11 节所介绍的剪切挠度讨论中，我们应用了包括有剪切系数 α_s 一项的挠度曲线微分方程。此剪切系数等于梁中性轴处剪应力与平均剪应力之比(举一个例，对于矩形梁 $\alpha_s=3/2$)。在单位荷载法的一般方程(方程 11-4) 中出现相同的剪切系数。应用微分方程法或应用方程(11-4) 所得到的剪切挠度都是近似的，因为至少有这样两个原因：第一，由于该挠度是基于中性轴处剪切应变之上的，因而它们未考虑整个梁高上剪切应变的变化。第二，因为该挠度是建立在仅对纯弯曲情况所导得的弯曲理论上的。这后一个缺点仅可用较精确的弹性理论的方法来补救，它的一些结果已给于第 6.11 节中，而前一个缺点可藉应用虚功原理(见方程 11-1)来去掉，并藉对梁的整个体积进行积分得到内功。这种方法导出比应用剪切系数 α_s 较为精确的系数，这是现在要详加说明的。

求梁挠度的单位荷载法是基于虚功原理之上的，这里需要求出内功和外功的表达式。由于单位荷载是结构上的唯一荷载，其外功的表达式 $W_{ext}=1\cdot\Delta$，如上节中方程(a) 所给的那样。在此方程中，Δ 代表由于梁上实际荷载所引起需要求出的挠度，而 1 代表相应于该挠度的单位荷载。

内虚功是梁中应力(该应力是因单位荷载所引起的)移过

实际荷载所引起的变形时所做的功．先前我们考虑四种可能的应力合力——轴向力、弯矩、剪力和扭矩．现在由于限制我们注意梁的剪切挠度，我们将省略掉轴向力和扭矩的效应．另外，在前面推导中我们用每一个应力合力与梁单元的适当的变形量相乘去求得内虚功，用这种方法我们得到了上节中的方程(b)．然而，现在我们将直接讨论梁中的应力，对梁的整个体积进行积分来得出内虚功．

让我们讨论从承受单位荷载的梁内切出尺寸为 dx, dy, dz 的微分单元（图 11-10 a)．作用于此单元侧边上的是单位荷载所产生的弯矩 M_U 和剪力 V_U 引起的法向应力 σ 和剪应力 τ(图 11-10 b)．这些应力可以根据弯曲公式和剪切公式(方程 5-10 和 5-18)算出：

$$\sigma=\frac{M_U y}{I} \qquad \tau=\frac{V_U Q}{Ib}$$

当应用单位荷载法时，给予该单元的虚变形选择与实际荷载

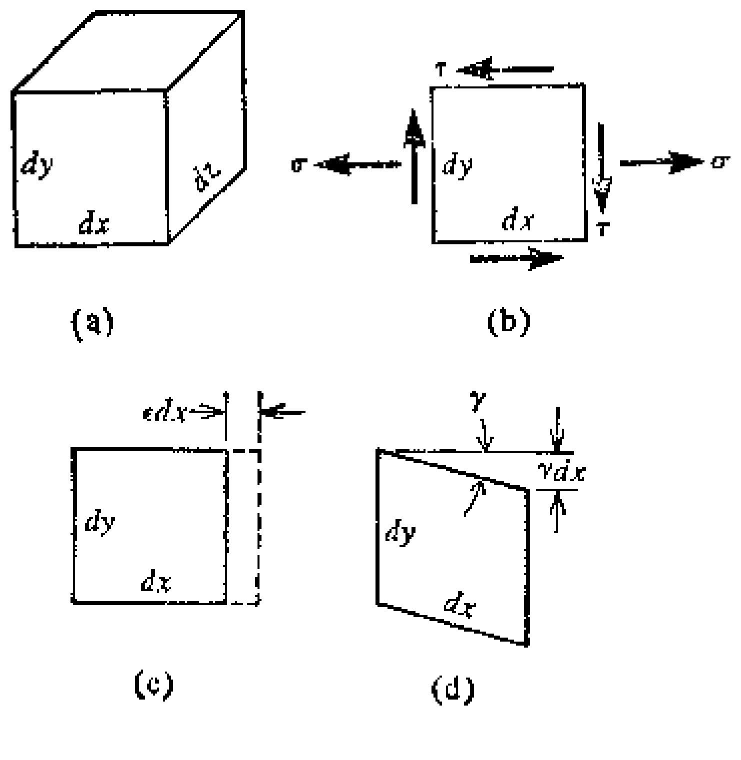


图 11-10

所引起的变形一样．这些变形包括弯矩 M_L 所引起的伸长（图 11-10 c）和剪力 V_L 所引起的剪切变形（图 11-10 d）。与这些变形相关的伸长应变 ϵ 和剪切应变 γ 为

$$\epsilon=\frac{M_L y}{EI} \qquad \gamma=\frac{V_L Q}{GIb}$$

所以，作用于该微分单元上应力 σ 和 τ 的内虚功为：

$$dW_{\text{int}}=(\sigma dydz)(\epsilon dx)+(\tau dydz)(\gamma dx)$$
$$=\frac{M_U M_L y^2}{EI^2}dxdydz+\frac{V_U V_L Q^2}{GI^2b^2}dxdydz$$

其总内功用上面表达式对梁的整个体积进行积分来求得，因而

$$W_{\text{int}}=\int\frac{M_U M_L y^2}{EI^2}dxdydz+\int\frac{V_U V_L Q^2}{GI^2b^2}dxdydz$$

这个表达式可藉考虑梁上给定横截面处的下列诸量均为常数来简化：M_U, M_L, V_U, V_L, E, G 和 I．所以，我们可以将上面每一积分分成对整个横截面积的积分和沿梁轴线的积分：

$$W_{\text{int}}=\int_L\frac{M_U M_L}{EI^2}\left[\int_A y^2 dydz\right]dx$$
$$+\int_L\frac{V_U V_L}{GI^2}\left[\int_A\frac{Q^2}{b^2}dydz\right]dx \tag{a}$$

式中符号 L 和 A 分别代表该积分是对梁的整个长度 L 和对整个横截面积 A 进行的．上述方程中方括号内的第一项是为横截面的特性——惯性矩．方括号内的第二项也只与梁的横截面尺寸有关；所以，采取定义新的横截面特性 f，是比较方便的，此特性称为**剪切形式系数**．该量定义如下：

$$f_s=\frac{A}{I^2}\int_A\frac{Q^2}{b^2}dA \tag{11-12}$$

式中 $dA=dydz$ 代表梁横截面中面积的单元．形式系数为一无量纲的量，它可以就每一特定梁的形状求算出来，在后面将

加以说明．分别用 I 和 f_sI^2/A 代替方程(a)中方括号内的两项，我们得出内虚功的最终表达式为：

$$W_{int}=\int\frac{M_UM_Ldx}{EI}+\int\frac{f_sV_UV_Ldx}{GA}$$

最后，挠度 Δ 的单位荷载方程可令外功等于内功来获得：

$$\Delta=\int\frac{M_UM_Ldx}{EI}+\int\frac{f_sV_UV_Ldx}{GA} \qquad (11-13)$$

其中单位荷载已划于方程之外（如推导方程 11-3 时所做那样）．方程(11-13)可用来求出考虑弯矩和剪力效应时梁的挠度．该方程右边第一项与前面所得的弯曲项相同(见方程11-4)．然而，第二项与前面所得的剪切项稍有不同，其不同处在于以形式系数 f_s 代替剪切系数 α_s．因此，梁的剪切刚度现在定义为 GA/f_s 而不是 GA/α_s．

对于每一特定横截面形式其剪切形式系数必须用方程(11-12)求出．例如，如果横截面为矩形、它的宽度为 b、高度为 h(见图 5-12)，其一次矩 Q 的表达式为（见第 5.3 节方程 d)：

$$Q=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right)$$

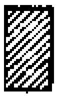
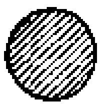
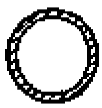
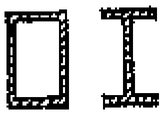
另外，对于矩形梁，A/I^2 这个量等于 $144/bh^5$．所以其形式系数为：

$$f_s=\frac{144}{bh^5}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{1}{4}\left(\frac{h^2}{4}-y_1^2\right)^2\ bdy_1=\frac{6}{5}$$

用类似方式可以求出其它横截面的形式系数．例如，实心圆形截面的形式系数为 10/9，薄管截面为 2．对于 I 梁或箱形梁，我们可以假设剪应力沿腹板高度均匀分布且近似等于剪力被腹板面积去除(见第 5.3 节和图 5-14)，这些假定导出这样的结论：这种梁的形式系数为 A/A_{web}，其值一般在 2 至 5

范围内。几种剪切系数 α_s 与形式系数 f_s 的比较，列于表11-4中。

表 11-4　剪切系数 α_s 和形式系数 f_s

	截　　面	α_s	f_s
	矩形	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$
	圆	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$
	薄壁管	2	2
	I 形或箱形截面	$\frac{A}{A_{web}}$	$\frac{A}{A_{web}}$

作为确定梁的剪切挠度的一个例子，让我们应用单位荷载法(方程11-13)得出承受均匀荷载的简支梁中央处之挠度。从梁的左边支承来度量坐标距离 x，则由于实际荷载所产生的弯矩和剪力的表达式为

$$M_L=\frac{qLx}{2}-\frac{qx^2}{2}\qquad V_L=\frac{qL}{2}-qx$$

式中 L 为梁的长度，q 为均匀荷载的强度。作用于梁中央处的单位荷载产生下列弯矩和剪力：

$$\text{当 } 0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}\text{时}\qquad M_U=\frac{1(x)}{2}\qquad V_U=\frac{1}{2}$$

将上面诸量代入方程(11-13)，得出梁中央处的下列挠度表达式：

$$\delta=\frac{2}{EI}\int_0^{L/2}\frac{x}{2}\left(\frac{qLx}{2}-\frac{qx^2}{2}\right)dx+\frac{2f_s}{GA}\int_0^{L/2}\frac{1}{2}\left(\frac{qL}{2}-qx\right)dx$$

$$=\frac{5qL^4}{384EI}\left(1+\frac{48f_sEI}{5GAL^2}\right) \tag{11-14}$$

此结果与前面用微分方程求解所得的结果一致(见方程 6-46)，只是以形式系数 f_s 代替剪切系数 α_s。

如果我们对中央处作用集中荷载 P 的简支梁应用单位荷载法，我们得出中央处的挠度：

$$\delta=\frac{PL^3}{48EI}\left(1+\frac{12f_sEI}{GAL^2}\right) \tag{11-15}$$

该式与方程(6-50)相同，只是 α_s 被 f_s 所代替。对于自由端处作用集中荷载 P 的悬臂梁，单位荷载法得出自由端处的挠度：

$$\delta=\frac{PL^3}{3EI}+\frac{f_sPL}{GA} \tag{11-16}$$

注意：在用单位荷载法求出此最后结果时，我们未作有关固定端处支承细节的任何假定。然而方程(11-16)右边第二项与前面第 6.11 节中的例题在下述特定情况时相一致，即假设固定支承处边界条件是可以自由扭曲，同时位于中性轴处的单元竖直侧边保持竖直(见第 6.11 节方程 i)。对于固定支承处的其它条件，早先的方法得出不同的结果。因而，当应用单位荷载法时，隐含着有关固定支承处边界条件的假定[1)]。

剪切应变能　在承受剪应力 τ 的梁的单元中，其剪切应变能(见图 11-10 b 和 d)等于 $u\,dx\,dy\,dz$，式中 u 为单位体积的剪切应变能。单位体积的应变能 $u=\tau^2/2G$，按方程(1-23 a)求得。因而，我们可以用剪应力 τ 表示剪切应变能 dU_s 如下：

$$dU_s=\frac{\tau^2}{2G}dx\,dy\,dz$$

---

1) 用单位荷载法得到剪切所产生梁挠度的表可在参考文献 6-18 中找到。

因为剪应力 τ 等于 VQ/Ib，剪切应变能成为：

$$dU_s=\frac{V^2Q^2}{2GI^2b^2}dxdydz$$

将此表达式对梁的整个体积进行积分，得出总的剪切应变能：

$$U_s=\int_L\frac{V^2}{2GI^2}\left[\int_A\frac{Q^2}{b^2}dydz\right]dx$$

如同前面一样，符号 L 和 A 说明这些积分分别沿梁长和对整个横截面积进行求算。与方程(11-12)比较，表明方括号中的那项等于 f_sI^2/A。所以，U_s 的表达式简化为：

$$U_s=\int\frac{f_sV^2dx}{2GA} \tag{11-17}$$

此方程给出以剪力 V 表示的梁的剪切应变能。它相应于前面所推导的剪切应变能方程(方程 6-54)，只是 α_s 被 f_s 所代替。

一般地说，在求剪切所产生梁的挠度或求算剪切产生的应变能时，最好采用形式系数 f_s 而不用剪切系数 α_s。形式系数 f_s 非常接近用弹性理论法所求得的较为精确的值(见方程 6-53)。

11.5 互等定理

本章中，我们将应用应变能的概念去导出互等位移定理和互等功定理。这些互等定理在许多情况下有用，它们在结构分析中具有重要的地位。此外，它们概括了某些适用于线性弹性结构的基本理论概念。

互等位移定理 为了说明这一定理，让我们以自由端承受集中力 P 的悬臂梁 AB (图 11-11 a) 作为例子。根据附录 D 中的公式，我们可以容易地求出此梁中点 C 处的挠度为

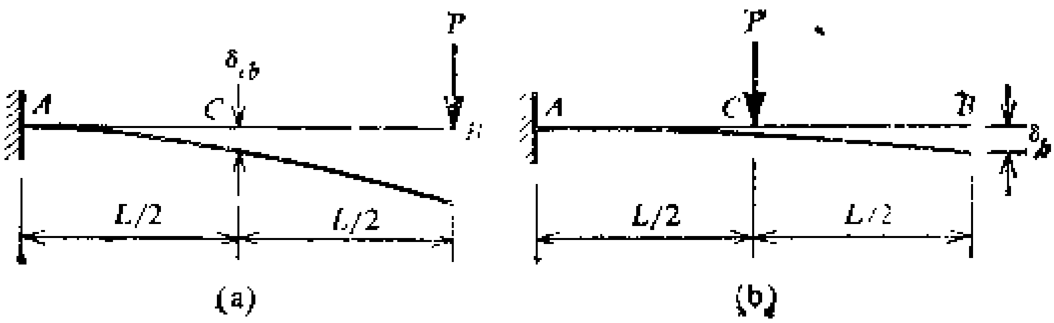


图 11-11 互等位移定理

$$\delta_{cb}=\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

上述方程中 δ 所用注脚符号内的第一个注脚，表示发生挠度处的点；第二个注脚表示荷载作用处的点。因而，符号 δ_{cb} 表示由于作用在 B 点处的荷载在 C 点处所引起的挠度。

现在让我们来讨论同一悬臂梁承受了作用于中点 C 处的荷载 P(图 11-11 b)。在这种情况下，我们希望求出自由端 B 处的挠度，该挠度用符号 δ_{bc} 表示。接着参照附录 D 中的公式，我们求出：

$$\delta_{bc}=\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

它等于挠度 δ_{cb}。因而，我们观察出作用于 B 处的荷载 P 使 C 处产生的挠度等于作用于 C 处的荷载 P 使 B 处所产生的挠度。这种叙述是为互等位移定理的一个特定情况。

为了较一般地来证明该定理，让我们讨论任何类型的结构，假设它承受两种加载状态。为了方便，将讨论简单梁(见图 11-12)，但是对于任何其它属于线性的结构也都是可以满足的。在第一种加载状态时，力 P 作用于结构上任一 A 点处(图 11-12 a)，第二种状态，同样的荷载 P 作用于任一其它 B 点处(图 11-12 b)。对于第一种加载状态，按照前面所示注脚符号分别以 δ_{aa} 和 δ_{ba} 表示 A 点和 B 点处的挠度。用类似方

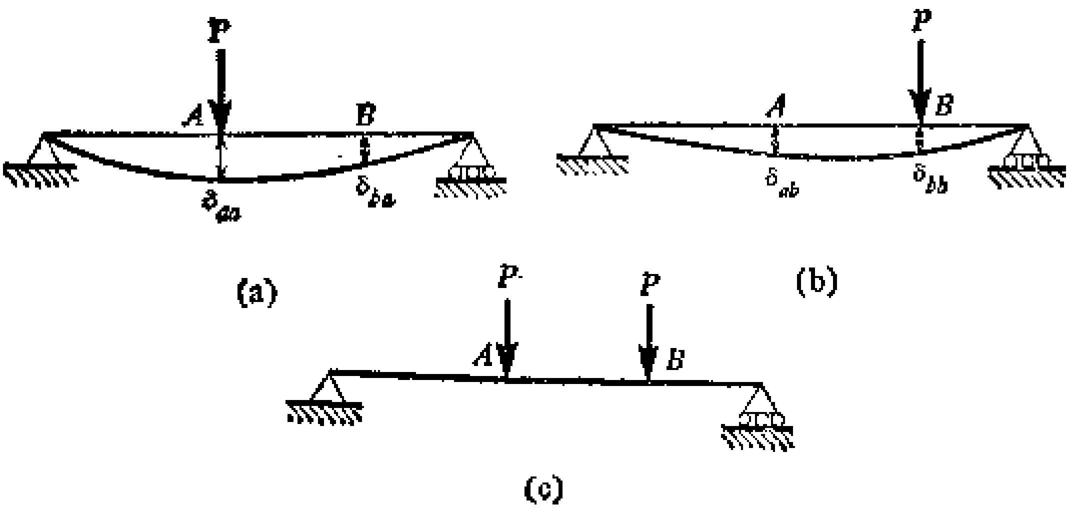


图 11-12 互等位移定理

式对第二种加载状态下的挠度写为 δ_{ab} 和 δ_{bb}。

这两个梁的挠度也可以应用荷载与位移之间的"相应"的概念来叙述(见第 11.3 节)。例如，位移 δ_{aa} 和 δ_{ab} 均相应于图 11-12 a 中所示的荷载 P。为了搞清楚这件事，必须回忆相应于集中荷载的位移是指该力作用点处的挠度，同时，此挠度按该力的方向度量。然而，不一定要求挠度与引起此挠度的力相对应。挠度 δ_{aa} 这种情况是由第一种加载状态下力 P 引起的，而 δ_{ab} 这种情况是第二种加载状态下力 P 所引起的。尽管这样，两个挠度均相应于图 11-12 a 的荷载 P。类似地，虽然 δ_{ba} 是由于第一种荷载所引起，δ_{bb} 是由于第二种荷载所引起，但挠度 δ_{ba} 和 δ_{bb} 均相应于第二种加载的荷载 P。这种用来鉴别位移的相应的概念在后面讨论中是非常有用的。

现在回到互等位移定理的推导，让我们假设两个力 P 同时作用于梁上(图 11-12 c)。如果梁的材料是线性弹性的，而且挠度非常小，我们可以应用迭加原理得出该梁的挠度。相应于作用在 A 点处荷载 P 的挠度为 $\delta_{aa}+\delta_{ab}$，相应于作用在 B 点处荷载 P 的挠度为 $\delta_{ba}+\delta_{bb}$。知道这些挠度之后，我们可以容易地计算当这两个荷载 P 慢慢地同时作用于梁上所

做的功。此功等于梁的总应变能 U，为

$$U=\frac{1}{2}P(\delta_{aa}+\delta_{ab})+\frac{1}{2}P(\delta_{ba}+\delta_{bb}) \tag{a}$$

它是按方程(1-15)所得。

承受两个荷载的梁（图 11-12 c）的总应变能与两个荷载所作用的次序无关。由于梁是线性的，如果两个荷载同时作用或者一个荷载先作用然后再作用另一个荷载，其应变能必定相同。让我们假设 A 点处的荷载先作用，随后再作用 B 点处荷载。于是，第一个荷载作用过程中梁的应变能为：

$$\frac{1}{2}P\delta_{aa} \tag{b}$$

因为此荷载引起挠度 δ_{aa}，如图 11-12 a 所示。当第二个荷载作用时，B 点处有一等于 δ_{bb} 的附加挠度，因此，第二个荷载所作的功等于

$$\frac{1}{2}P\delta_{bb} \tag{c}$$

而且梁中产生这个量的附加应变能。然而，我们不应忽视这样的事实：当 B 点处的荷载作用上去时，早已作用于 A 点处的荷载 P 将要移过附加挠度 δ_{ab}。第一个荷载所做的相应功为

$$P\delta_{ab} \tag{d}$$

因此产生这个量的应变能。表达式 (d) 中没有二分之一的系数，因为在附加挠度 δ_{ab} 发生过程中力 P 保持为常数。将表达式(b)，(c)和(d)加起来，得出当荷载顺序加上去时的总应变能：

$$U=\frac{1}{2}P\delta_{aa}+\frac{1}{2}P\delta_{bb}+P\delta_{ab} \tag{e}$$

这个应变能必定与两个荷载同时作用时所产生的应变能（见方程a）相同，令应变能的两个表达式相等，则得出下列结果：

$$\delta_{ab}=\delta_{ba} \tag{11-18}$$

此方程表示互等位移定理，它可用下列方式来叙述．作用于 B 点处的荷载使 A 点处所产生的挠度等于作用于 A 点处相同荷载使 B 点处所产生的挠度．可以看出挠度的正方向与相应荷载的正方向相同．

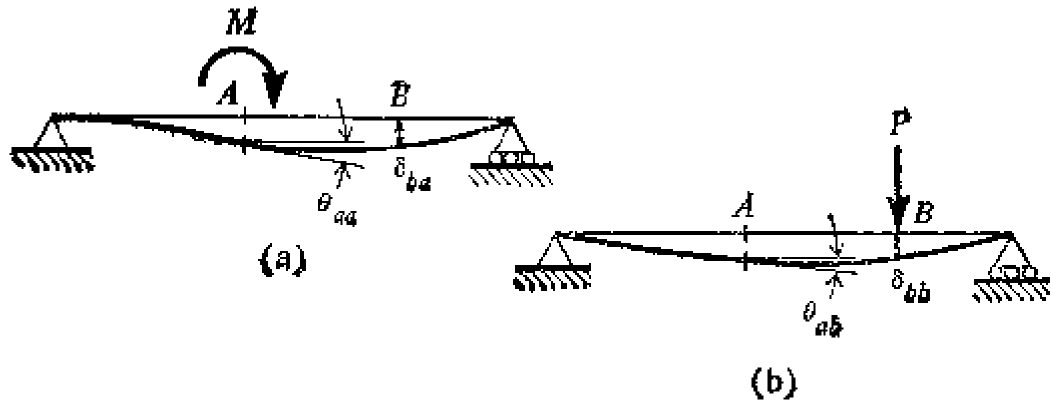


图 11-13 互等位移定理

互等位移定理也可用于一个荷载为力而另一个为力偶，或者两个均为力偶的情况．为了说明前一种可能性，我们可以再次讨论承受两种加载状态的简单梁，只是现在第一种加载是 A 点处作用着力偶 M（图 11-13）．在第一根梁上相应于 M 的位移为转角 θ_{aa}，而第二根梁中为 θ_{ab}．重复上述推导中的相同步骤，我们得出当这两个荷载 M 和 P 同时作用时梁的下列应变能之表达式：

$$U=\frac{1}{2}M(\theta_{aa}+\theta_{ab})+\frac{1}{2}P(\delta_{ba}+\delta_{bb})$$

当先作用力偶 M，随后作用力 P 时，其应变能为：

$$U=\frac{1}{2}M\theta_{aa}+\frac{1}{2}P\delta_{bb}+M\theta_{ab}$$

令这两个应变能的表达式相等，得出

$$M\theta_{ab}=P\delta_{ba} \tag{11-19}$$

如果荷载 M 和 P 在数字上相等，那么 θ_{ab} 和 δ_{ba} 也将在数字

上相等．所以，对于这种情况，我们可以叙述互等位移定理如下：如果力和力偶数字上相等，那么由于作用于 B 点处的集中力使 A 处产生的转角数字上等于作用于 A 点处的力偶使 B 处产生的挠度．

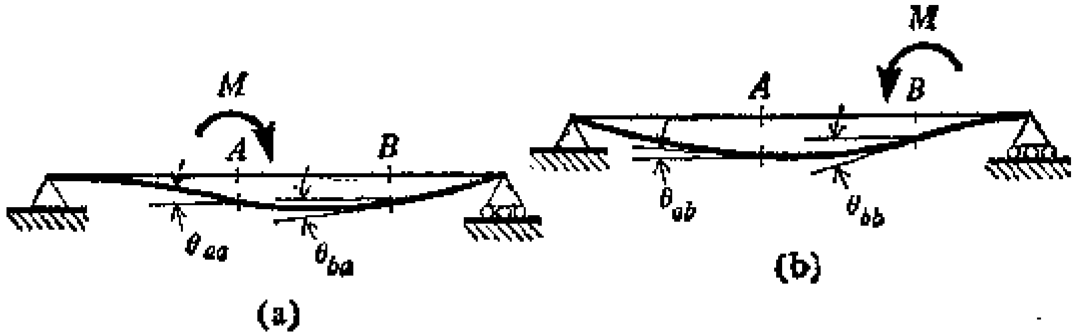


图 11-14 互等位移定理

如果作用于结构上的两个荷载均为力偶 M（图 11-14），那么我们将得出：

$$\theta_{ab}=\theta_{ba} \tag{11-20}$$

在这种情况下，互等位移定理叙述为：作用于 B 点处的力偶使 A 点处所产生的转角等于相同力偶作用于 A 点处使 B 点处所产生的转角．

纯粹为了说明性的目的，上述互等位移定理只是对简单梁所推导的，正如早已说明那样．任何一种其它类型的结构，如桁架、框架，甚至粗笨的物体，也是可以应用的，因为其推导仅建于应变能的考虑和迭加原理的基础之上．因而，该定理是极为普遍的，适用于结构中要讨论的任何一种变形，如轴向变形、剪切变形或扭转变形．应用这个原理的唯一限制是迭加原理必须要能成立，这就要求结构是线性弹性的．如果材料服从虎克定律，而且其挠度足够微小，以致所有计算可以根据结构的未变形的几何图形去进行，这个限制条件就可得到满足[1]．

1) 互等位移定理首先是由 J. C. Maxwell 得出的，发表于 1864 年（见参考文献 11-1），通常称它为马克斯威尔互等定理．

互等功定理　此定理比互等位移定理要普遍得多，且把这后者作为一种特殊情况包括在内。为了导出此定理，让我们讨论任一适用迭加原理的线性弹性体(图 11-15) 此物体可以代表梁、桁架、框架或其它类型的结构，如上节所说明的那样。该结构必须考虑两种加载状态。在第一种状态中(图 11-15 a)，有 m 个荷载 $P_1, P_2 \cdots P_m$；在第二种状态中(图 11-15 b)，有 n 个荷载 $Q_1, Q_2 \cdots Q_n$。在第一种状态中相应于不同荷载 P 和 Q 的挠度用带有识别相应于每一挠度的特定荷载为注脚的符号 δ 来表示。例如，δ_{Q_2} 代表相应于力 Q_2 的挠度。由此得出的挠度虽然没有这样的含义：Q_2 作用的 p 点仅顺 Q_2 的方向移动(见图 11-15 a)，但是该挠度必须按力 Q_2 的方向度量。p 点也可以具有垂直于 δ_{Q_2} 方向的位移分量，但此分量不参予我们的讨论，因为它不相应于 Q_2。

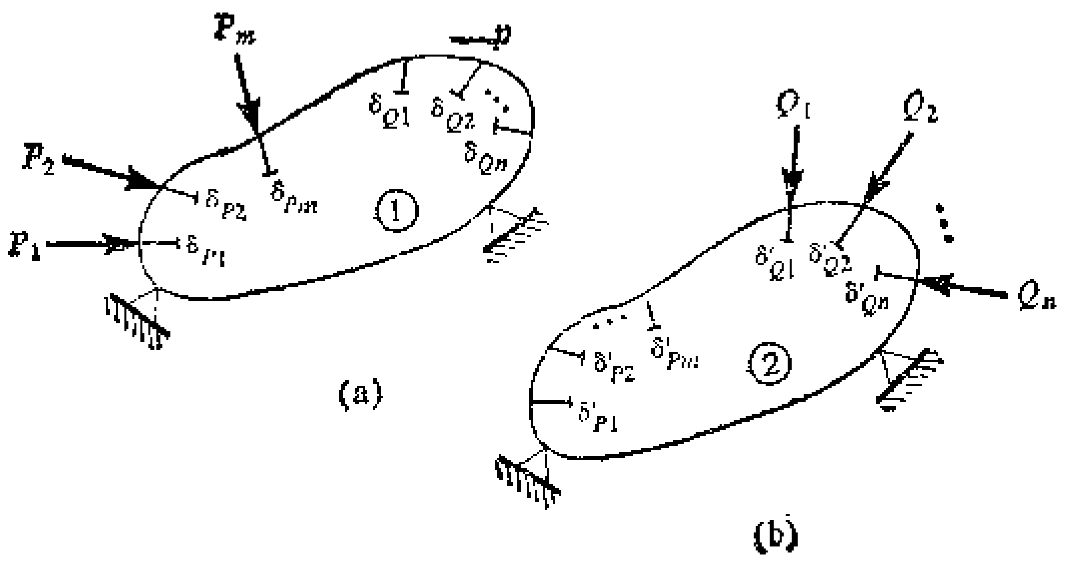


图 11-15　互等功定理

在第二种加载状态中(图 11-15 b)，其情况相似：荷载 Q 引起的位移，一部分相应于力 P，一部分相应于力 Q。所有这些位移均用符号 δ' 表示，并且也用注脚标明相应于位移的力。

为了导出互等功定理，我们将应用用于推导互等位移定理时同样的有关应变能概念。如果荷载系 P 和荷载系 Q 同时作用于物体上，总应变能(等于这些力所做的功)为

$$U=\frac{1}{2}P_1(\delta_{P1}+\delta'_{P1})+\frac{1}{2}P_2(\delta_{P2}+\delta'_{P2})+\cdots+\frac{1}{2}P_m(\delta_{Pm}+\delta'_{Pm})$$

$$+\frac{1}{2}Q_1(\delta_{Q1}+\delta'_{Q1})+\frac{1}{2}Q_2(\delta_{Q2}+\delta'_{Q2})+\cdots+\frac{1}{2}Q_n(\delta_{Qn}+\delta'_{Qn}) \quad \text{(f)}$$

此应变能必定与首先作用整个荷载系 P 然后作用整个荷载系 Q 所得的总应变能相同。当单独作用诸荷载 P 时，其应变能为：

$$\frac{1}{2}P_1\delta_{P1}+\frac{1}{2}P_2\delta_{P2}+\cdots+\frac{1}{2}P_m\delta_{Pm} \quad \text{(g)}$$

当作用第二个荷载系时，我们得到下列由于诸力 Q 所做功产生的应变能：

$$\frac{1}{2}Q_1\delta'_{Q1}+\frac{1}{2}Q_2\delta'_{Q2}+\cdots+\frac{1}{2}Q_n\delta'_{Qn} \quad \text{(h)}$$

此外，我们得到下列由于诸力 P 所做功产生的应变能：

$$P_1\delta'_{P1}+P_2\delta'_{P2}+\cdots+P_m\delta'_{Pm} \quad \text{(i)}$$

所以，总应变能（当诸荷载 P 先作用，然后诸荷载 Q 作用的情况）为表达式(g)，(h)与(i)之和。令这些和等于荷载同时作用下的应变能（见方程f），得出：

$$P_1\delta'_{P1}+P_2\delta'_{P2}+\cdots+P_m\delta'_{Pm}=Q_1\delta_{Q1}+Q_2\delta_{Q2}+\cdots+Q_n\delta_{Qn}$$

或

$$\sum_{i=1}^{m} P_i\delta'_{Pi}=\sum_{i=1}Q_i\delta_{Qi} \quad \text{(11-21)}$$

此方程左边的表达式为诸力 P 与诸力 Q 所引起与它们[1]相应的位移乘积之和。右边出现诸力 Q 与诸力 P 所引起与它们[2]相应的位移乘积之和。此方程代表互等功定理，它可叙述如下：

第一种加载状态下的诸力在第二种加载状态下移动相应位移时所做的功，等于第二种加载状态下的诸力在第一种加载状态下移动相应位移时所做的功。

互等功定理适用于力和力偶。例如，P_i 代表力或力偶，位移 δ_{Pi} 则分别为挠度或转角。

---

1) 这里所说的"它们"是指"诸 P"。——译者注

2) 这里所说的"它们"是指"诸 Q"。——译者注

虽然在互等功定理的推导中，我们给了两组作用于结构不同点处的力(见图 11-15)，但并不是必定要这样做。例如，力 Q_1 可以作用于物体中诸力 P 之一的相同点上，甚至可以顺相同的方向作用和具有相同的量。换句话说，对于诸力 P 和诸力 Q 的个数，它们的作用位置或它们的方向都没有限制。由于这种普遍性，互等功定理成为结构力学中非常有用的定理。如同互等位移定理一样，互等功定理仅对可以应用迭加原理的结构才能成立[1]。

容易看出互等位移定理是互等功定理的特殊情况。例如，我们可以将互等功定理用于图 11-12 a 和 b 中所示两种加载状态，于是我们得到 $P\delta_{ab}=P\delta_{ba}$，它立即得出互等位移定理的方程(11-18)。类似地，将该定理用于图 11-13所给的两种加载状态，得到 $M\theta_{ab}=P\delta_{ba}$，它与方程(11-19)相同。最后，我们可以将互等功定理用于图 11-14 所示两种加载状态，得出方程(11-20)。

11.6 柔度法

在本节和下节中，介绍柔度法和刚度法的基本概念。这两种方法是许多复杂结构类型分析中的基本方法，但是为了用最简单的方式去说明其概念，我们将仅用梁、平面框架和平面桁架去讨论它们。这两种方法早已用第 1.6 节中简单轴向荷载问题进行了叙述，而且柔度法在第 7.3 节中与静不定梁的分析一起进行了讨论。

用柔度法分析结构的第一个步骤是判别结构的**静不定次数**，这种次数就是超过按静力平衡方程所能求解的力（反力或应力合力）之个数。例如，两跨连续梁（见图 7-6 a）为一次静不定，因为有一个反力超过单独按静力学所能求出的反力个数。类似地，图 7-7 a 中所示固定端梁为二次静不定，因为有两个反力超出按静力学所能求出的个数。

1) 互等功定理是 E. Betti (参考文献 11-5)和 Lord Rayleigh (参考文献 11-6 至 11-8)提出的，因此，常常称之为 Betti-Rayleigh 互等定理。

确定了静不定次数，然后我们必须选择相同个数的静赘余力，它们可以是反力也可以是应力合力．这些量可以认为在静力平衡下维持为不可动结构时不需要的赘余的（或过剩的）力．再一次参考图 7-6 a 中所示两跨梁，我们看出，如果中间反力被考虑为赘余力，而且从结构上藉拿掉中间支承来把它移去，这样将留下一个稳定结构，如图 7-6 b 所绘．或对图 7-7 a 中的梁，我们藉拿掉抵抗转动的约束，可以移去两端处的力偶，而剩下的结构还能承受荷载．赘余量放松（藉拿掉适当的约束）后所留下的静定结构称为放松结构[1]．用柔度法分析静不定结构的关键是求算所选择的赘余量，因为它们一经求出，其它所有力之量则可以根据静力平衡方程求得．

为了确定赘余量，需要求算放松结构由于实际荷载和未知赘余量所引起的位移．在后一种情况下，我们必须将赘余量设想为作用于放松结构上的荷载，因此我们必须求出相应于赘余量的位移．这一个步骤藉作用赘余量的单位值是容易做到的，放松结构上此赘余量单位值的相应位移称为柔度．知道了柔度和实际荷载所引起的位移，我们可藉应用协调条件和迭加原理建立联立方程．这种方程称为协调方程或迭加方程，有多少个未知赘余量就有多少个这种方程．因而，这些方程可用于求解赘余量，然后其它所有反力和应力合力可以根据静力学求出．

如果现在我们采用一个具体的实例（见图 11-16），那么上述柔度法的讨论就更清楚了．该图（a）部分所示的梁为二次静不定者，因此它可藉放松两个赘余反力使之成为静定者．例如，如果支承 B 和支承 C 处竖直反力被选为赘余量，而且将相应支承移去，则放松结构为图 11-16 b 所示的悬臂梁．

1）放松结构也称为基本结构．

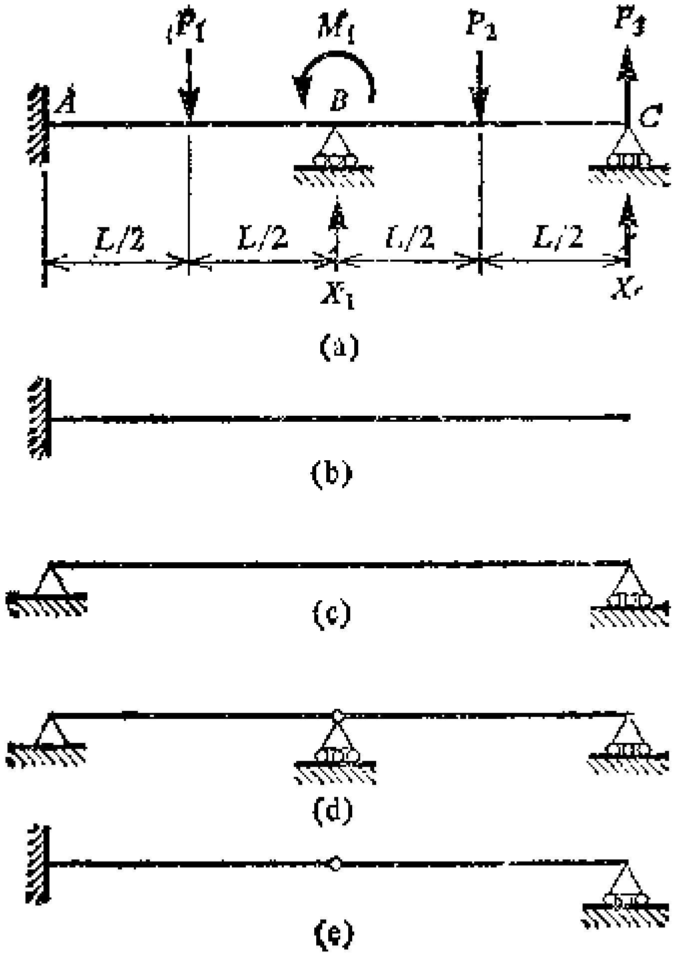


图 11-16 柔度法的实例

选择另外两个赘余量也是可能的. 假定选择支承 A 处的反力矩和支承 B 处的竖直反力. 于是必须放松 A 处的转动约束和 B 处的支承，所得的放松结构为一简单梁，如图 11-16 c 所示. 放松结构的其它可能性示于图 11-16 d 和 e 内. 在这两种情况的第一种情况中，A 点处的反力矩和 B 处的内弯矩被选作赘余量. 所以，放松结构上 A 处没有转动约束，B 处没有抵抗弯矩的约束；这后一个条件是藉梁上 B 点处加一铰来实现. 当 B 处的反力和弯矩被选为赘余量时，得出最后一种放松结构（图 11-16 e）. 图 11-16 中绘出的所有放松结构均为静定且不能动者，因为我们进行了赘余量的适当选择. 然

而，注意：我们不能选择 B 处的弯矩和 C 处的反力为赘余量，因为这样一来相应的放松结构将是可动者，而且不能承受所有的荷载。

现在继续该例题，让我们选择支承 B 处和 C 处的反力为赘余量，并用图 11-16a 中的符号 X_1 和 X_2 来代表．一般地，我们对赘余量应用符号 X，以表示它们代表未知量．相应于这样选择赘余量的放松结构为图 11-16b 中所示的悬臂梁，现在我们必须去求实际荷载和赘余量所引起该梁的某些位移．我们观察到协调方程必须表达真实梁上没有相应于赘余量 X_1 和 X_2 的位移之条件（换句话说，图 11-16a 中所示梁的 B 点处和 C 点处没有竖直挠度），而以此作为正确确定放松结构所需要的位移的途径．因而，我们看出：放松结构中要计算的位移为相应于所选择的赘余量的位移，在这种情况下它们为 B 点处和 C 点处的竖直挠度．

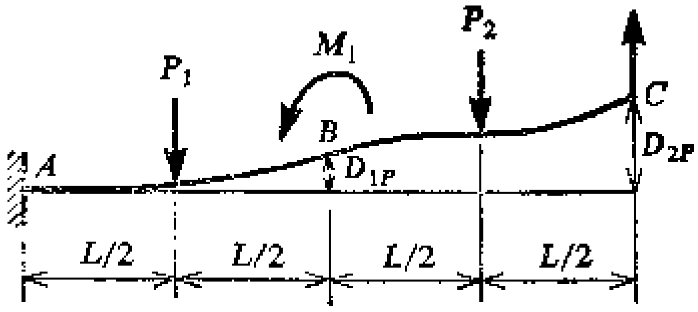


图 11-17　放松结构由于荷载引起的位移

图 11-16a 例题中的荷载假设为三个集中力（P_1，P_2 和 P_3）和一个力偶 M_1．这些荷载作用于图 11-17 的放松结构上，产生分别相应于赘余力 X_1 和 X_2 的位移 D_{1P} 和 D_{2P}．这些位移的注脚符号如下：第一个注脚表示位移所相应的赘余量，第二个注脚表示位移是由结构上的荷载所引起的．图 11-17 中的位移 D_{1P} 和 D_{2P} 按它们假设向上为正的方向来表示．

一般地，位移的正方向总是必须与相应于位移的赘余量的正方向相同。

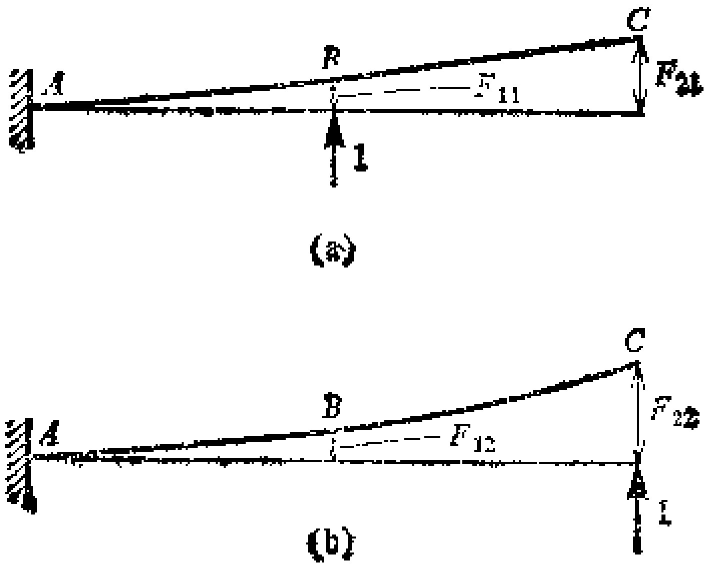


图 11-18 柔度

其次，我们必须考虑赘余量所引起放松结构中的位移。为了求得这些位移，将赘余量 X_1 和 X_2 的单位值分别作用于放松结构上。对于图 11-18 a 中所示 $X_1=1$ 的情况，将得出相应于 X_1 的挠度 F_{11} 和相应于 X_2 的挠度 F_{21}。这些挠度称为**柔度影响系数**，或简单地称为**柔度**，因为它们表示荷载单位值的影响。其注脚按照通常的方式，第一个注脚表示挠度所相应的赘余量，第二个注脚表示引起的原因。因此，柔度 F_{11} 为由于 X_1 的单位值所引起相应于 X_1 的位移，而 F_{21} 为由于 X_1 的单位值所引起相应于 X_2 的位移。对于图 11-18 b 中所示 $X_2=1$ 的情况，柔度 F_{12} 为由于 X_2 的单位力所引起相应于 X_1 的位移，F_{22} 为由于 X_2 的单位值所引起相应于 X_2 的位移。所有四个柔度系数都在图中按它们的正方向表示。由于放松结构为静定梁，我们可以认为不仅柔度，而且由于实际荷载所引起的位移 D_{1P} 和 D_{2P} 都可以容易地藉单位荷载法算出。

现在可以写出表达实际梁上支承 B 处和支承 C 处协调

条件的方程．B 处或 C 处的合成竖向挠度包括三部分：由于实际荷载产生的挠度，由于 X_1 产生的挠度，以及由于 X_2 所产生的挠度．所有这三项位移迭加得出其总位移，此总位移为零．因而，我们得到下列两个协调方程：

$$D_{1P}+F_{11}X_1+F_{12}X_2=0$$

$$D_{2P}+F_{21}X_1+F_{22}X_2=0$$

这两个方程可以联解出赘余量 X_1 和 X_2，因为这两个方程中的所有其它项均为已知值．在求解这两个方程时，把由于实际荷载所引起的位移 D_{1P} 和 D_{2P} 移到右边，因而方程表现成下列形式：

$$\begin{aligned} F_{11}X_1+F_{12}X_2&=-D_{1P} \\ F_{21}X_1+F_{22}X_2&=-D_{2P} \end{aligned} \qquad (11\text{-}22)$$

当方程写成这种标准形式时，我们看出柔度为未知赘余量的系数，而包含荷载的所有项均出现于其右边．因而，如果梁上的荷载改变，只有协调方程的右边需要改变．认识这一点是重要的：柔度仅与结构的特性有关，而不受荷载系的变化影响．注意柔度之间的下列互等关系，这也是重要的：

$$F_{12}=F_{21} \qquad (11\text{-}23)$$

根据互等位移定理(方程 11-18)，此方程便立即得了出来．

为了对上述例子得出完整的解，让我们假设图 11-16 a 中所示梁的两跨具有常数刚度 EI，梁上的荷载如下：

$$P_1=2P,\ M_1=PL,\ P_2=P,\ P_3=P$$

于是，由于这些荷载作用使放松结构产生的挠度（见图 11-17）藉单位荷载法得出：

$$D_{1P}=\frac{13}{24}\frac{PL^3}{EI} \qquad D_{2P}=\frac{97}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

这两个挠度都向上，它们均为赘余量的正方向，因此它们得出正号．

图 11-18 中所示柔度值如下：

$$F_{11}=\frac{L^3}{3\,EI}\qquad F_{12}=F_{21}=\frac{5\,L^3}{6\,EI}\qquad F_{22}=\frac{8\,L^3}{3\,EI}$$

将上面这些量代入方程(11-22)，然后用 48 EI/L^3 乘这两个方程，得出

$$16\,X_1+40\,X_2=-26\,P$$

$$40\,X_1+128\,X_2=-97\,P$$

对赘余量 X_1 和 X_2 进行求解，得到下列结果：

$$X_1=\frac{69\,P}{56}\qquad X_2=-\frac{8\,P}{7}$$

X_2 的负号表示该反力向下。按上述方式求出赘余量之后，剩下的反力以及所有应力合力均可根据静力平衡方程求得。

柔度法可以很容易地扩大为用于任意多个赘余量的可能性。关于上述梁的例题中讨论的所有概念和程序，在存在附加未知赘余量时，仍然可以成立。具体地，让我们假设结构为 n 次静不定，所以选择 n 个赘余量 $X_1, X_2\cdots X_n$。于是，实际荷载作用于放松结构上时，将产生相应于 n 个赘余量的 n 个位移。这些位移以 $D_{1P}, D_{2P}, \cdots, D_{nP}$ 表示。根据赘余量的性质，位移可以为平动(如果赘余量为反力)，或者可以为转角(如果赘余量为反力矩)，或者可以为两杆之间的相对转动(如果赘余量为弯矩)，或者可以为两相邻截面的相对横向平动(如果赘余量为梁中的剪力)。在桁架情况下，赘余量可以为诸杆中一根杆的轴向力，因而相应位移为该杆相邻截面的相对平动(顺杆的轴线方向度量)。

其次，我们考虑赘余量的单位值作为荷载作用于放松结构上，对于每一个这样的荷载，我们确定相应于所有 n 个赘余量的位移。例如，用荷载 $X_1=1$ 作用于结构上，我们求出相应于 X_1 的位移 F_{11}、相应于 X_2 的位移 F_{21}、相应于 X_3 的位移 F_{31} 等等。然后将荷载 $X_2=1$ 置于结构上，求出位移 F_{12}, F_{22}, F_{32}, $\cdots$, F_{n2}。继续以这种方式用于 n 个单位荷载，我们

可以得出 n^2 个柔度. 自然，根据互等位移原理，我们知道有许多成对的相等柔度，例如 $F_{12}=F_{21}$, $F_{13}=F_{31}$, $F_{23}=F_{32}$ 等等. 一般地，我们可以写出下列柔度的互等关系：

$$F_{ij}=F_{ji} \tag{11-24}$$

此方程表明：由于赘余量 X_j 的单位值所引起相应于 X_i 的位移，等于由于赘余量 X_i 所引起相应于赘余量 X_j 的位移.

分析的下一步是列出协调方程. 相应于每一个赘余量，原来结构就有一个位移，我们以 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 表示这些位移. 通常这些位移为零，如图 11-16 a 例题中的情况. 然而，如果赘余量为反力，而且相应于该反力的支承约束产生位移，那么在这种情况下，位移 D 就不为零. 举一个例，在上述问题中，支承 B 和支承 C 可能有已知平动（向上或向下）. 应用迭加原理，我们可以表达实际位移 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 为荷载所产生的位移与赘余量所产生的位移之和，因此，其协调方程为：

$$\begin{aligned}
D_1 &= D_{1P}+F_{11}X_1+F_{12}X_2+\cdots+F_{1n}X_n \\
D_2 &= D_{2P}+F_{21}X_1+F_{22}X_2+\cdots+F_{2n}X_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
D_n &= D_{nP}+F_{n1}X_1+F_{n2}X_2+\cdots+F_{nn}X_n
\end{aligned} \tag{11-25}$$

当求方程(11-25)中的各个位移时，必须采用一致的正负号规则；具体地说，当每一位移与其相应赘余量的正方向为相同方向时，该位移采取为正. 方程(11-25) 可以重新排列，将所有 D 项放到右边，而未知赘余量放到左边. 于是方程成为求解赘余量的标准形式.

本节中，我们限于注意承受荷载的结构，但若分析中包括其它效应，如温度变化，从概念上说是没有什么困难的. 这些其它的效应使放松结构也产生位移，它们可与荷载引起的位移相加起来并入协调方程内.

由于迭加原理是柔度法和下一节中所述的刚度法的基础，所以在这两节中只讨论线性弹性性能的结构[1]．柔度法也称为力法，因为方程中以力作为未知数，由于方程的性质有时称它为协调法[2]．

例题1 本例题采用柔度法并以内弯矩作为赘余量来说明连续梁的分析．有一梁 $ABCD$，共计三跨(见图 11-19 a)，AB 跨上作用强度为 q 的均匀荷载，BC 跨和 CD 跨作用两个集中荷载 P．因为该结构是两次静不定者，必须选择两个赘余量．本例题中，选择了支承 B 和支承 C 处梁中的弯矩，这些弯矩可藉 B 处和 C 处放进铰而移去，从而产生由三个简单梁组成的放松结构(图 11-19 b)．其赘余弯矩以 X_1 和 X_2 表示，均示于图中．每一个赘余量包括两个力偶，每一个力偶作用于结构的每一相邻跨上．例如，赘余量 X_1 由作用于 AB 梁上反时针方向的力偶和作用于 BC 梁上顺时针方向的力偶所组成．赘余量的正方向相应于使梁顶面产生压缩的弯矩．由于每一赘余量由两个力偶组成，因而放松结构上相应于诸赘余量的位移为两个相邻跨上转角之和．例如，相应于 X_1 的位移由 AB 杆上 B 端处反时针方向的转动加上 BC 杆上 B 端处顺时针方向的转动所组成．

分别相应于 X_1 和 X_2 而由于作用在放松结构上的荷载所引起的位移 D_{1P} 和 D_{2P} 均示于图 11-19 c 中．因为 AB 杆上 B 端处由于均匀荷载所产生的反时针方向转角为 $qL^3/24\,EI$，BC 杆上 B 端处由于荷载 P 所产生的顺时针方向转角为 $PL^2/16\,EI$，因而得出位移 D_{1P} 为：

$$D_{1P}=\frac{qL^3}{24\,EI}+\frac{PL^2}{16\,EI}$$

---

1) 用能量法的非线性结构分析在第 11.8 至 11.13 节中讨论．

2) 柔度法是 J. C. Maxwell 于 1864 年和 O. Mohr 于 1874 年首先介绍的(见参考文献 11-1 和 11-13)，因此它也称为 Maxwell-Mohr 法，该方法已得到很大的发展，应用很广，有关它的更详细的资料可在结构分析的课本上找到，譬如参考文献 11-14 至 11-19．

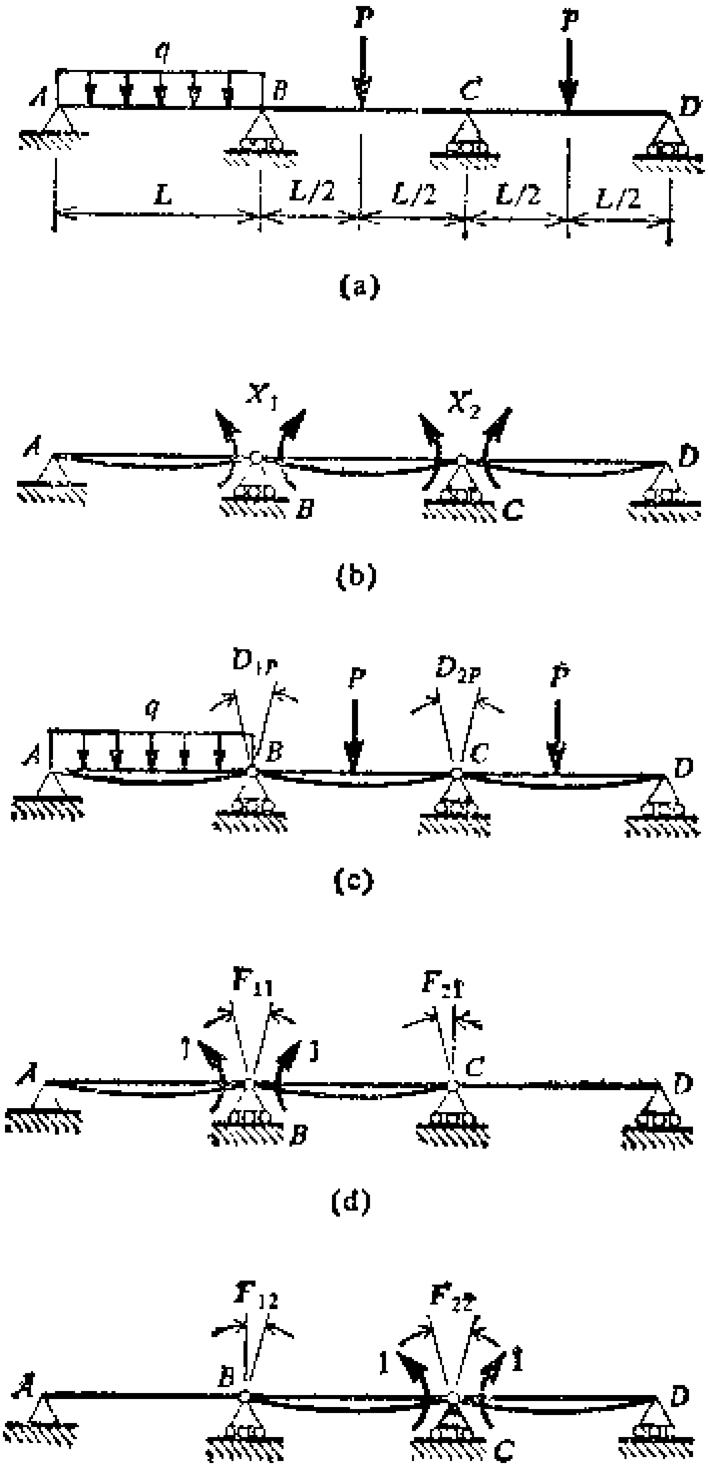


图 11-19 例题1. 柔度法

按类似方式，我们求出位移 D_{2P} 为：

$$D_{2P}=\frac{PL^2}{16\,EI}+\frac{PL^2}{16\,EI}=\frac{PL^2}{8\,EI}$$

其次，必须求出梁的柔度。为此目的，将 X_1 和 X_2 的单位值作用于放松结构上如图 11-19 d 和 e 所示。该图还示出了四个柔度。例如，柔度 F_{11} 为 B 点处两个转角之和，一个转角是 AB 跨上的，另一转角是 BC 跨上的。然而，柔度 F_{21} 等于 BC 跨度单独的转角，因为 CD 跨的转角为零。类似的说明用于柔度 F_{12} 和 F_{22} 如图 11-19 e 所示。现在，要写出这些不同柔度系数，是一件简单的事：

$$F_{11}=\frac{L}{3\,EI}+\frac{L}{3\,EI}=\frac{2\,L}{3\,EI}\qquad F_{22}=\frac{L}{3\,EI}+\frac{L}{3\,EI}=\frac{2\,L}{3\,EI}$$

$$F_{12}=F_{21}=\frac{L}{6\,EI}$$

然后，我们可以将位移 D_{1P} 和 D_{2P} 以及柔度代入协调方程（方程 11-22），该方程成为：

$$\frac{2\,L}{3\,EI}X_1+\frac{L}{6\,EI}X_2=-\frac{qL^3}{24\,EI}-\frac{PL^2}{16\,EI}$$

$$\frac{L}{6\,EI}X_1+\frac{2\,L}{3\,EI}X_2=-\frac{PL^2}{8\,EI}$$

对赘余弯矩 X_1 和 X_2 进行联解，得出：

$$X_1=-\frac{qL^2}{15}-\frac{PL}{20}\qquad X_2=\frac{qL^2}{60}-\frac{7\,PL}{40}$$

由于 X_1 为负，我们知道原来梁中 B 点处的弯矩使梁的顶面产生拉伸。力矩 X_2 可能为正也可能为负，取决于荷载的相对大小。当中间支承处的这些弯矩求得之后，我们可以求出梁中其它弯矩，并用静力学求出所有剪力和反力。

例题 2　图 11-20 a 中所示平面桁架的节点为销接，并承受两个竖直力 P 和一个水平力 $P/2$。该桁架中竖直杆和水平杆的轴向刚度均为 EA，而对角杆的刚度为 $2\,EA$。此桁架为二次静不定，根据稳定和静定结构的观点来看，桁架中有两根杆例如对角杆 AE 和 EC 是多余的。因而，我们可以选择这两杆中的轴向力（当拉伸时为正）分别作为赘余量 X_1 和 X_2。自然，其它杆力也可以选作赘余量，而每一种选择将得出

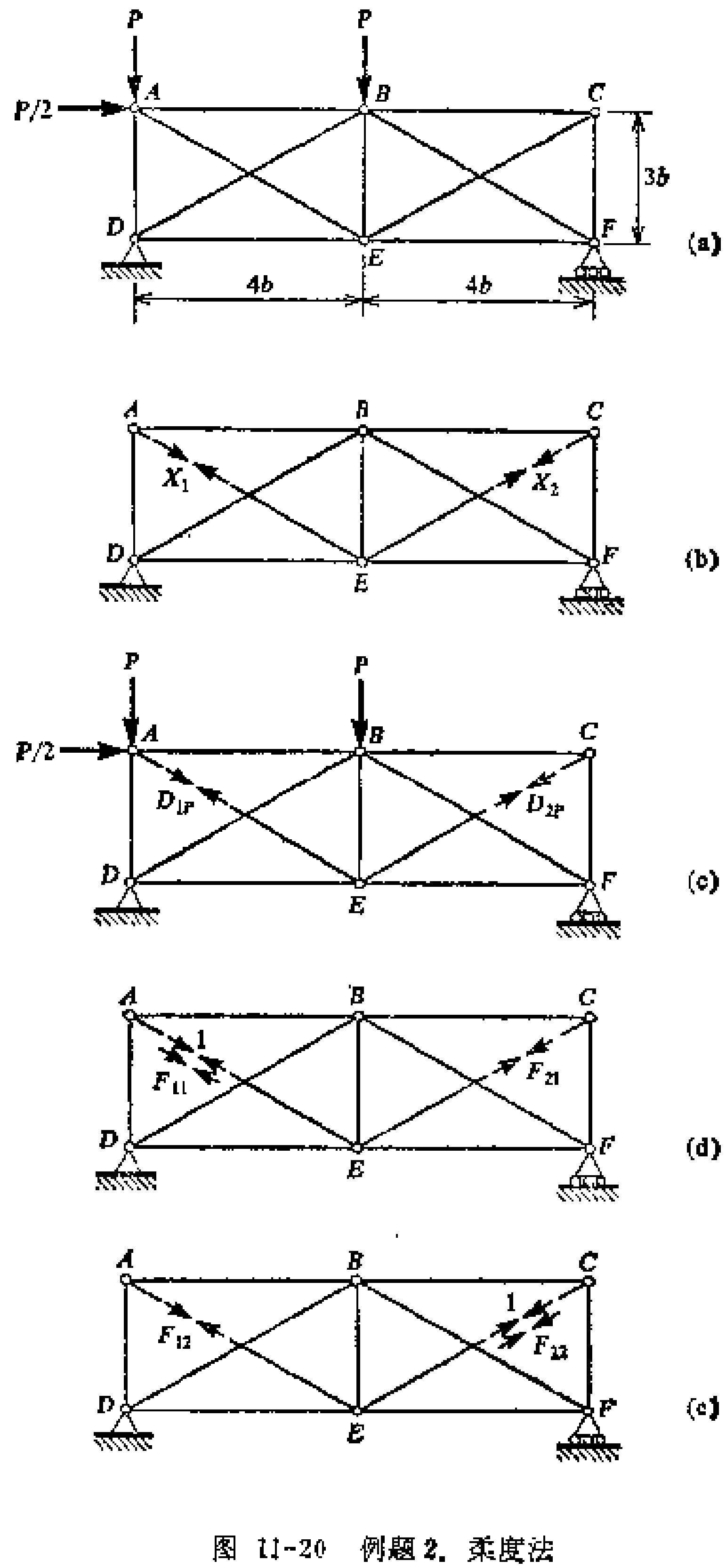


图 11-20 例题 2. 柔度法

不同的放松结构。在此种情况中，我们籍在这些杆的端节点之间切开杆身来放松 AE 杆和 EC 杆中的轴向力。被切开的杆必须保留以作为放松结构的一部分(见图 11-20 b)，因为它们的变形必须包括到放松结构的位移计算之中。

每一赘余量由一对作用于放松结构上的力所组成(图 11-20 b)，类似于上例中代表赘余弯矩的一对力偶(见图 11-19 b)。它们所假设的正方向使杆中产生拉力，如果最后结果表明 X_1 或 X_2 为负，这就是说杆中实际的轴向力为压力。

相应于 X_1 或 X_2 的位移为杆切开端处的相对平动。当切开端朝彼此相对的方向移动时，位移与赘余量的正方向相同，因而这样的位移也为正。当切开端朝彼此分开方向移动时，因而其缺口张开，这样的位移为负。

分析的下一个步骤是确定放松结构由于实际荷载所引起相应于 X_1 和 X_2 的位移。这些位移 D_{1P} 和 D_{2P} 用一对箭头示于图 11-20 c (这种表示位移的方式是用以代替绘桁架移动图形，后者会使图复杂化)。这些位移的计算可直接应用单位荷载法(见第 11.3 节)，这里仅给出最后结果：

$$D_{1P}=-\frac{401}{480}\frac{Pb}{EA} \qquad D_{2P}=-\frac{2783}{480}\frac{Pb}{EA}$$

其减号的意思是杆的切开端按彼此分离移动。

桁架的诸柔度分别示于图中 11-20 d 和 e 中. 在该图的(d)部分中，以 X_1 的单位值作为荷载作用于放松结构上，在(e)部分中，以 X_2 的单位值作为荷载进行作用。与前面一样，柔度为放松结构上相应于 X_1 和 X_2 的位移。例如，F_{21} 为相应于 X_2 而由于 X_1 的单位值所引起的位移. 当用单位荷载法求这些柔度时，要认识到切杆为放松结构的一部分，不可不管，这是很重要的。因而，图 11-20 d 所示杆 AE 由于荷载 $X_1=1$ 所产生的轴向力等于 $+1$，在进行单位荷载计算时，必须考虑这个力的存在。这些计算得出柔度的下列结果：

$$F_{11}=\frac{307}{25}\frac{b}{EA} \qquad F_{12}=F_{21}=\frac{27}{25}\frac{b}{EA} \qquad F_{22}=\frac{307}{25}\frac{b}{EA}$$

协调方程(见方程 11-22)成为：

$$\frac{307}{25}\frac{b}{EA}X_1+\frac{27}{25}\frac{b}{EA}X_2=\frac{401}{480}\frac{Pb}{EA}$$

$$\frac{27}{25}\frac{b}{EA}X_1+\frac{307}{25}\frac{b}{EA}X_2=\frac{2783}{480}\frac{Pb}{EA}$$

根据它们得到：

$$X_1=0.027\ P\qquad\qquad X_2=0.470\ P$$

这些结果表明 X_1 和X_2都为拉力。知道了这些赘余量，现在我们可以应用静力学求出桁架中所有其它杆的轴向力。

例题 3　图 11-21 a 中所示的平面框架在 A 处为固定支承，C处为销接支承。节点 B 为 AB 杆和 BC 杆的刚性联结，这两根杆具有相同的弯曲刚度 EI 和相同的长度 L。框架上的荷载包括作用于 BC 杆上强度为 q 的均匀荷载和作用于 B 点处的力偶 $M=2qL^2$。此框架为二次静不定，用柔度法进行分析。

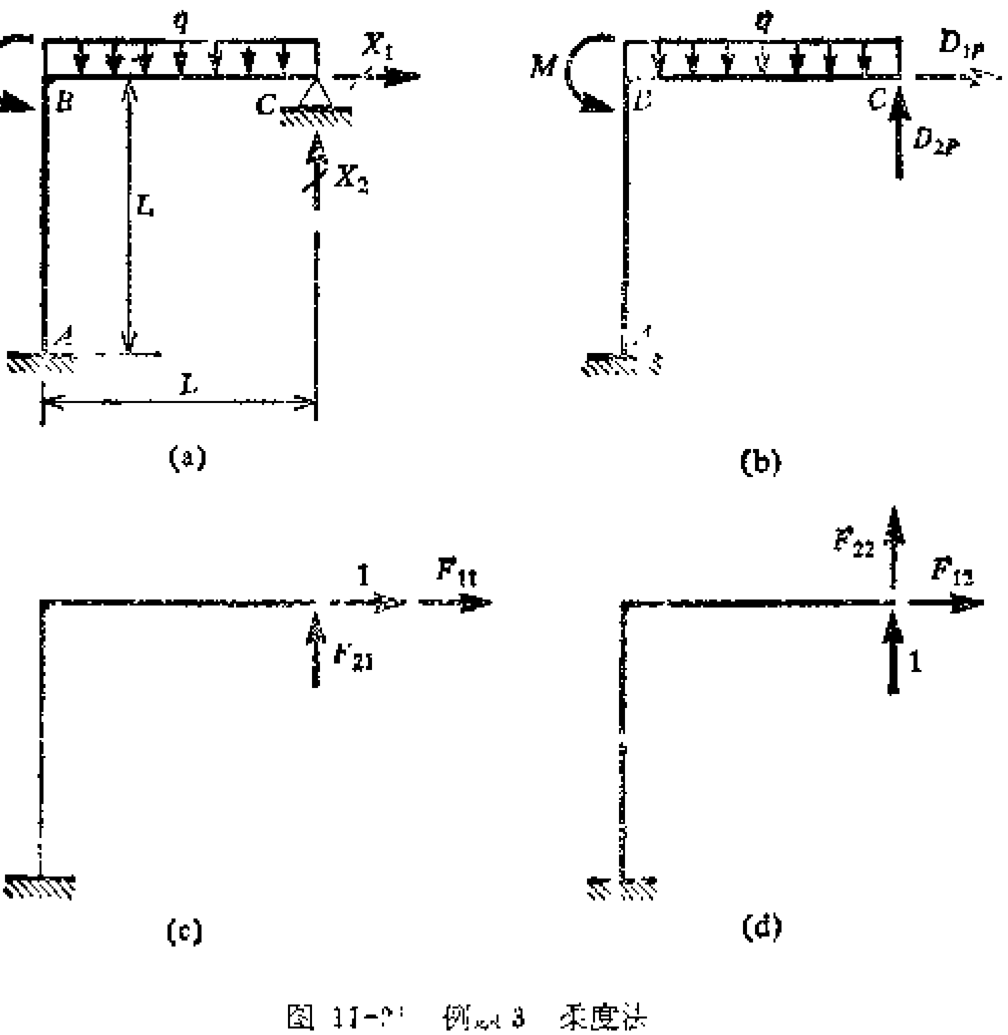


图 11-21　例题 3　柔度法

将支承 C 处的两个反力选作未知赘余量 X_1 和 X_2（见图 11-21 a）．承受实际荷载的相应放松结构示于该图中(b)部分上．这些荷载使 C点处产生分别相应于 X_1 和 X_2 的挠度 D_{1P} 和 D_{2P}。这两个位移的正方向用箭头示于图中，以避免需要绘制变形结构的形状．这两个 挠度可藉单位荷载法求出，其结果如下：

$$D_{1P}=-\frac{3\,qL^4}{4\,EI}\qquad D_{2P}=\frac{11\,qL^4}{8\,EI}$$

其柔度绘于图 11-21 c 和 d 中．为了简化，图中各种挠度再次用箭头来区别。藉单位荷载法求出这些柔度为：

$$F_{11}=\frac{L^3}{3\,EI}\qquad F_{12}=F_{21}=-\frac{L^3}{2\,EI}\qquad F_{22}=\frac{4\,L^3}{3\,EI}$$

本例中有些柔度是负的，这是通常有的事．作为一般规则，以两个不同的注脚来识别柔度，例如 F_{12} 和 F_{21}，可以为正或者为负，与赘余量所假设的正方向有关。反之，用两个相同注脚来识别的柔度，譬如 F_{11}，总是正的，因为该位移总是发生在引起此位移的单位荷载的相同方向．

将上面诸表达式代入协调方程（方程 11-22），然后用 12 EI/L^3 乘第一个方程，用 24 EI/L^3 乘第二个方程，我们得出：

$$4\,X_1-6\,X_2=9\,qL$$
$$-12\,X_1+32\,X_2=-33\,qL$$

这些方程的解为：

$$X_1=\frac{45\,qL}{28}\qquad X_2=-\frac{3\,qL}{7}$$

所以，C 处的水平反力（图 11-21 a）向右，竖直反力向下。应用这 些 X_1 和 X_2 的结果，我们可藉静力学求出该框架的其 余反力。此处，所有应力合力均可以求得。

在此分析中，只考虑弯曲变形的影响．然而，加上轴向变形和剪切变形的影响也是不困难的。这些影响可藉求放松结 构位移时，亦即应用单位荷载法求 D_{1P}，D_{2P} 和柔度时，考虑它们而计入分析 之中。在平面框架情况下，通常发现轴向变形和剪切变形的影响 与弯曲变形影响相比可以略去不计。

11.7 刚度法

这种分析结构的方法比柔度法的应用要更为广泛，特别是对于大的和复杂的结构。这样的结构需要应用数字计算机进行庞大的数字计算，刚度法比柔度法要更适合于计算机的程序设计，其理由是：刚度法可采取标准化程序的形式，在计算过程中不需要任何工程判断。例如，刚度法中的未知量不是可以这样也可以那样来规定的，这一点我们将在下面讨论中看出来；反之，柔度法中的未知赘余量则存在着各种选择。

在采用刚度法分析结构时，我们应用动不定、固定端作用力和刚度的概念，所有这些概念现在将要给予解释。

动不定　　在刚度法中，分析时的未知量为结构的节点位移，而不是柔度法中所用的赘余的反力和应力合力。我们定义结构的节点为：两根杆或更多杆所相交的点、支承点以及任何伸出杆的自由端。当结构承受荷载时，所有节点或某些节点将以平动或转动方式产生位移。自然，由于约束条件，有些节点的位移将为零，例如，固定支承处不会有任何位移。未知的节点位移称为动未知数，它们的数目称为节点位移的动不定次数或节点位移的自由度的数目。

为了解释动不定的概念，讨论几个例子是必要的。让我们从讨论图 11-16 a 中所示的连续梁开始。该结构的节点 A 是固定的，不能产生任何一种位移，但是节点 B 和节点 C 可以转动。因而，当用刚度法分析此梁时，有两个未知节点位移需要计算，因此，该梁为二次动不定。如果梁中除了弯曲变形外，还有轴向变形，那么节点 B 和节点 C 将产生水平平动和转动。在这种情况下，则有四个动未知数。

静定悬臂梁（图 11-6 a）为两次动不定，因为自由端处有两个未知节点位移（竖直方向平动和转动）。如果存在轴向

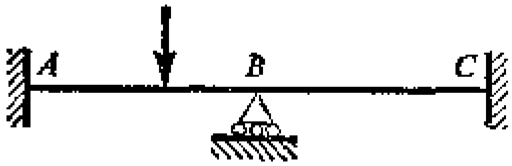


图 11-22

变形，动不定的数目则增加为三，因为自由端处的水平平动成为另一个未知数.

另一个梁的例子示于图 11-19 a. 如果只考虑弯曲变形，这个三跨连续梁为四次动不定，因为节点处有四个未知转角. 因而，当用刚度法分析此梁时，必须求解四个联立方程，而应用柔度法时只需要两个方程. 这个例子可能给予这样的印象，柔度法总是比刚度法所得的联立方程要少，但是，这种概念从参考图 11-22 所示两跨梁 ABC，就可以很快消除掉. 假设轴向变形略去不计，我们看出此梁为一次动不定，因为唯一的未知节点位移为 B 处的转角；反之，静不定次数的数目却为三. 与此类型相似的另一个例子是固定端梁，如果只考虑弯曲变形，它为两次静不定，但却是动定者.

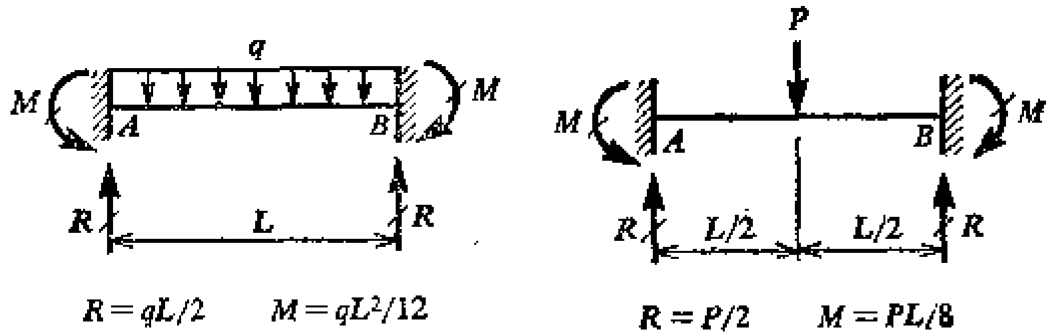
现在讨论图 11-20 a 中所绘的平面桁架. 此桁架的节点 A 可以产生两个独立的位移分量，譬如水平方向的平动和竖直方向的平动，因此它具有两个自由度. 此桁架的节点转动没有物理意义，因为杆件不弯曲. 每一节点 B，C 和 E 也有两个自由度，而约束住的节点 D 和 F 的自由度则分别为零和 1. 所以该桁架对于节点平动来说总共有九个自由度，是为九次动不定. 这个结论的意思是：此桁架藉刚度法分析需要求解以九个节点平动作为未知量的九个联立方程.

以图 11-21 a 中所示平面桁架作为动不定结构的另一个例子. 由于支承 A 是固定者，该点处不能有位动. 然而，节点 B 和 C 可以转动，因此框架为两次动不定. 如果分析中包括轴向变形影响，节点 B 将有两个附加未知位动（水平平动和竖直平动），于是总起来为四次动不定[1).

1) 关于动不定的附加讨论见参考文献 11-14.

固定端作用力　　在刚度分析中我们经常碰到固定端梁，因为这种方法中的第一个步骤是约束所有未知节点位移。这种约束的安设使连续梁或平面框架成为固定端梁的集合。所以，我们需要有可以容易利用的固定端梁反力公式的汇编。这些反力包括力和力偶，统称为**固定端作用力**。图 11-23 中给出两种普通加载情况下固定端作用力的值[1]。

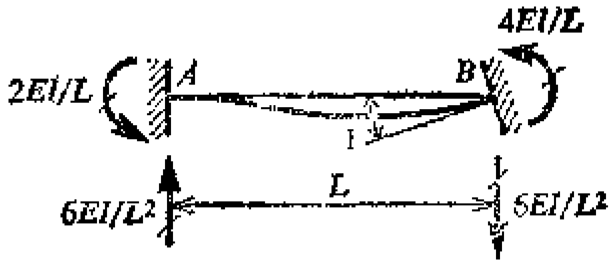
刚度　　在柔度法中，我们采用了由于单位作用力所引起的位移，这种位移被称为柔度。在后面讨论中将看出：在刚度法中我们采用由于单位位移所引起的作用力。这些位移可以为单位平动或单位转动，而所得的作用力为力或力偶。由于单位位移所引起的作用力称为**刚度影响系数**或**刚度**。我们常常需要知道结构中单根杆的刚度。这些量称为**杆件刚度**。图 11-24 中列出了两种最有用的情况。该图中 (a) 部分表示右端承受单位转角的固定端梁 AB。由于这种单位位移使梁的两端均产生反力。B 端处产生的力矩为 $4EI/L$，而另一端处的力矩为 $2EI/L$。梁两端处的每一反力均等于 $6EI/L^2$，它们具有图中所示的方向。类似地，梁右端处的单位平动产生图



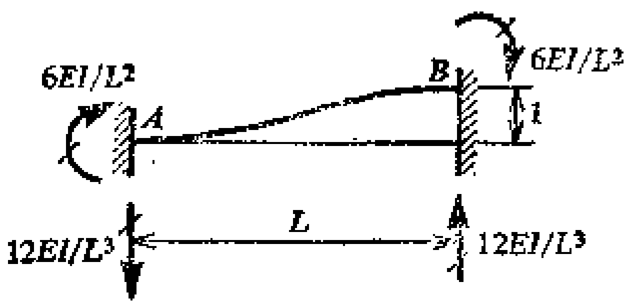
(a)　　　　　　(b)

图 11-23　固定端作用力

1) 包括二十五种不同加载情况的固端作用力的广泛的表给于参考文献 11-20 的第 269 页上。



(a)



(b)

图 11-24 杆件刚度

中 (b) 部分所示的反力．所有这些反力均为杆件刚度，因为它们是由于一端单位位移使该杆诸端处所产生的作用力[1)]．

刚度法 现在已经叙述了一些基本概念和定义，我们准备直接讨论用刚度法去进行结构的分析．这种方法就其论及的物理概念来说是不同于柔度法的，但是这两种方法都需要求解联立方程．并且，在这两种情况中，我们的联立方程都是藉应用叠加原理来求得，所以该方法限于很小挠度的线性弹性结构．在柔度法中，未知量为赘余作用力，但是在刚度法中，未知数为结构的节点位移．所以，刚度法中所要求算的未知数的个数与动不定次数相同．

为了用最简单形式来说明刚度法的概念，让我们讨论图 11-25 a 所示梁的分析．该梁 A 处为固定支承，B 处为辊轴支承，承受强度为 q 的均匀荷载．该梁为一次动不定，因为唯一

1) 对于杆件刚度较完整的讨论见参考文献 11-14．

的未知节点位移为支承 B 处的转动，该转动以符号 D 表示.

在柔度法中，静定放松结构是藉切开或藉其它移去赘余量的方式改变实际结构来获得的. 刚度法中的类似手续是藉使所有未知节点位移成为零的方法以改变实际结构来得到一个动定结构. 由于未知位移为节点的平动和转动，可藉约束结构节点抵抗这种位移而使它们等于零. 藉约束所有节点所得的结构称为约束结构. 对于图 11-25 a 中的梁，其约束结构是藉约束节点 B 抵抗转动来求得，也就是使其 D 等于零. 因此，其约束结构为图 11-25 b 中所示的固定端梁.

当均匀荷载作用于约束结构上，如图 11-25 b 所示，则产生各种作用力(即力和力偶). 具体地说，节点 B 产生力偶. 此力偶为相应于未知节点位移 D 因约束结构上的荷载所引

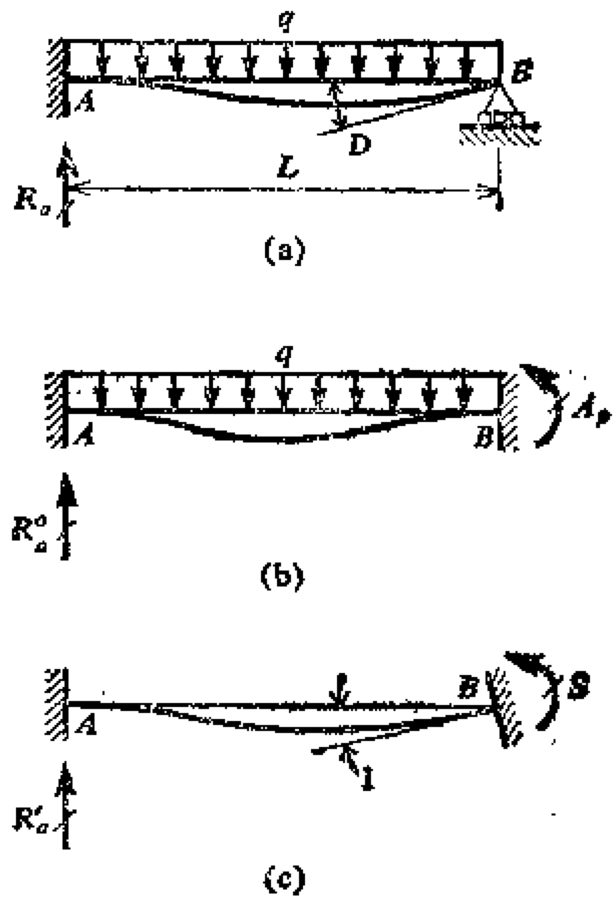


图 11-25 刚度法的说明

起的作用力．所以，我们以符号 A_P 代表此力偶，它的符号意义如下．字母 A 用来表示作用力，或为力，或为力偶，注脚 P 表示它是因作用于约束结构上的荷载所引起的．由于此力偶相应于未知节点位移 D，当它与 D 具有相同方向时，亦即为反时针方向，如图中所示，则将为正．力偶 A_P 为固定端作用力，根据图 11-23 a 的公式容易求得：

$$A_P = -\frac{qL^2}{12} \tag{a}$$

由于上面的正负号说明，减号是需要的．

由于约束梁上节点 B 处无转动，现在我们必须叠加上考虑实际节点转动的另一种加载情况．这个步骤藉对约束结构加上未知位移单位值是容易做到的，这类似于柔度法中取赘余作用力单位值的相应步骤．单位转动（$D=1$）示于图 11-25c．B 处相应于未知节点位移 D 的作用力为一刚度系数 S，因为它是由于结构产生单位位移引起的．此刚度为

$$S = \frac{4EI}{L} \tag{b}$$

系按图 11-24 a 中的公式所得．

现在我们准备写出使我们能够求解未知节点位移 D 的叠加方程．根据图 11-25，我们可以观察出：将图中(b)内的作用力和位移与(c)中的作用力和位移乘以 D 后相叠加，就得出实际梁上的作用力和位移(图 11-25 a)．这样，我们可以写出相应于未知位移 D 的作用力的叠加方程．在原来梁中，相应于 D 的作用力应为节点 B 处反时针方向的力偶．在本例题中，梁上没有这样的荷载，但为了考虑到这种可能性，我们将用符号 A 表示原来梁中相应于 D 的作用力．此作用力 A 等于约束梁上作用荷载的相应作用力(图 11-25 b)，加上有单位位移时约束梁中的相应作用力的 D 倍(图 11-25 c)．因此，

叠加方程为

$$A = A_P + SD \tag{11-26}$$

现在此方程可对未知位移 D 进行求解。我们早已观察到在本例中 $A=0$，另外，A_P 项和 S 项用方程(a)和方程(b)求得。将这些值代入方程(11-26)，我们得出：

$$0 = -\frac{qL^2}{12} + \frac{4EI}{L}D$$

从它得出：

$$D = \frac{qL^3}{48EI}$$

因而，确定出了 B 点处的转动。上述结果的正号意味着这个转动的方向是为假定的正方向(反时针方向)。

上述节点位移 D 的求解利用了相应于 D 的作用力的叠加方程(方程 11-26)。此方程中包含着约束结构因荷载所引起的力偶和约束结构因 B 端转动所引起的力偶。其中后一项表达为由于未知位移单位值所引起的力偶(刚度系数)与未知位移本身的乘积。对方程中所有项采用相同的正负号规则，将两个影响按代数加起来，以便得出原来结构中的合成影响。通常称这种叠加方程为**平衡方程**，因为它表达该点处作用力的局部平衡。

图 11-25 中所示梁 B 点处的转动已经求得，现在可以计算其它量，例如反力和应力合力。作为例子，假设需要求梁的支承 A 处的竖直反力 R_a(图 11-25 a)。此力为图 11-25 b 中所示约束梁的相应反力 R_a^0 与 D 乘以图 11-25 c 中所示反力 R_a' 之和。因而，我们可以根据下列叠加方程计算反力 R_a：

$$R_a = R_a^0 + R_a'D \tag{c}$$

约束梁中的反力 R_a^0 和 R_a' 可根据图 11-23 和 11-24 中的公

式求得：

$$R_a^0 = \frac{qL}{2} \quad R_a^I = \frac{6EI}{L^2}$$

将这些值和前面已经求得的 D 值代入方程(c)，
其结果为：

$$R_a = \frac{5qL}{8}$$

知道此反力后，我们可藉静力学求出其它反力和所有应力合力.

如果结构为一次以上动不定者，则需要附加的叠加方程. 为了说明这种情况下的程序，现在应用刚度法去分析前面用于柔度法的两跨梁（见图 11-26 a）的例子. 该梁为两次动不定，因为 B 点处和 C 点处存在未知转动. 这些未知转动分别用 D_1 和 D_2 表示，并假设反时针方向为正. 分析的目的是要求出这些量.

分析的第一个步骤是在节点 B 和节点 C 处应用假想的约束去阻止转动. 所得的约束结构由两根固定端梁组成，如图 11-26 b 所示. 然后假设该约束结构承受全部荷载作用，而相应于未知位移的荷载除外. 因而，仅荷载 P_1, P_2 和 P_3 示于图 11-26 b 中. 所有相应于未知位移的荷载，例如本例中的力偶 M_1，在后面再考虑. 图中所示的力偶 A_{1P} 和 A_{2P} 为约束结构上的反力. 它们分别相应于未知位移 D_1 和 D_2，是由于荷载所引起[1]. 这些力偶可藉助于固定端作用力的公式来求得，例如，A_{1P} 为由于作用于 AB 杆上荷载 P_1 所产生的 B 处反力矩与由于作用于 BC 杆上荷载 P_2 所产生 B 处的反力矩之代数和. 因此，我们得

1) A_{1P} 和 A_{2P} 相似于柔度法中的 D_{1P} 和 D_{2P}，后二者为分别相应于放松结构中未知赘余量 X_1 和 X_2 的位移，且由于荷载所引起.

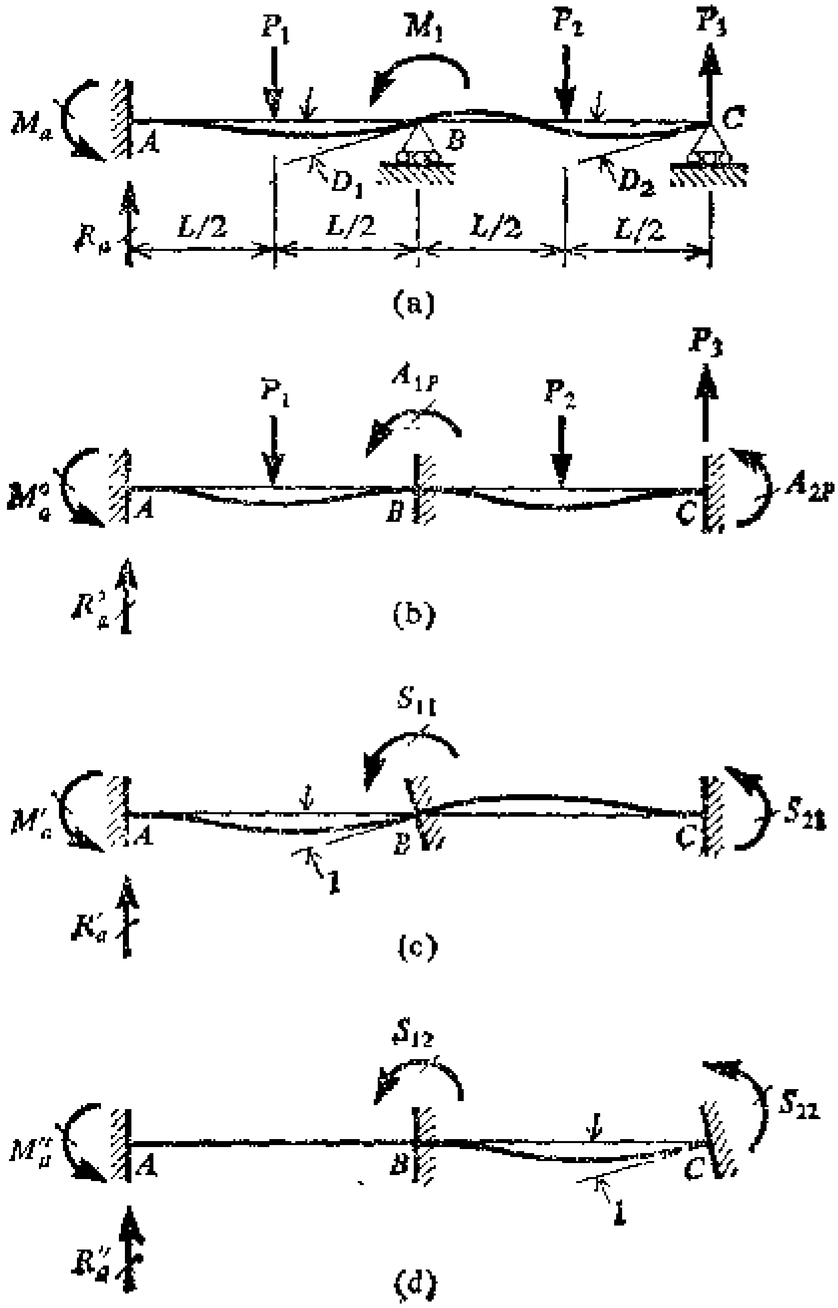


图 11-26　刚度法的说明

$$A_{1P}=-\frac{P_1L}{8}+\frac{P_2L}{8}\qquad A_{2P}=-\frac{P_2L}{8}\tag{d}$$

为了构成 B 点和 C 点处刚度，我们对约束结构引进未知位移 D_1 和 D_2 的单位值．相应于 D_1 的单位位移为 B 点处的单位转动，如图 11-26 c 所示．在这种情况下，位移 D_2 保持

等于零。相应于 D_1 的刚度用 S_{11} 表示，其中第一个注脚表示刚度所相应的位移，第二个注脚表示其原因（即 D_1 的单位值）。以类似方式，另一个刚度以 S_{21} 表示，因为它是相应于 D_2 而由于 D_1 的单位值所引起的作用力。类似地，$D_2=1$ 的情况示于图 11-26 d 中。刚度 S_{12} 为相应于 D_1 而由于 D_2 的单位值所引起的作用力，而 S_{22} 为相应于 D_2 且由于 D_2 的单位值所引起的作用力。所有这些刚度根据图 11-24 所给的杆件刚度可容易地算出。因而，当梁上 B 点处转过单位角时，AB 杆端的转动使 B 处产生等于 $4EI/L$ 的反时针方向的力矩，由于 BC 杆端的转动使 B 处产生等于 $4EI/L$ 的另一个反时针方向的力矩。所以，B 处的总力矩等于刚度 S_{11}，为

$$S_{11}=\frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L}=\frac{8EI}{L}$$

刚度 S_{21} 为当 B 点转过单位角时 C 点处所产生的力偶，此刚度为

$$S_{21}=\frac{2EI}{L}$$

S_{11} 和 S_{21} 均为正值，因为力偶作用方向与未知转动 D_1 和 D_2 的正方向相同。刚度 S_{12} 和 S_{22} 示于图 11-26 d 中，它们为：

$$S_{12}=\frac{2EI}{L}\qquad S_{22}=\frac{4EI}{L}$$

上述四个刚度称为**节点刚度**，因为它们代表诸未知节点位移的单位值使结构诸节点处所产生的作用力。一般地，节点刚度藉与该节点相联结的杆件刚度之和来求得。另外，根据本例观察出

$$S_{12}=S_{21} \qquad (11\text{-}27)$$

这种刚度的互等关系普遍适用，并相似于柔度的互等关系（方程 11-23）。

现在可以写出与相应于 D_1 和 D_2 的作用力有关的两个

平衡方程．分别令 A_1 和 A_2 代表原来结构上相应于 D_1 和 D_2 的作用力。本例中，作用力 A_1 等于 M_1，而作用力 A_2 等于零，因为原来梁上 C 点处没有作用力偶．平衡方程表示 B 点和 C 点处力矩的平衡．它们借应用叠加原理求出，并观察出原来结构中的作用力（图 11-26 a）等于由于荷载使约束结构中产生的相应作用力（图 11-26 b）加上单位位移下约束结构中的相应作用力（图 11-26 c 和 d）乘以其位移本身．所以，平衡方程为：

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_{1P} + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 \\
A_2 &= A_{2P} + S_{21}D_1 + S_{22}D_2
\end{aligned}
\qquad (11\text{-}28)
$$

这些方程中全部所用的正负号规则是：当作用力与相应未知位移为相同方向时，该作用力为正．方程(11-28)可用来求解未知位移 D_1 和 D_2。

为了明确地求解平衡方程，从而完成上述例题，让我们应用与柔度法实例中相同的荷载值[1)]，即

$$P_1 = 2P \qquad M_1 = PL \qquad P_2 = P \qquad P_3 = P$$

将这些量代入方程(d)，我们得出约束梁上相应于 D_1 和 D_2 的下列作用力值：

$$A_{1P} = -\frac{PL}{8} \qquad A_{2P} = -\frac{PL}{8}$$

根据这些计算观察出：荷载 P_3 不影响 A_{1P} 或 A_{2P}，因而它不影响节点位移 D_1 和 D_2 的计算。然而，此荷载却影响 C 点处梁的反力值．

现在除未知数外，已经确定了平衡方程(方程 11-28)中的所有项。将诸项代入，这些方程成为

$$PL = -\frac{PL}{8} + \frac{8EI}{L}D_1 + \frac{2EI}{L}D_2$$

$$0 = -\frac{PL}{8} + \frac{2EI}{L}D_1 + \frac{4EI}{L}D_2$$

1) 见图11-16a．——译者注

对未知节点位移进行求解，得出：

$$D_1=\frac{17\,PL^3}{112\,EI}\qquad D_2=-\frac{5\,PL^2}{112\,EI}$$

D_2的减号表示该转动实际上是顺时针方向的。

分析的最后部分是确定反力和应力合力。在本例中，求出固定支承处的竖直反力 R_a 和反力矩 M_a(图 11-26 a)是方便的。这些反力的叠加方程为：

$$M_a=M_a^0+M_a'D_1+M_a''D_2 \tag{e}$$

$$R_a=R_a^0+R_a'D_1+R_a''D_2 \tag{f}$$

式中所有各项的意义从图 11-26 可以看出。这两个方程右边的所有 M 项和 R 项根据图 11-23 和 11-24 所给的固定端作用力和刚度公式容易得到，因而，我们求出

$$M_a^0=\frac{P_1L}{8}=\frac{PL}{4}\qquad M_a'=\frac{2\,EI}{L}\qquad M_a''=0$$

$$R_a^0=\frac{P_1}{2}=P\qquad R_a'=\frac{6\,EI}{L^2}\qquad R_a''=0$$

将这些值以及 D_1 和 D_2 的表达式代入方程(e)和(f)得

$$M_a=\frac{PL}{4}+\frac{2\,EI}{L}\left(\frac{17\,PL^2}{112\,EI}\right)=\frac{31\,PL}{56}$$

$$R_a=P+\frac{6\,EI}{L^2}\left(\frac{17\,PL^2}{112\,EI}\right)=\frac{107P}{56}$$

用已知的 M_a 和 R_a，现在我们就可以根据静力平衡方程求出所有反力和所有应力合力。这个结论的理由是：此结构是两次静不定者，因此，知道任意两个力就足以藉静力学求出所有其它的力。因此，我们可以认为此结构的分析已经完成。

上述例子讨论了两次动不定的结构，然而，我们可以容易地推广于 n 次动不定结构的平衡方程。在这种情况下，平衡方程的普遍形式为

$$\begin{aligned}A_1&=A_{1P}+S_{11}D_1+S_{12}D_2+\cdots+S_{1n}D_n\\A_2&=A_{2P}+S_{21}D_1+S_{22}D_2+\cdots+S_{2n}D_n\\&\cdots\cdots\\A_n&=A_{nP}+S_{n1}D_1+S_{n2}D_2+\cdots+S_{nn}D_n\end{aligned} \tag{11-29}$$

这 n 个方程可用于求解结构的 n 个未知节点位移。这些平衡方程的普遍形式与柔度法中的协调方程形式上相同(见方程 11-25),观察这两种方程组之间的相似性是很有趣的。刚度法的平衡方程表达相应于未知位移的作用力的叠加,而柔度法的协调方程表达相应于未知作用力的位移的叠加。

方程(11-29)中出现的刚度系数藉刚度互等原理联系如下:

$$S_{ij}=S_{ji} \tag{11-30}$$

刚度之间的这种重要关系式,类似于柔度的互等关系(见方程 11-24),它在后节中以普遍项建立起来(见方程 11-55)。

平衡方程(11-29)写成仅考虑结构上荷载效应的形式,但是这些方程容易修改成包括温度变化的效应、预应变的效应以及支承沉降的效应。在确定作用力 A_{1P}, A_{2P}, $\cdots$, A_{nP} 时只需包括这些效应就可以了。此外,方程(11-29)适用于包括桁架和空间框架的许多结构类型,虽然在本节中的例子仅限于梁和平面框架。自然,方程(11-29)是建于叠加原理的基础之上的,因此,刚度法仅能适用于线性弹性结构,如前面所示[1]。

刚度法的另一个名称是为**位移法**,因为位移在方程中是为未知量,它也可以称为**平衡法**,因为其方程代表力和力矩之总和[2]。

---

1) 关于刚度法理论进一步的发展,包括对于桁架和其它结构类型的应用,见结构分析方面的教科书,例如参考文献 11-14,11-17,11-18 和 11-19。当应用矩阵排成式子在计算机上计算时,刚度法在结构分析中的有力的性能就成为很明显了,如参考文献 11-14 和 11-21 所述。

2) Navier 可能在 1826 年首先应用刚度分析法,他以节点位移作为未知量,然后写出两个平衡方程(见参考文献 1-1 第 75—76 页和参考文献 7-1 和 1-4),求解二次动不定桁架。后来 Clebsch 于 1862 年普遍地叙述桁架的刚度法(见参考文献 1-1 第 259—260 页和参考文献 11-22)。刚度法对于平面框架的应用是 Bendixen 于 1914 年首创(参考文献 11-23 和 1-1 第 422 页),刚度法的普遍叙述是 Ostenfeld 于 1926 年提出的(见参考文献 11-24)。

例题　图 11-27 中所示连续梁 ABC 的 A 处为固定支承，B 处为辊轴支承，C 处为导向支承。导向支承容许顺竖直方向平移，但阻止 C 点处杆轴任意转动。该梁承受分别作用于 AB 跨和 BC 跨中点处的荷载 P_1 和 P_2。两跨的长度为 L_1 和 L_2。

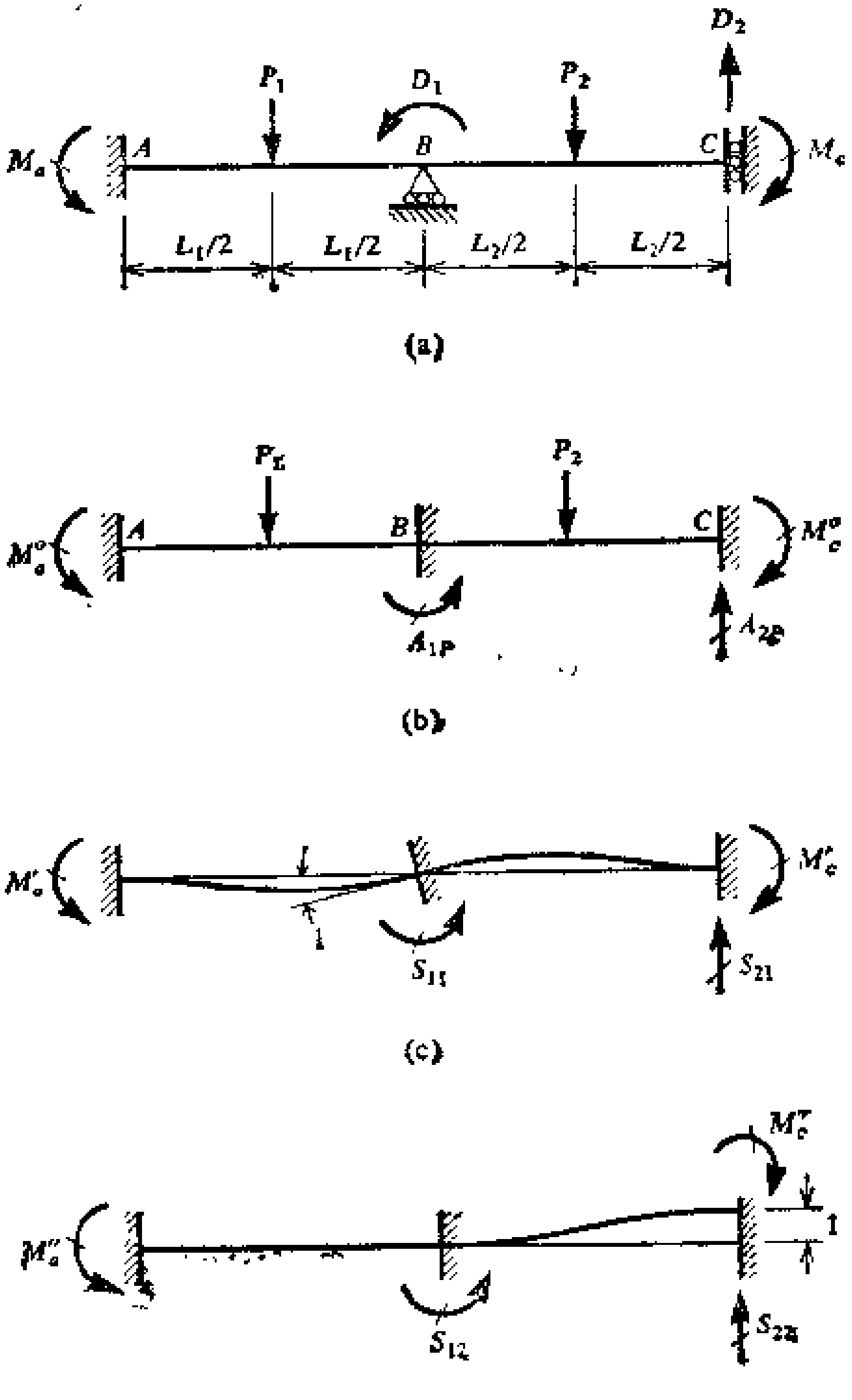


图 11-27　例题. 刚度法

仅有的未知节点位移是 B 处的转动和 C 处竖直平动。这些位移分别以 D_1 和 D_2 表示，如图 11-27 a 所示。D_1 的正方向是反时针方向，D_2 的正方向是向上。除了求出这些位移外，我们还将计算梁端处的反力偶 M_a 和 M_c(图 11-27 a)。

藉阻止 B 处转动和 C 处平动获得约束结构，因此形成图 11-27 b 所示两跨固定端梁。由于作用于此约束结构的荷载为 P_1 和 P_2，相应于未知位移 D_1 和 D_2 的作用力为

$$A_{1P}=-\frac{P_1L_1}{8}+\frac{P_2L_2}{8}\qquad\qquad A_{2P}=\frac{P_2}{2}$$

另外，A 处和 C 处的力偶为

$$M_a^0=\frac{P_1L_1}{8}\qquad\qquad M_c^0=-\frac{P_2L_2}{8}$$

第二步是将未知位移 D_1 和 D_2 的单位值引入约束结构，如图 11-27 c 和 d 中所示。对于第一种情况的各种作用力如下：

$$S_{11}=\frac{4\,EI}{L_1}+\frac{4\,EI}{L_2}\qquad\qquad S_{21}=-\frac{6\,EI}{L_2^2}$$

$$M_a'=\frac{2\,EI}{L_1}\qquad\qquad M_c'=-\frac{2\,EI}{L_2}$$

它们是按图 11-24 中的公式所得。类似地，对于 $D_2=1$ 的情况，我们得到

$$S_{12}=-\frac{6\,EI}{L_2^2}\qquad S_{22}=\frac{12\,EI}{L_2^3}\qquad M_a''=0\qquad M_c''=\frac{6\,EI}{L_2^2}$$

为了求出节点位移 D_1 和 D_2，现在需要将上述诸量代入平衡方程 (11-28)，然后求解该方程。这些方程中的作用力 A_1 和 A_2 为零，因为 B 点处没有力偶，C 点处没有竖直力(见图 11-27 a)作用。对 D_1 和 D_2 求解方程之后，我们可以根据下列叠加方程求出力偶 M_a 和 M_c：

$$M_a=M_a^0+M_a'D_1+M_a''D_2\tag{g}$$

$$M_c=M_c^0+M_c'D_1+M_c''D_2\tag{h}$$

为了完成这个例子的解，让我们假定下列关系：

$$P_1=2\,P\qquad P_2=P\qquad L_1=L_2=L$$

于是前面所得诸项简化如下：

$$A_{1P}=-\frac{PL}{8}\qquad A_{2P}=\frac{P}{2}\qquad M_a^0=\frac{PL}{4}\qquad M_c^0=\frac{PL}{8}$$

$$S_{11}=\frac{8\,EI}{L}\qquad S_{12}=S_{21}=-\frac{6\,EI}{L^2}\qquad S_{22}=\frac{12\,EI}{L^3}$$

$$M_a'=\frac{2\,EI}{L}\qquad M_c'=-\frac{2\,EI}{L}\qquad M_a''=0\qquad M_c''=\frac{6\,EI}{L^2}$$

将这些项代入方程(11-28)，然后重新排列，我们得到：

$$4\,LD_1-3\,D_2=\frac{PL^3}{16\,EI}$$

$$LD_1-2\,D_2=\frac{PL^3}{12\,EI}$$

从它们得出：

$$D_1=-\frac{PL^2}{40\,EI}\qquad D_2=-\frac{13\,PL^3}{240\,EI}$$

其减号表示 B 处转动为顺时针方向，C 处平移向下。

作为最后的步骤，我们根据方程(g)和(h)得出反力矩 M_a 和 M_c 如下：

$$M_a=\frac{PL}{4}+\frac{2\,EI}{L}\left(-\frac{PL^2}{40\,EI}\right)=\frac{PL}{5}$$

$$M_c=\frac{PL}{8}-\frac{2\,EI}{L}\left(-\frac{PL^2}{40\,EI}\right)+\frac{6\,EI}{L^2}\left(-\frac{13\,PL^3}{240\,EI}\right)=-\frac{3\,PL}{20}$$

由于该结构为二次静不定，这两个力矩的求得满足了允许用静力学确定所有其它的反力和应力合力。

11.8 应变能和余能

应变能和余能这两种概念为结构分析中某些极为有力的方法提供了基础。这些方法可以适用于线性结构和非线性结构，虚功原理(方程 11-1)和单位荷载法也是它们的基本形式(方程 11-3)。然而，互等定理、柔度法和刚度法均建于叠加原理的基础之上，因此，仅适用于具有线性性能的结构。在单位荷载法的情况下，我们从对非线性结构推导方程(11-3)来

开始；然后，我们把线性结构作为特殊情况（方程 11-4）。在后面能量法的讨论中，将采取类似的程序。

结构性能中的非线性主要是由于两种原因之一所产生。最明显的原因是材料具有非线性应力-应变曲线，在这种情况中，我们称结构为材料非线性。另外一种可能性是由于变形结构的几何形状所产生的非线性。只要结构的挠度改变施加荷载的作用或改变反力的作用，这种情况就会发生。具有偏心轴向荷载的柱，就是一个例子（见第 10.1 节）。从这里我们看出：即使柱的横向挠度非常小，但对于柱中的弯矩具有重要影响。另一个例于如第 6.12 节中所述具有大挠度的梁。在这些例子中，梁的材料是假定服从于虎克定律的，但是由于变形后的结构几何形状，我们发现其挠度和应力合力与所作用的荷载成非线性关系。这些例子是几何非线性的实例。

不管是存在材料非线性还是几何非线性，我们总是假设结构的材料保持弹性。如果这样，那么在下面讨论中所推导的结果对于结构一次以上加载循环是有效的。反之，如果材料不是弹性的，我们的结果则仅适合于结构第一次加载过程中。

在材料服从虎克定律，而且没有几何形状的非线性这种特殊情况下，结构将表现为线性形式，可以应用叠加原理。然而，对于非线性结构，我们必须常常注意到叠加原理一般是不能适用的。

为了说明能量的概念，让我们讨论承受轴向荷载 P 的棱柱形杆，该力产生均匀分布应力 $\sigma=P/A$（图 11-28 a）。杆的应变 $\epsilon=\delta/L$，式中 δ 为杆的伸长量，L 为杆的长度。杆的材料假设为弹性者，并具有图 11-28 b 所示非线性应力-应变曲线。于是荷载-挠度的关系（图 11-28 c）具有与应力-应变曲线相同的一般形状。荷载 P 所做的功为

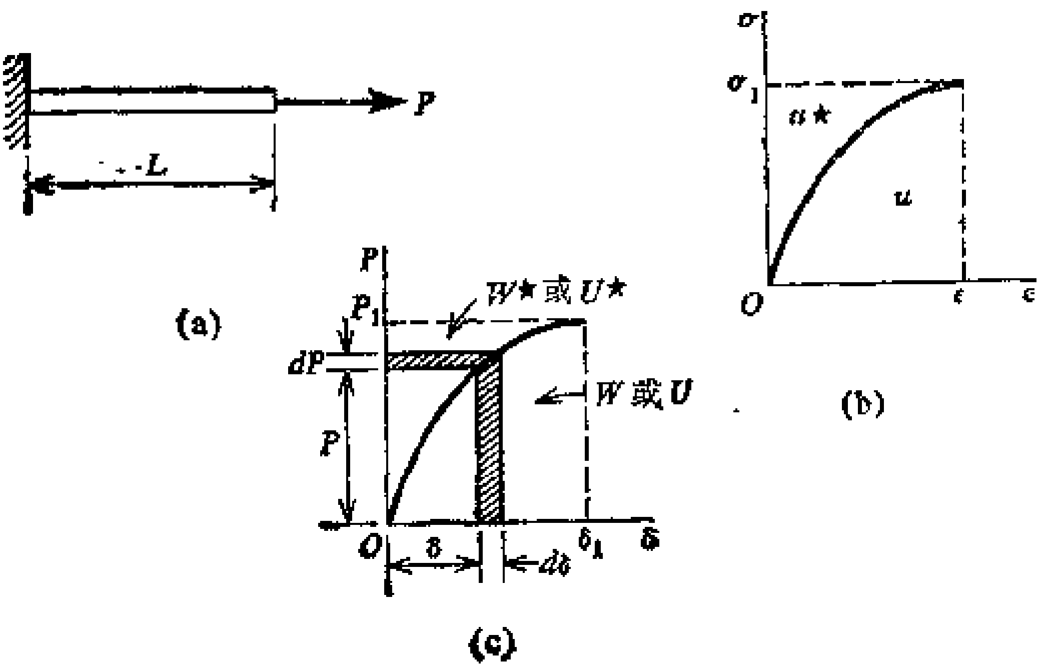


图 11-28 应变能和余能

$$W=\int_0^{\delta_1} Pd\delta$$

式中 δ_1 为挠度的最大值。这个功的表达式可按几何解释为图 11-28 所示荷载-挠度曲线下面的面积。由于该杆属于弹性，而且因为我们略去加载和卸载过程中任何能量的损失(换句话说，因为我们是讨论保守系统)，荷载所作的全部功将以弹性应变能的方式储存于杆中，在卸载时它可以得到恢复。所以，应变能等于功 W，为

$$U=W=\int_0^{\delta_1} Pd\delta \tag{11-31}$$

材料单位体积中的应变能 u 可藉讨论单位尺寸的微分体积单元承受应力 σ 并产生应变 ϵ 来求得，其应变具有最大值 $\epsilon_1=\delta_1/L$；因此

$$u=\int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon \tag{11-32}$$

方程(11-32)中的积分代表图 11-28 b 中应力-应变曲线下面

的面积．这种 u 的表达式可以从总应变能表达式(见方程 11-31)被杆的体积 V(等于 AL)去除，并考虑 $\sigma=P/A$ 和 $d\epsilon=d\delta/L$ 来求得相同结果．相反地，总应变能可根据单位体积应变能藉积分求得如下：

$$U=\int u dV \tag{11-33}$$

式中 dV 为体积的单元，该积分是对杆的整个体积来进行．

在应力-应变曲线服从虎克定律的特殊情况下，因而 $\sigma=E\epsilon$, $P=EA\delta/L$，上述应变能的表达式则为：

$$U=\frac{EA\delta_1^2}{2L}=\frac{P_1^2L}{2EA} \tag{11-34a, b}$$

$$u=\frac{E\epsilon_1^2}{2}=\frac{\sigma_1^2}{2E} \tag{11-35a, b}$$

这些表达式与前面第 1.10 节中所导得的相同 (见方程 1-16 和1-17)．

现在让我们定义具有非线性的荷载-挠度曲线的杆的另一种功(见图11-28)．这种功称为**余功** W^*，定义如下：

$$W^*=\int_0^{P_1}\delta dP$$

余功用荷载-挠度曲线与竖直轴之间的面积来表示 (图 11-28c)．它不象功 W 那样，它没有明显的物理含义，但是我们可能注意到

$$W+W^*=P_1\delta_1 \tag{a}$$

因而，按几何意义，功 W^* 为功 W 的余数，因为它形成图11-28c 中所示的矩形．杆的**余能** U^* 等于所作用荷载的余功，因此

$$U^*=W^*=\int_0^{P_1}\delta dP \tag{11-36}$$

余能可藉讨论承受应力 σ 和应变 ϵ 的单元，以类似于定义杆

中单位体积应变能的方式，用材料的单位体积来表达，因而

$$u^* = \int_0^{\sigma} \epsilon d\sigma \tag{11-37}$$

单位体积的余能等于应力-应变曲线与应力轴之间的面积(图11-28 b)．另外，结构的总余能可根据 u^* 藉积分求得：

$$U^* = \int u^* dV \tag{11-38}$$

有时余能称为应力能以保持与应变能相似．

如果图11-28 b中所示的应力-应变曲线为一直线，那么，显然余能与应变能成为相等．然而，这两种能量在概念上彼此是完全不同的，所以，有时即使在线性情况下，它们在数字上相同，但还需要保留着它们的区别．

虽然所有上述关于应变能和余能的概念是对于受拉杆的，但它们可容易地扩大到其它加载情况，譬如扭转和弯曲．因而，我们可以考虑图11-28 c所示荷载-挠度曲线代表任一种结构中荷载与其相应位移之间的关系，例如梁、平面框架或桁架．在所有这些情况下，我们可以应用方程(11-31)和(11-36)得出与荷载有关的功和余功．这些功的量分别等于结构的应变能和余能．此外，如果荷载为具有相应位移 θ 的力偶 M，那么我们仅要分别用 M 和 θ 代替 P 和 δ．

通常有一个以上荷载作用于结构上，因此，其能量和功必须藉总和来求得．因而，如果非线性弹性结构承受几个同时作用的荷载，而且彼此的比例保持不变，则应变能和余能为

$$U = \sum \int P d\delta \qquad U^* = \sum \int \delta dP \qquad (11\text{-}39a, b)$$

这些方程中的总加号是对所有作用于结构上的荷载的．另外，其积分是按下限为零、上限分别等于 δ 和 P 的最大值来进行．

当结构属于线性时，上述 U 和 U^* 的表达式变成相等，

且具有按方程(1-15)所得的形式：

$$U = U^* = \sum_{i=1} \frac{P_i\delta_i}{2} = \frac{P_1\delta_1}{2} + \frac{P_2\delta_2}{2} + \cdots + \frac{P_n\delta_n}{2} \quad (11-40)$$

式中 P_i 和 δ_i 为诸荷载和相应位移的最大值，n 为荷载的总个数. 方程(11-40)是用位移和荷载来表示 U 和 U^*，但是我们可藉一个量表示另一个量来代入，容易地仅用位移或仅用荷载来表达它们. 因而，由于结构是属于线性的，荷载可用下列方法表达为位移的线性组合：

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2 + \cdots + a_{1n}\delta_n \\ P_2 &= a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2 + \cdots + a_{2n}\delta_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= a_{n1}\delta_1 + a_{n2}\delta_2 + \cdots + a_{nn}\delta_n \end{aligned} \quad (11-41)$$

式中系数 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}$ 为与结构性能有关的常数. 如果将这些关系代入方程(11-40)，其应变能和余能将表达为仅是位移的函数，如下列普遍形式：

$$\begin{aligned} U = U^* = & b_{11}\delta_1^2 + b_{12}\delta_1\delta_2 + \cdots + b_{1n}\delta_1\delta_{11} \\ & + b_{21}\delta_2\delta_1 + b_{22}\delta_2^2 + \cdots + b_{2n}\delta_2\delta_n \\ & \cdots\cdots \\ & + b_{n1}\delta_n\delta_1 + b_{n2}\delta_n\delta_2 + \cdots + b_{nn}\delta_n^2 \end{aligned} \quad (11-42)$$

式中诸 b 是根据诸 a 得出的新常数. 这种形式的表达式称为**二次函数**，因为它的所有项均为二次. 另一种方法，我们可用荷载来对方程(11-41)求解位移，得出：

$$\begin{aligned} \delta_1 &= c_{11}P_1 + c_{12}P_2 + \cdots + c_{1n}P_n \\ \delta_2 &= c_{21}P_1 + c_{22}P_2 + \cdots + c_{2n}P_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_n &= c_{n1}P_1 + c_{n2}P_2 + \cdots + c_{nn}P_n \end{aligned} \quad (11-43)$$

现在式中诸 c 为与诸 a 有关的新常数. 当将这些方程代入方

程(11-40)时，我们得到 U 和 U^* 的另一个二次函数，即

$$\begin{aligned}U=U^*=&d_{11}P_1^2+d_{12}P_1P_2+\cdots+d_{1n}P_1P_n\\&+d_{21}P_2P_1+d_{22}P_2^2+\cdots+d_{2n}P_2P_n\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+d_{n1}P_nP_1+d_{n2}P_nP_2+\cdots+d_{nn}P_n^2\end{aligned}\tag{11-44}$$

式中的系数还是与结构性能有关的常数。这些结果表明当结构属于线性情况下，其应变能和余能可以表达为位移的二次函数，也可表达为荷载的二次函数。

例题 1 让我们假设某结构承受荷载 P，该荷载产生按方程 $\delta=CP^2$ 给出的相应位移 δ，式中 C 为常数（见图 11-29）。试确定此结构中的应变能和余能。

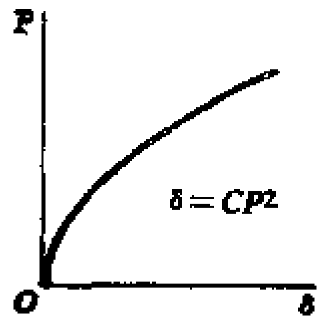


图 11-29 例题 1．非线性荷载-挠度曲线

其应变能根据方程（11-31）藉 δ 表示 P，求得，因而

$$U=\int_0^\delta\sqrt{\frac{\delta}{C}}d\delta=\frac{2}{3}\frac{\delta^{3/2}}{C^{1/2}}\tag{11-45}$$

根据方程(11-36)，余能为

$$U^*=\int_0^P CP^2dP=\frac{CP^3}{3}\tag{11-46}$$

注意：应变能是用位移来表达的，余能是用荷载来表达的。这种表示能量的方式与 U 和 U^* 的定义的性质是一致的；此外，在下面几节中，我们将看到，在求挠度和分析结构时这种形式是最有用的。自然，在某些情况下，完全可能用荷载来表达应变能，用位移来表达余能。本例就可藉原来荷载-挠度关系 $\delta=CP^2$ 代入方程(11-45)和(11-46)来得出这样的结果。

例题 2 有一结构，由两根水平杆 AC 和 CB 组成，每一杆的长度为 L，示于图 11-30 a 中。这两杆为销接支承，并于 C 处联结起来。杆的材料为线性弹性者，每一杆具有常数轴向刚度 EA。如果竖直荷载 P 作用于 C 处，只要这两杆保持它们原来水平位置就不能承受荷载。

然而，当荷载是逐渐作用上去时，C 点将向下变位，杆中产生拉力。因而，在荷载下产生微小挠度 δ 的情况下，结构可以达到平衡位置（见图 11-30b）。

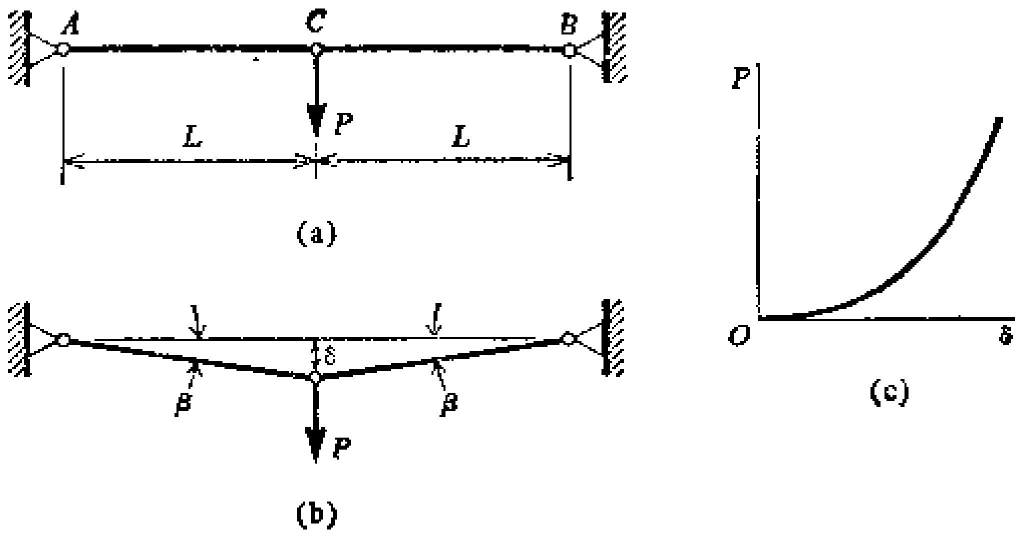


图 11-30　例题 2. 几何非线性的结构

让我们求算此结构的应变能和余能。为此，我们首先必须得出荷载 P 与挠度 δ 的关系。这种关系可根据力的表达式和杆的伸长量表达式来求得。因此，根据静力学，每一杆中的拉力 N 为

$$N=\frac{P}{2\sin\beta}$$

式中 β 为杆的转动角。然而，挠度 δ 和角 β 均假设为微小的量，因此我们可以用 δ/L 代替 β，以 β 代替 $\sin\beta$。所以上述方程成为

$$N=\frac{PL}{2\delta}$$

现在可以根据虎克定律求出每一根杆的伸长量：

$$\Delta=\frac{NL}{EA}=\frac{PL^2}{2EA\delta} \tag{b}$$

可以根据变位后结构的几何形状求得联系结构挠度 δ 与杆伸长量 Δ 的第二个方程。每一根杆的长度增长值（根据图 11-30 b）为

$$\Delta=\sqrt{L^2+\delta^2}-L=L\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{L}\right)^2}-L$$

根号内的表达式按二项式定理展开后得出

$$\Delta = L\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{L}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{\delta}{L}\right)^4+\cdots\right]-L$$

对于微小的挠度，我们可以抛掉包括 $\frac{\delta}{L}$ 的两次幂以上的各项，这样，只保留括号内的前两项。所以，Δ 的表达式简化为

$$\Delta=\frac{\delta^2}{2L} \tag{c}$$

现在我们可以用方程(b)和(c)消去 Δ，从而产生所需要求的结构之荷载-挠度关系。此关系可以用下面任一方式来表达：

$$P=\frac{EA\delta^3}{L^3} \qquad \delta=\sqrt[3]{\frac{PL^3}{EA}} \tag{11-47a, b}$$

这些方程的图解示于图 11-30 c 中。注意这样一点是很重要的：本例中所分析的结构即使材料本身服从虎克定律，但几何形状却是非线性的。

现在我们可以根据方程(11-31)容易地求出结构的应变能：

$$U=\int_0^\delta Pd\delta=\int_0^\delta \frac{EA\delta^3}{L^3}d\delta=\frac{EA\delta^4}{4L^3} \tag{11-48}$$

同样，根据方程(11-36)求得余能：

$$U^*=\int_0^P \delta dP=\int_0^P \sqrt[3]{\frac{PL^3}{EA}}dP=\frac{3}{4}\frac{P^{4/3}L}{\sqrt[3]{EA}} \tag{11-49}$$

再次注意：应变能是用位移表达的，余能是用荷载表达的。

例题 3　有一长度为 L 的矩形横截面悬臂梁（宽度为 b、高度为 h），自由端处承受集中荷载 P（见图 11-31）。其应力-应变图用方程 $\sigma=B\sqrt{\epsilon}$ 来表示，式中 B 为常数，对于拉伸和压缩，此方程均相同。试求算此梁的余能。

本例中应力和应变自梁的一端向另一端变化，因此需要从确定单位体积的余能 u^* 来开始。然后，我们可以对整个梁体积进行积分，以得出总余能 U^*。u^* 这个量将为 x（距梁自由端的距离）和 y（距中性轴的距离）的函数。为了求出 u^*，我们需要知道梁上座标为 x 和 y 的任一点上所存在的应力 σ_1。如果我们知道这同一点处的应变 ϵ_1，此应力就

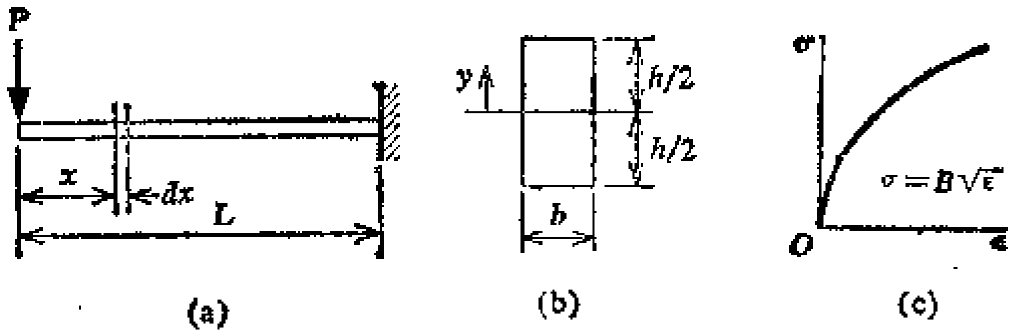


图 11-31 例题 3. 由具有非线性应力-应变曲线的材料构成的悬臂梁

可以求出来；而如果知道其曲率，应变就可求出来．因而，我们必须从确立梁的曲率来开始我们的分析。

藉第 9．7节中对于梁的非弹性弯曲所述的方法，容易求出曲率．根据方程(9-22)，其曲率为

$$k=\frac{\epsilon_t}{h} \tag{d}$$

式中 ϵ_t 为梁顶面纤维处应变的两倍(见方程 9-26)．根据方程(9-27)，我们得出任一横截面处弯矩 M 的表达式：

$$M=\frac{2bh^2}{\epsilon_t^2}\int_0^{\epsilon_t/2}\sigma\epsilon d\epsilon$$

将 $\sigma=B\sqrt{\epsilon}$ 代入，然后积分，我们求出

$$M=\frac{Bh^2b\sqrt{\epsilon_t}}{5\sqrt{2}}$$

根据它得到：

$$\epsilon_t=\frac{50\ M^2}{B^2b^2h^4} \tag{e}$$

现在，其曲率可藉方程(d)和(e)消除 ϵ_t 并以 Px 代替弯矩 M 来求得：

$$k=\frac{50\ P^2x^2}{B^2b^2h^5} \tag{f}$$

此方程所得的曲率为顺梁轴度量的距离 x 之函数。

梁上任一横截面处的应变 ϵ_1 按方程(9-1)求得为

$$\epsilon_1=ky$$

应用下列应力-应变关系可以从应变求出应力：

$$\sigma_1=B\sqrt{\epsilon_1}=B\sqrt{ky}$$

根据方程(f)，代入曲率 k，得

$$\sigma_1=\frac{5\sqrt{2}Py^{1/2}x}{bh^{5/2}} \tag{g}$$

它为梁中任一点处应力的表达式。

现在，我们准备求算单位体积的余能(见方程 11-37)：

$$u^*=\int_0^{\sigma_1}\epsilon d\sigma=\int_0^{\sigma_1}\frac{\sigma^2}{B^2}d\sigma$$

其中 σ_1 由方程(g)得出。求积分后，得到

$$u^*=\frac{250\sqrt{2}P^3y^{3/2}x^3}{3B^2b^3h^{15/2}} \tag{h}$$

该式得出单位体积的余能为 x 和 y 的函数。整个梁的余能 U^* 藉对梁的整个体积将 u^* 进行积分来求得，如方程(11-38)所示。在建立积分式时，我们令 x 自 0 变到 L，y 自 0 变到 $h/2$；其结果将按梁的两半之二倍来计算。因而，余能方程为

$$U^*=\int u^*dV=2\int_0^L\left[\int_0^{h/2}u^*bdy\right]dx$$

将 u^* 的表达式(h)代入，得

$$U^*=\frac{500\sqrt{2}P^3}{3B^2b^2h^{15/2}}\int_0^L\left[\int_0^{h/2}y^{3/2}dy\right]x^3dx$$

根据它得：

$$U^*=\frac{25P^3L^4}{6B^2b^2h^5} \tag{11-50}$$

此方程得出以力 P 表示的余能，这是我们所希望求得的。

11.9 应变能法

现在我们将着手叙述一些重要的应变能定理，这些定理形成结构分析的基础。让我们假想有一结构承受 n 个荷载 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，且假想这些荷载产生相应的位移 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$。按前面所讨论，知道 P 和 δ 代表广义的力和其相应位移，因而它们可能是：集中力和平动、力偶和转动位移、一对力和

相对位移，或一对力偶和相对转动位移．还知道结构可能是非线性的，其意思是任一力 P_i 和其相应位移 δ_i 之间的关系藉图 11-28 c 中的荷载-位移图来表示．

结构的应变能 U 等于荷载作用期间荷载所做的功．理论上每一个力 P_i 可以通过应用合理的荷载-位移关系表达为其相应位移 δ_i 的函数．荷载的这些表达式可代人方程（11-39a），然后进行积分并总加起来．所得应变能 U 的表达式将为位移 δ 的函数．用这些以位移表达的 U，于是我们可以查明当一个位移 δ_i 增加微量 $d\delta_i$，而所有其它位移保持不变时应变能的增加．应变能的增加以 dU 表示，用下面表达式得出

$$dU=\frac{\partial U}{\partial \delta_i}d\delta_i$$

式中偏导数 $\partial U/\partial \delta_i$ 为能量对 δ_i 的变化率．我们还可以观察出，当位移 δ_i 增大微量 $d\delta_i$ 时，相应力 P_i 将做功，而其它任何的力都不做功，因为其它的位移没有改变．此功为 $P_i d\delta_i$，也就等于结构中所储存的应变能之增加：

$$dU=P_i d\delta_i$$

令上面 dU 的两个表达式相等，得到

$$P_i=\frac{\partial U}{\partial \delta_i} \tag{11-51}$$

此方程表明：只要应变能表达为位移的函数，应变能对任一位移 δ_i 的偏导数便等于其相应力 P_i。自从意大利工程师卡斯提里阿诺(Castigliano)在 1879 年所出版他的名著中导出并应用此原理之后，此方程便称为**卡斯提里阿诺第一定理**（见参考文献 11-25 至 11-29）。

为了说明卡斯提里阿诺第一定理，让我们引用上节中例题 1 所述的非线性结构。该结构的应变能藉方程（11-45）求得。将卡斯提里阿诺第一定理用于该表达式，我们得出：

$$P=\frac{dU}{d\delta}=\frac{d}{d\delta}\left(\frac{2}{3}\frac{\delta^{3/2}}{C^{1/2}}\right)=\sqrt{\frac{\delta}{C}}$$

根据它，得 $\delta=CP^2$，它为荷载与挠度的正确关系。

用同样的方式，我们可以将卡斯提里阿诺第一定理用于上节例题 2 所述图 11-30 a 中几何非线性的结构。其应变能藉方程(11-48)给出，因而我们得出：

$$P=\frac{dU}{d\delta}=\frac{d}{d\delta}\left(\frac{EA\delta^4}{4L^3}\right)=\frac{EA\delta^3}{L^3}$$

我们再次看到，此结果与前面的分析是一致的（见方程 11-47 a）。

卡斯提里阿诺第一定理提供了将应变能用于非线性结构分析的方法。该方法是建立于应用节点位移作为未知量的基础之上的，这与我们希望应用卡斯提里阿诺定理时应变能必须表达为位移的函数是一致的。为了叙述这个方法，让我们仍假设有一个带有 n 个未知节点位移 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 的非线性结构。还假设结构上仅有的荷载为相应于这些动未知数的荷载。达些荷载相应于 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 分别表示为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$。于是，按早已阐述的那样，可以用未知节点位移 D_1、$D_2, \cdots, D_n$ 表示结构的应变能 U。这样之后，我们可以对每一个位移应用卡斯提里阿诺第一定理，从而得到 n 个联立方程式：

$$P_1=\frac{\partial U}{\partial D_1} \qquad P_2=\frac{\partial U}{\partial D_2}\cdots P_n=\frac{\partial U}{\partial D_n} \qquad (11\text{-}52)$$

这些方程中每一方程的一般形式都是相同的. 如果我们研究一个典型方程，比如第 i 个方程，我们将发现，它的右边所包括的诸项中有 n 个节点位移 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 作为未知量. 因为这诸项加起来为荷载 P_i，我们得出结论，该方程实际上代表相应于 P_i 的诸力的平衡条件. 因而，方程 (11-52) 为平衡方程组，它可联解出用荷载 P_1、$P_2 \cdots P_n$ 所表示的节点位移. 分析中的最后步骤是根据节点位移求算其它量，例如计算反力和应力合力.

在上段所述应变能法中，利用节点位移作未知数，且需求解平衡方程，所以它是结构分析的**位移法**，这种方法在刚度法用于线性结构的情况时早已叙述过 (见第 11.7 节). 位移法和刚度法原则上说来是相同的方法. 然而，由于刚度的应用限于线性结构，从现在起，当讨论的结构可能是非线性者时，我们便采用"位移法"这一词，仅当讨论线性结构时，才采用"刚度法"一词. 用位移法分析非线性结构的例子示于后面例题 1 中.

现在让我们比较详细地讨论线性结构的特殊情况，亦即讨论叠加原理可以适用的结构. 在这种情况下，按上节所述，应变能 U 将为位移的二次函数. 所以，当有 n 个未知节点位移 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 和 n 个相应荷载 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 时，应变能 U 的普遍式成为：

$$
\begin{aligned}
U = & a_{11}D_1^2 + a_{12}D_1D_2 + \cdots + a_{1n}D_1D_n \\
& + a_{21}D_2D_1 + a_{22}D_2^2 + \cdots + a_{2n}D_2D_n \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + a_{n1}D_nD_1 + a_{n2}D_nD_2 + \cdots + a_{nn}D_n^2
\end{aligned}
$$

式中系数 a_{11}, a_{12} 等为仅与结构的性能有关的常数. 如果现在我们应用卡斯提里阿诺第一定理 (见方程 11-52)，我们得

到下列形式的平衡方程：

$$
\begin{aligned}
P_1&=\frac{\partial U}{\partial D_1}=S_{11}D_1+S_{12}D_2+\cdots+S_{1n}D_n\\
P_2&=\frac{\partial U}{\partial D_2}=S_{21}D_1+S_{22}D_2+\cdots+S_{2n}D_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P_n&=\frac{\partial U}{\partial D_n}=S_{n1}D_1+S_{n2}D_2+\cdots+S_{nn}D_n
\end{aligned}
\tag{11-53}
$$

这些式中的系数 S_{11}, S_{12} 等为与 a 有关的常数，亦即与结构的性能有关的常数。根据这些方程的形式，我们认出这些系数就是结构的刚度系数(见第 11.7 节和方程 11-29)。因而，方程(11-53)为结构分析的刚度法的平衡方程。

结构应变能与刚度之间的重要关系可藉求方程(11-53)的偏导数得出如下：

$$\frac{\partial P_1}{\partial D_1}=S_{11}\qquad \frac{\partial P_1}{\partial D_2}=S_{12}\ \cdots\ \frac{\partial P_1}{\partial D_n}=S_{1n} \tag{a}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial D_1}=S_{21}\qquad \frac{\partial P_2}{\partial D_2}=S_{22}\ \cdots\ \frac{\partial P_2}{\partial D_n}=S_{2n} \tag{b}$$

等等方程。由于 P_1 等于 $\partial U/\partial D_1$，方程(a)可写成：

$$S_{11}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_1^2}\qquad S_{12}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_2\partial D_1}\ \cdots\ S_{1n}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_n\partial D_1}$$

用类似方式，方程(b)成为

$$S_{21}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_1\partial D_2}\qquad S_{22}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_2^2}\ \cdots\ S_{2n}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_n\partial D_2}$$

根据导数的形式，亦即根据这些例子表现的形式，我们可以得出结论，刚度系数藉下面普遍式与应变能联系起来：

$$S_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_j\partial D_i} \tag{11-54}$$

因此，只要应变能 U 表达为未知位移 D_1, D_2, $\cdots$, D_n 的二次函数，我们就可以用微分方法立即得出结构的刚度。另外，U

的微分次序是没有什么关系的，所以建立起刚度的互等定理：

$$S_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_j \partial D_i}=\frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_j}=S_{ji} \qquad (11-55)$$

自然，上述刚度的讨论仅适用于线性弹性结构．下面的例题2和例题3是为应变能法用于线性结构的说明。

例题 1　图 11-32 a 所示桁架 ABC 于节点 B 处承受竖直荷载 P．AB 杆和 BC 杆具有等截面面积 A．材料的应力-应变图（见图 11-32 b）为 $\sigma=B\sqrt{\epsilon}$，式中 B 为常数，这一关系对于拉伸和压缩相同。

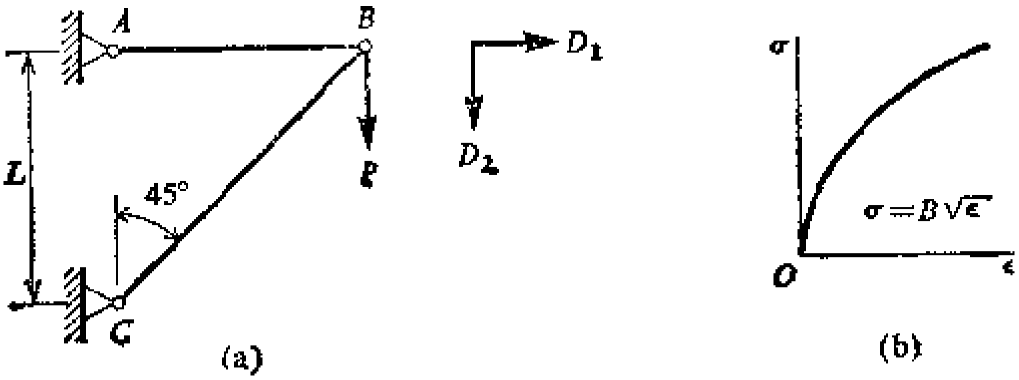


图 11-32　例题 1．由具有非线性应力-应变曲线的材料构成的桁架

我们将藉位移法应用卡斯提里阿诺第一定理分析此非线性弹性桁架。

此结构的节点 B 处有两个未知位移，一个为水平位移 D_1，一个为竖直位移 D_2，如图所示．结构的应变能必须用这些位移来表达，以便藉应用卡斯提里阿诺第一定理得出平衡方程．其应变能确定如下．由于位移 D_1，AB 杆产生的伸长量等于 D_1，BC 杆的伸长量等于 $D_1/\sqrt{2}$．另外，由于位移 D_2，BC 杆产生的缩短量等于 $D_2/\sqrt{2}$，但 AB 杆的长度不变．因而，AB 杆的总伸长量为 D_1，BC 杆的总缩短量为 $(D_2-D_1)/\sqrt{2}$．所以，杆中的应变为

$$\epsilon_{ab}=\frac{D_1}{L}\text{（伸长）} \qquad (c)$$

$$\epsilon_{bc}=\frac{D_2-D_1}{2L}(\text{缩短}) \tag{d}$$

现在可以根据方程(11-32)求出每一杆中单位体积的应变能：

$$u_{ab}=\int_0^{\epsilon_{ab}}\sigma d\epsilon=\int_0^{\epsilon_{ab}}B\sqrt{\epsilon}\,d\epsilon=\frac{2B}{3}\left(\frac{D_1}{L}\right)^{3/2}$$

$$u_{bc}=\int_0^{\epsilon_b}\sigma d\epsilon=\int_0^{\epsilon_{bc}}B\sqrt{\epsilon}\,d\epsilon=\frac{2B}{3}\left(\frac{D_2-D_1}{2L}\right)^{3/2}$$

由于每一杆整个体积中的应力和应变为常数，我们可藉杆的体积乘单位体积的应变能得到每一杆的总应变能。然后这些应变能可以加起来得出结构的总应变能 U：

$$U=U_{ab}+U_{bc}=u_{ab}AL+u_{bc}AL\sqrt{2}$$

根据它得到

$$U=\frac{AB}{3\sqrt{L}}[2D_1^{3/2}+(D_2-D_1)^{3/2}] \tag{11-56}$$

式中 A 为每一杆的横截面积。此方程得出用未知节点位移 D_1 和 D_2 所表示的应变能。

现在可用卡斯提里阿诺第一定理(见方程 11-52)得出平衡方程。在这些方程中的 P_1 代表相应于 D_1 的荷载，等于零，而 P_2 代表相应于 D_2 的荷载，等于 P。因而我们得到

$$P_1=\frac{\partial U}{\partial D_1}=\frac{AB}{2\sqrt{L}}[2D_1^{1/2}-(D_2-D_1)^{1/2}]=0$$

$$P_2=\frac{\partial U}{\partial D_2}=\frac{AB}{2\sqrt{L}}(D_2-D_1)^{1/2}=P$$

简化这两个方程，得到

$$2D_1^{1/2}-(D_2-D_1)^{1/2}=0 \tag{e}$$

$$(D_2-D_1)^{1/2}=\frac{2P\sqrt{L}}{AB} \tag{f}$$

联解上述方程，我们得出节点位移：

$$D_1=\frac{P^2L}{A^2B^2}\qquad D_2=\frac{5P^2L}{A^2B^2} \tag{11-57}$$

这一步借位移法完成了分析中的重要部分，因为现在我们知道了 D_1 和 D_2，我们就可以容易计算出所有杆力和反力。

为了说明上述这些计算，让我们来确定桁架中的所有杆力。首先将 D_1 和 D_2（见方程 11-67）代入方程(c)和(d)，得到杆的应变：

$$\epsilon_{ab}=\frac{D_1}{L}=\frac{P^2}{A^2B^2}(\text{伸长})$$

$$\epsilon_{bc}=\frac{D_2-D_1}{2L}=\frac{2P^2}{A^2B^2}(\text{缩短})$$

其次，根据应力-应变的规律确定其应力：

$$\sigma_{ab}=B\sqrt{\epsilon_{ab}}=\frac{P}{A}(\text{拉应力})$$

$$\sigma_{bc}=B\sqrt{\epsilon_{bc}}=\frac{\sqrt{2}\,P}{A}(\text{压应力})$$

最后，桁架诸杆中的力为：

$$N_{ab}=\sigma_{ab}A=P(\text{拉力})$$
$$N_{bc}=\sigma_{bc}A=\sqrt{2}\,P(\text{压力})$$

这些结果容易藉静力平衡来证明。

在本例中，即使结构非常简单，而且按静定结构可以非常容易地分析出来，但是我们却有意识地叙述了求解的全部步骤，以便说明位移法的一般概念和卡斯提里阿诺第一定理的应用。应用位移法需要求出两个联立方程的解，因为该桁架为两次动不定。然而，由于结构是静定的，它也可按下述进行分析：(1) 根据静力平衡求出杆力，(2) 用横截面积去除力求出杆中应力，(3) 根据应力-应变图得出杆的应变，(4)根据应变确定杆的伸长量，(5) 绘制威里沃特图（见第 1.5 节）得到节点 B 的位移 D_1 和 D_2。

例题 2　为了用卡斯提里阿诺第一定理和刚度法来说明线性结构的分析，让我们讨论图 11-33a 所绘的桁架。假设此桁架全部四根杆均由具有弹性模量 E 的同样线性弹性材料构成。每一根杆的长度为 L，横截面积为 A，其 β 角等于 30°。荷载 P_1 和 P_2 作用于桁架上节点 E 处。

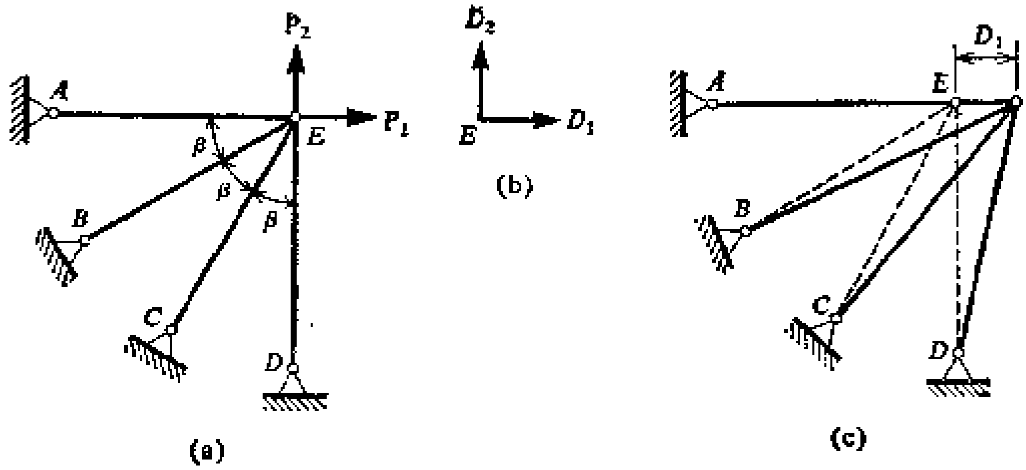


图 11-33　例题 2. 平面桁架

选这个桁架作为例子，是因为其节点平动仅有两个自由度，亦即只有节点 E 处的水平平动和竖直平动 D_1 和 D_2（图 11-33 b）. 为了将应变能 U 表达为 D_1 和 D_2 的函数，我们从假设单独产生 D_1 来着手（图 11-33 c）. 在这些条件下，诸杆的伸长量如下：

$$\Delta_{ae}=D_1 \qquad \Delta_{be}=\frac{\sqrt{3}\,D_1}{2} \qquad \Delta_{ce}=\frac{D_1}{2} \qquad \Delta_{de}=0$$

这些可以容易地按图的几何形状来证明. 当位移 D_2 单独产生时，诸杆的伸长值为：

$$\Delta_{ae}=0 \qquad \Delta_{be}=\frac{D_2}{2} \qquad \Delta_{ce}=\frac{\sqrt{3}\,D_2}{2} \qquad \Delta_{de}=D_2$$

所以，当 D_1 和 D_2 同时产生时，诸杆的伸长量如下：

$$\Delta_{ae}=D_1 \quad \Delta_{be}=\frac{\sqrt{3}\;D_1+D_2}{2} \quad \Delta_{ce}=\frac{D_1+\sqrt{3}\,D_2}{2} \quad \Delta_{de}=D_2 \tag{g}$$

每一根杆的应变能可以根据它的伸长量立即求算出来（见方程 11-34 a），然后，将所有四根杆的能量加起来得到桁架的总应变能 U：

$$U=\frac{EA}{2L}D_1^2+\frac{EA}{2L}\left(\frac{\sqrt{3}\;D_1+D_2}{2}\right)^2+\frac{EA}{2L}\left(\frac{D_1+\sqrt{3}\,D_2}{2}\right)^2+\frac{EA}{2L}D_2^2$$

或

$$U=\frac{EA}{2L}(2D_1^2+\sqrt{3}D_1D_2+2D_2^2) \tag{11-58}$$

注意：此表达式得出成为位移二次函数的应变能。

应用卡斯提里阿诺第一定理，我们得到下列平衡方程（见方程 11-53）：

$$P_1=\frac{2EA}{L}D_1+\frac{\sqrt{3}EA}{2L}D_2 \tag{h}$$

$$P_2=\frac{\sqrt{3}EA}{2L}D_1+\frac{2EA}{L}D_2 \tag{i}$$

这些方程可以容易地用于求节点位移，其结果为：

$$D_1=\frac{2L}{13EA}(4P_1-\sqrt{3}P_2) \qquad D_2=\frac{2L}{13EA}(-\sqrt{3}P_1+4P_2)$$

最后，桁架杆中的轴向力可以求算出来。其程序是：首先将节点位移 D_1 和 D_2 代入方程(g)求出诸杆的伸长量，然后应用方程 $N=EA\Delta/L$ 根据伸长量求出诸杆的力，其结果为：

$$N_{ae}=\frac{8P_1}{13}-\frac{2\sqrt{3}P_2}{13} \qquad N_{be}=\frac{3\sqrt{3}P_1}{13}+\frac{P_2}{13}$$

$$N_{ce}=\frac{P_1}{13}+\frac{3\sqrt{3}P_2}{13} \qquad N_{de}=-\frac{2\sqrt{3}P_1}{13}+\frac{8P_2}{13}$$

这样，应用应变能法进行桁架的全部分析便完成了。

例题 3 让我们讨论图 11-34 a 所示平面框架 ABC 作为应变能法用于线性结构的另一个例子。AB 杆和 BC 杆的长度均为 L，挠曲刚度均为 EI，结构上的荷载为作用于 B 点处的力偶 M_0。分析的目的在于计算节点位移 D_1 和 D_2，这两个位移为 B 点和 C 点的转角。

分析中的一个重要步骤是求出以未知位移 D_1 和 D_2 所表示的结构应变能，如同对于前面两个例题中的桁架所说过的那样。为了对平面框架完成这个步骤，用相应于这些位移的附加约束（见图 11-34 b）来假想未知节点位移作用于该结构上。然后框架的每一根杆都处于端点转动的固定端梁之情况下。这样，如果我们能得出这种梁所储存的应变能

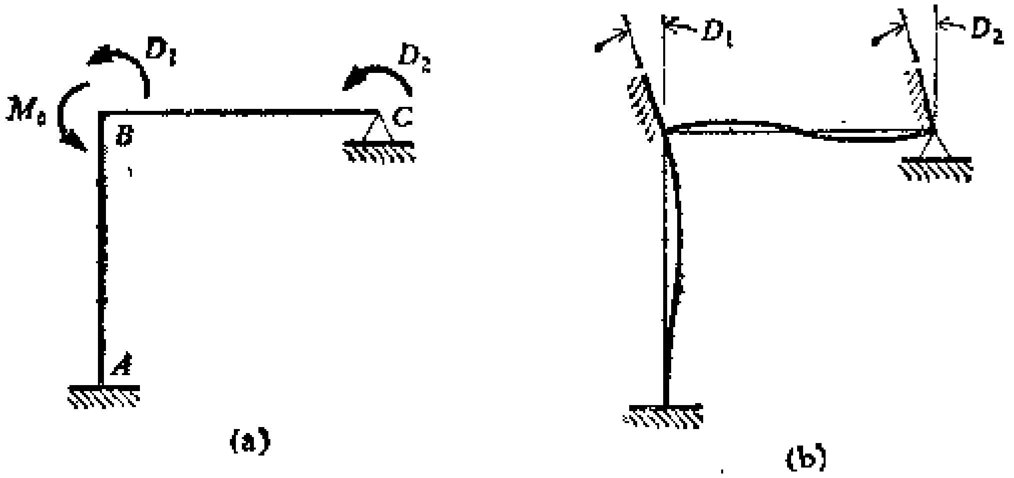


图 11-34　例题 3．平面框架

公式(见图 11-35)，那么，我们可以应用该公式得出平面框架的应变能．对图 11-35 所示固定端梁的例子，我们可以采用前面图 11-24 a 所得杆件的刚度公式，从而立即写出以端点旋转 θ_1 和 θ_2 角所表示的梁端处力矩 M_1 和 M_2 的表达式：

$$M_1=\frac{4EI}{L}\theta_1+\frac{2EI}{L}\theta_2 \qquad M_2=\frac{2EI}{L}\theta_1+\frac{4EI}{L}\theta_2 \qquad (11\text{-}59\ \text{a, b})$$

此梁中所储存的应变能(见方程 11-40)为：

$$U=\frac{1}{2}M_1\theta_1+\frac{1}{2}M_2\theta_2$$

或者代入上面 M_1 和 M_2 的表达式，则得

$$U=\frac{2EI}{L}(\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2) \qquad (11\text{-}60)$$

此方程得出由于端点处已知转动时梁的应变能(图 11-35)，但该梁应属线性者。

现在我们要回到图 11-34 所示平面框架，确定以位移 D_1 和 D_2 所

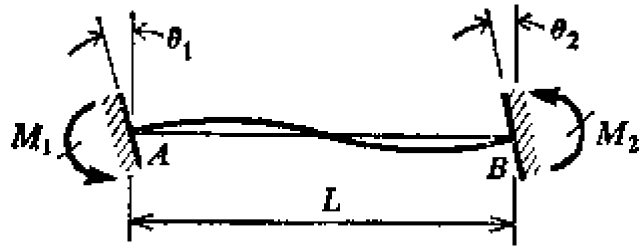


图 11-35　端点处存在转角 θ_1 和 θ_2 时梁中应变能

表示的应变能。其程序是：将方程(11-60)用于每一根杆，然后将其结果累加起来。对于 AB 杆，我们知 $\theta_1=0$ 和 $\theta_2=D_1$，对于 BC 杆，我们知 $\theta_1=D_1$ 和 $\theta_2=D_2$。因此，应变能为：

$$U=\frac{2EI}{L}(D_1^2)+\frac{2EI}{L}(D_1^2+D_1D_2+D_2^2)=\frac{2EI}{L}(2D_1^2+D_1D_2+D_2^2)$$

根据卡斯提里阿诺第一定理，我们得出下列两个方程：

$$M_0=\frac{\partial U}{\partial D_1}=\frac{2EI}{L}(4D_1+D_2)$$

$$0=\frac{\partial U}{\partial D_2}=\frac{2EI}{L}(D_1+2D_2)$$

刚度法的这些平衡方程，可以用来求解节点位移 D_1 和 D_2：

$$D_1=\frac{M_0L}{7EI}\qquad D_2=-\frac{M_0L}{14EI}$$

这样，框架的节点转动求了出来。在求解的最后步骤中，应用方程(11-59)确定每一根杆的端点力矩。

本例非常适合应用应变能和卡斯提里阿诺第一定理，因为荷载 M_0 相应于未知节点位移之一。结构上唯一的其它可能的荷载为相应于 D_2 的力偶，因为这种分析方法所必需条件之一是每一个荷载必须相应于一个未知节点位移。这一事实提出了当其它位置处有荷载时，譬如在杆中央处作用有集中荷载，如何去分析结构的问题。一种可能是考虑每一个加载点作为结构的一个节点，从而引进相应于该荷载的附加未知节点位移。这种方法的缺点是大大地增加了需要求解的平衡方程的个数。在大多数结构分析中优先采用的方法是：作用于诸节点之间的任一荷载以作用于这诸节点上的静力等效荷载系来代替。自然，等效荷载系的应用在叠加原理能够成立时才有可能。确定等效荷载的方法是不困难的，但是我们不打算在这里进行解释，若要较详细一些，可以参阅结构分析方面的书籍[1]。

11.10 势能法

势能法的概念在结构力学中是非常重要的。下面讨论

1) 例如见参考文献 11-14 第 136 页和第 204 页。

里，我们将叙述势能法如何用于结构分析，以及它与应变能和位移法有什么关系．此外，我们在下节里将说明势能法经常用于结构不可能精确分析时的近似分析．

就某一实际形态来说，任一机械体系或结构体系的势能定义为该体系从实际形态运动到某一参考形态时所有作用力所做的功．为此，我们总采取卸载的结构形状作为参考形态，因而，势能为结构从其受载形态运动到卸载下的位置时所有作用力所做的功．

结构的作用力包括外荷载和内力，后者为梁、桁架或框架中的应力合力．内力的势能清楚地为受载结构中所储存的应变能 U，因为如果结构从它的实际形状变位到它的卸载形状时，所恢复的功等于其应变能．另一方面，外力的势能是负的，因为如果它从其最终位置往回移至其初始位置，结构上每一荷载做负功．因而，荷载的势能为：

$$-\sum_{i=1}^{n}P_i\delta_i$$

式中 P_i 代表结构上的荷载，δ_i 为其相应位移，n 为荷载的个数．应该特别注意：荷载 P_i 的势能与结构加载过程中所做的功不相同．加载过程中力 P_i 的值自零逐渐增大到最终值，此荷载所做的功用方程(11-31)求得．相反，势能为力的最终值从其最终位置往回移至参考状态时所做的功．

上面的讨论说明结构体系的总势能藉组合该结构的应变能和荷载的势能来求得，因此

$$PE=U-\sum_{i=1}^{n}P_i\delta_i \qquad (11\text{-}61)^{1)}$$

此总势能表达式适用于任一弹性结构，不论它是线性的还是

1) (11-61)式中 PE 系英文 potential energy(势能)的缩写．——译者注

非线性的.

为了应用势能法分析结构，我们必须从辨别未知节点位移 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 未着手．然后必须将应变能表达成这些位移的函数，如第 11.9 节对于应变能法早已叙述的那样．此外，假设结构上相应于未知节点位移的全部荷载以 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 来表示.在这些条件下，上述总势能的表达式成为

$$PE=U-\sum_{i=1}^{n}P_iD_i \qquad (11\text{-}62)$$

现在假定我们取势能对未知位移中的任一位移 D_i 的偏导数，那么我们得出下列方程：

$$\frac{\partial PE}{\partial D_i}=\frac{\partial U}{\partial D_i}-P_i \qquad (a)$$

根据卡斯提里阿诺第一定理，我们知道 $P_i=\dfrac{\partial U}{\partial D_i}$，所以我们得出结论：

$$\frac{\partial PE}{\partial D_i}=0$$

此方程适用于未知节点位移 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 中的任一位移．因而，我们得到 n 个联立方程：

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1}=0 \qquad \frac{\partial PE}{\partial D_2}=0 \quad \cdots \quad \frac{\partial PE}{\partial D_n}=0 \qquad (11\text{-}63)$$

将这些方程与方程(a)和方程(11-52)进行比较，我们可以看出这些方程为位移法的平衡方程．因此，势能的应用导出与应变能法所得相同方程．然而，从概念来看，方程(11-63)具有特殊的意义，因为它们表明：当结构的势能为一逗留值时，结构的平衡条件是满足的，其势能可能为一最小值、最大值或中性值．因此，方程(11-63)可以认为是势能逗留值原理的数学表示法．此原理叙述为：如果弹性结构（线性的或非线性

的)的势能表达为未知节点位移的函数,那么当位移值能使总势能为一逗留值时,结构则处于平衡状态. 通常,结构处于稳定平衡,因而其总势能为一最小值. 在这些条件下,方程(11-63)表示最小势能原理. 对于不稳定结构,其势能可以为最大值或中性值. 如果结构属于线性者,方程(11-63)得出刚度法的平衡方程, 它可视为位移法的特殊情况[1].

为了说明非线性、动不定结构分析中的势能法,让我们引用第11.9节例题1所述和图11-32所绘的桁架. 该结构的应变能 U 用未知节点位移 D_1 和 D_2 来表达,按方程(11-56)求得。荷载 P 对于结构卸载形态的势能为 $-PD_2$,所以,其总势能为

$$PE=\frac{AB}{3\sqrt{L}}[2D_1^{3/2}+(D_2-D_1)^{3/2}]-PD_2$$

现在采用势能逗留值原理(方程 11-63),我们得出:

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1}=\frac{AB}{2\sqrt{L}}[2D_1^{1/2}-(D_2-D_1)^{1/2}]=0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial D_2}=\frac{AB}{2\sqrt{L}}(D_2-D_1)^{1/2}-P=0$$

根据这些方程, 我们立即得到第11.9节例题1中的方程(e)和(f),因此,余下分析部分按该例题1中已述那样去进行. 这样, 可以看出势能逗留值原理直接导出平衡方程,应用位移法使结构得到分析.

我们用势能逗留值法可以求解的另一个例子是上节中例题2. 该例子为四根杆的桁架,绘于图11-33中. 该桁架是线性的, 它的应变能按(11-58)式求得。因为荷载的势能为 $-P_1D_1-P_2D_2$,我们看出其总势能为

$$PE=\frac{EA}{2L}(2D_1^2+\sqrt{3}D_1D_2+2D_2^2)-P_1D_1-P_2D_2$$

---

1) 势能逗留值原理是应用力学中的基本原理,除用于结构分析外, 还有许多用途. 有时称它为克希霍夫(Kirchhoff)原理,因为它为 G. R. Kirchhoff 首先应用(参考文献 11-31 和 6-38).

现在，用势能逗留值原理得出：

$$\frac{\partial PE}{\partial D_1}=\frac{EA}{2L}(4D_1+\sqrt{3}D_2)-P_1=0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial D_2}=\frac{EA}{2L}(\sqrt{3}D_1+4D_2)-P_2=0$$

这些方程是为刚度法的平衡方程，它们与前面第11.9节例题2中所得的方程(h)和(i)相同。因此，桁架的分析可按早已叙述的那样去完成.

这两个实例说明势能法如何用于线性结构和非线性结构的分析.其应变能必须以未知节点位移来表达，然后与荷载的势能相组合得出总势能。应用势能逗留值原理就导出与未知节点位移一样多的联立方程。这些方程为位移法的平衡方程(如果结构是线性的，则为刚度法的平衡方程)，它们可解出未知位移.

本节中已将它方便地用于例题中的桁架结构上，原因是沿桁架中诸杆整个长度上的应力和应变均为常数，因此，使计算大大地简化，而且没有搞乱所讨论的基本原理。然而，必须认识到势能法实际上可用于各种复杂的结构。这种结构的分析通常是非常麻烦的，因此不适于在本书里介绍[1].

11.11 瑞利-里兹法

势能法的重要应用之一是对于不能进行精确求解的结构或求解非常困难的结构可以进行近似分析。应用势能法时，需要将应变能 U 表达成结构节点位移的函数，如上节所述。这种应变能的表达式对于桁架和简单框架来说是相当容易求得的，因为其未知节点位移的数目很少。然而，假定我们遇到了自由度的数目很多甚至无穷多的结构。在这种情况下，我们能藉假设的变形形状近似地表示结构的真实形状。这种变

1）势能法和应变能法的应用在结构分析中是广泛的，读者将在文献中发现许多有用的资料。许多教科书讨论到了这些问题，但是参考文献11-32至11-34对于初次研究者特别有价值。应变能和势能原理的历史发展已由Oravas和McLean在参考文献1-13中和Oravas在参考文献6-24中全面地提供了资料。

形形状可用形状函数来表达，这种函数包括一个或多个不定的位移参数．在这种假设的变形形状的基础上，可以算出势能，亦即势能将表达为未知位移参数的函数．根据势能逗留值定理，我们知道其位移必须具有这样的大小，以使势能得一逗留值．因而，我们可以将势能对位移参数中的每一参数取偏导数，并令这些导数为零．这些程序导出包含作为未知量的位移参数的联立方程组．该方程组中的方程个数与未知参数一样多，因此我们可以求解方程得出参数．知道了位移参数，意味着假设的变形形状已经确立．除特殊情况外，这种形状将近似于真实形状．

基于近似形状，现在求出反力和应力合力的近似值便成为可能．通常这些量没有位移自身那样精确（相对地），因为它们是从位移函数藉微分求得的缘故．既然位移函数是不精确的，它们的导数也就更不精确了，因为它们代表诸近似量的差．另外，由于反力和应力合力仅是近似的，它们就不可能与结构上的实际荷载形成静力平衡．

根据上面所述，可以看出形状函数的适当选择对于保证最终结果的精确度是很重要的．所以，分析者根据他的判断所选择的函数应合理地接近实际变形形状．形状函数选得愈精确，计算的结果就愈好．自然，如果选择的形状函数为精确者，那么最后的结果也就是精确的．作为最低要求，形状函数的选择应使之满足结构的几何边界条件，亦即满足关于挠度和斜度的条件，这将在下面例题中来说明．另外，在所定义的近似形状中，我们应用的位移参数愈多，大多数情况下其近似变形形状也就愈精确．自然，我们用的参数愈多，我们需要求解的联立方程也就愈多，这也是事实．

上述方法称为瑞利-里兹法，因为它为瑞利勋爵（Lord Rayleigh）和瑞士物理学家瓦尔什尔·里兹（Walther Ritz）

所提出，瑞利于1877年将它述于《声学理论》一书(参考文献11-8)中，里兹于1908年把此法作为声学的数学基础(参考文献11-35)．瑞利-里兹法是一个极有力的方法，它不仅可用于结构分析，而且可用于振动理论、屈曲理论以及板和壳的分析，这里提到的也只是几个例子[1)]．它还是有限单元法的基础，在有限单元法中所假设的位移函数用来代表诸微小单元的位移，结构中这些微小的、但有限的单元的划分应根据分析的目的来确定[2)]．

因为它是基于势能逗留值原理之上，瑞利-里兹法可以用于线性结构和非线性结构．此外，当应用此法时，不需要辨别是静定结构还是静不定结构，这两类结构可以采用相同的程序进行分析．

例题 1　让我们以分析承受集中荷载 P 的简支梁(见图11-36)，作为瑞利-里兹法的第一个实例．该梁为线性弹性者，其弯曲刚度为 EI，选用这个特定例子以便用最简单的方式说明瑞利-里兹法的重要特点．

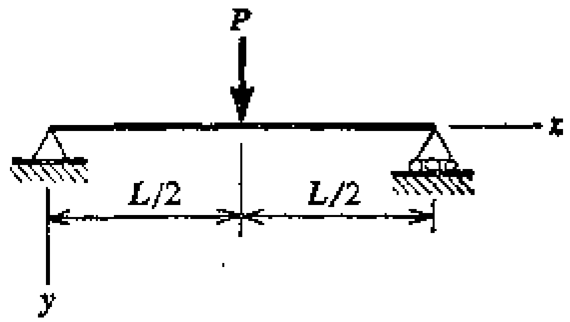


图 11-36　例题1和2　用瑞利-里兹法求简单梁的挠度

这里在选择近似地代表该梁挠度曲线方面有许多可能性．经验说明，三角函数和多项式函数通常是最方便者．所以让我们选择用正弦项形式作为形状函数：

$$v=\delta\sin\frac{\pi x}{L}\qquad(0\leqslant x\leqslant L)\tag{a}$$

式中 v 为梁的挠度，δ 为位移参数，在这里的情况下 δ 等于梁中点处的

1) 关于瑞利-里兹法的更多材料可见于参考文献11-33和11-34．

2) 见参考文献11-37．

挠度．方程(a)中的正弦项对于简单梁是特别适合的，因为它不仅满足几何边界条件(在 $x=0$ 和 $x=L$ 处 $v=0$)，而且满足曲率的边界条件(在 $x=0$ 和 $x=L$ 处 $v''=0$)。

在属于线性的梁中，其应变能可以根据下列表达式求得(见方程 6-34b)：

$$U=\frac{EI}{2}\int(v'')^2dx \tag{11-64}$$

如果挠度 v 的精确表达式为已知，可将它代入此方程得出精确的应变能．然而，在瑞利-里兹法情况下，我们必须代入假设的变形形状，得出应变能的近似值。所以，将方程(a)的 v 代入方程(11-64)，我们得

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^L\frac{\pi^4\delta^2}{L^4}\sin^2\frac{\pi x}{L}dx$$

该式积分后为

$$U=\frac{\pi^4EI\delta^2}{4L^3}$$

正如预料的那样，对于线性结构，其应变能为位移参数的二次函数。

荷载 P 的势能为 $-P\delta$，因此该承受荷载梁的总势能为

$$\begin{aligned}PE&=U-P\delta\\&=\frac{\pi^4EI\delta^2}{4L^3}-P\delta\end{aligned}$$

此表达式得出用位移参数 δ 表示的势能，位移参数在此分析阶段为未知量．然而，我们根据势能逗留值原理知道结构的位移必须具有使势能得出逗留值的值。在我们对梁假设变位形状(方程 a)时，我们仅用了一个位移参数，那么此参数必须具有一个使位能为逗留值的值，因而，应用势能逗留值原理得出

$$\frac{dPE}{d\delta}=\frac{\pi^4EI\delta}{2L^3}-P=0$$

根据它我们可以求解出位移参数：

$$\delta=\frac{2PL^3}{\pi^4EI}=0.02053\frac{PL^3}{EI} \tag{b}$$

此结果为梁中央处真实位移的近似值，与下面精确的表达式相比是极为良好的：

$$\delta=\frac{PL^3}{48EI}=0.02083\frac{PL^3}{EI} \tag{c}$$

近似结果与精确结果之差小于百分之二。

挠度的近似值小于精确解的理由如下。带有一个不定参数的形状函数之假设具有使无穷多个自由度的梁化为仅有一个自由度系统的效果。因此，实际梁要比假设变形形状的假想梁具有较大的柔性。或者，从不同观点，我们可以说为了使梁具有假设的变形形状，我们必须将梁加上外约束，使它成为那样一种形状。梁上的这种附加约束只能使它成为较为刚硬的梁。因此，根据两种观点，我们都得出结论：用假设形状的梁要比实际梁较为刚硬。所以，它的挠度一般要比真实梁小一些。

现在继续用图 11-36 所示简单梁的近似分析，然后得出梁中弯矩 M。在假设的变形形状之基础上，此弯矩为

$$M=-EIv''=-EI\left(-\frac{\pi^2\delta}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}\right)$$

代入方程(b)中的 δ，我们得到

$$M=\frac{2PL}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}$$

为了校核这个结果的精确度，让我们比较 $x=\frac{L}{4}$ 和 $x=\frac{L}{2}$ 处的近似弯矩和精确弯矩。对于 $x=\frac{L}{4}$ 处，近似的 M 为 0.143 PL，精确的 M 为 0.125 PL。对于 $x=\frac{L}{2}$ 处，近似的 M 为 0.203 PL，精确的 M 为 0.250 PL。因此，它们近似值的误差分别为百分之十四和百分之十九。这表明：与中央处挠度相比，其精确度有明显的降低，在中央处挠度误差小于百分之二。注意：其近似弯矩在一种情况下偏高，在另一种情况下却偏低。一般说来，我们不能得出应用瑞利-里兹法所得的应力合力是高于还是低于精确结果的结论。

例题 2　为了对上述例题中的简单梁进行较精确的分析，我们必须假设比较精确的形状函数，否则我们就必须采用多于一项的形状函数。本例将说明这后一种方法。让我们采用包含两个正弦项的形状函数来表达其挠度：

$$v=\delta_1\sin\frac{\pi x}{L}+\delta_3\sin\frac{3\pi x}{L}\qquad(0\leqslant x\leqslant L)\quad(\text{d})$$

式中 δ_1 和 δ_3 为未知位移参数。这里选用 $\delta_3\sin\frac{3\pi x}{L}$ 作为第二项，而不

是选用 $\delta_2\sin\frac{2\pi x}{L}$ 为第二项，因为后者对梁中点得出非对称挠度，由此，我们预先知道根据势能逗留值原理求得的 δ_2 为零，方程(d)中采用的两个正弦项之组合要比采用它们之中的任意一项更接近真实的挠度曲线。

位移参数 δ_1 和 δ_3 中的任何一个都不代表梁中点处的挠度，然而，这些参数代表其每一项的幅长。自然，梁中点处的挠度 δ 与 δ_1 和 δ_3 直接有关，这点以 $x=\frac{L}{2}$ 代入方程(d)可以看出。这样，我们得出：

$$\delta=\delta_1\sin\frac{\pi}{2}+\delta_3\sin\frac{3\pi}{2}=\delta_1-\delta_3 \tag{e}$$

势能逗留值原理使我们能够确定出 δ_1 和 δ_3 的值，然后根据方程(e)可以确定中点处的近似挠度 δ。另外，根据方程(d)也可近似地知道整个变形形状。

现在进行分析中的其余部分。让我们将假设的形状(方程 d)代入应变能方程(方程 11-64)如下：

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^L\left(\frac{\pi^2\delta_1}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{9\pi^2\delta_3}{L^2}\sin\frac{3\pi x}{L}\right)^2dx$$

或

$$U=\frac{\pi^4EI}{2L^4}\left[\delta_1^2\int_0^L\sin^2\frac{\pi x}{L}dx+18\,\delta_1\delta_3\int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{3\pi x}{L}dx\right.$$
$$\left.+81\delta_3^2\int_0^L\sin^2\frac{3\pi x}{L}dx\right] \tag{f}$$

不难证明下列定积分：

$$\int_0^L\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{L}{2} \tag{11-65a}$$

$$\int_0^L\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx=0 \tag{11-65b}$$

式中 m 和 n 均为整数。所以，应变能的方程(f)简化为

$$U=\frac{\pi^4EI}{4L^3}(\delta_1^2+81\,\delta_3^2)$$

我们再次看到应变能为位移参数的二次函数。

荷载 P 的势能为 $-P\delta$，其中 δ 为梁中点处的挠度。因为按方程(e)

所示 δ 等于 $\delta_1-\delta_3$，故总势能为

$$PE=\frac{\pi^4 EI}{4L^3}(\delta_1^2+81\delta_3^2)-P(\delta_1-\delta_3)$$

现在我们可以应用势能驻留值原理，得出两个方程

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_1}=\frac{\pi^4 EI\delta_1}{2L^3}-P=0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial \delta_3}=\frac{81\pi^4 EI\delta_3}{2L^3}+P=0$$

对这两方程求解位移参数，得到

$$\delta_1=\frac{2PL^3}{\pi^4 EI}\qquad \delta_3=-\frac{2PL^3}{81\pi^4 EI}$$

最后，将这些结果代入方程(d)，得出近似的挠度曲线：

$$v=\frac{2PL^3}{81\pi^4 EI}\left(81\sin\frac{\pi x}{L}-\sin\frac{3\pi x}{L}\right) \tag{g}$$

为了弄清上列挠度表达式的精确度，让我们来讨论梁中央处的挠度 δ。将 $x=\frac{L}{2}$ 代入方程(g)，我们得到

$$\delta=\frac{2PL^3}{81\pi^4 EI}(81+1)=\frac{164PL^3}{81\pi^4 EI}=0.02078\frac{PL^3}{EI}$$

这一结果比例题 1 中采用一项解(见方程 b)有所改进，它非常接近精确挠度(方程 c)。

梁中的近似弯矩为

$$M=-EIv''=\frac{2PL}{9\pi^2}\left(9\sin\frac{\pi x}{L}-\sin\frac{3\pi x}{L}\right)$$

按此方程，在 $x=\frac{L}{4}$ 处，得到的近似弯矩为 $0.127PL$，它与精确弯矩 $0.125PL$ 相比是非常接近的。在 $x=\frac{L}{2}$ 处，近似弯矩为 $0.225PL$，而精确的弯矩却为 $0.250PL$。这些近似结果比例题 1 中按一项解所求得值要精确得多。

在假设的挠度 v 的表达式中，藉应用附加正弦项可以得到更精确的结果。例如，我们将 $\delta_5\sin\frac{5\pi x}{L}$ 加到方程(d)所示表达式中，则成为三项的表达式。自然，每增加一个这样的附加项，就多引进一个位移参数，

因而也就必须多解一个联立方程．在理论上说，如果应用完整的无穷级数，则将得到精确的结果[1]．

例题 3　试确定图 11-37 所示固定端非棱柱形梁中央处挠度的近似值。注意：此梁的精确分析是冗长的，因为它为两次静不定梁，而且还具有两种不同的惯性矩．

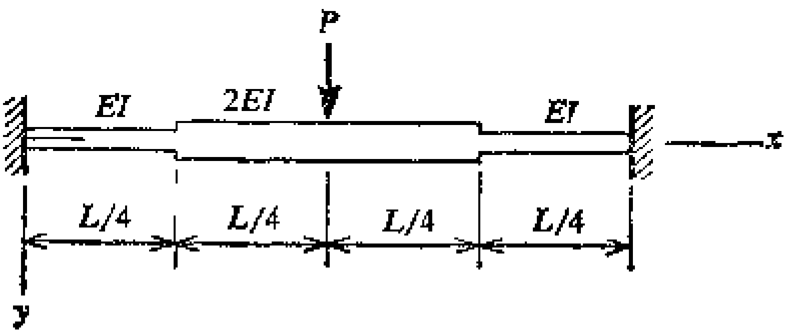


图 11-37　例题 3．用瑞利-里兹法求非棱柱形固端梁的挠度

在此例中，我们假设形状函数为一多项表达式，而不采用上面两个例题中所应用的三角函数。下列二次函数形式是最简单的多项表达式

$$v=A_1x^2+A_2x+A_3 \tag{h}$$

式中 A_1, A_2 和 A_3 为常数．然而，我们却不能采用这个表达式，因为方程 (h) 不可能满足梁的几何边界条件（两端处的挠度和斜度等于零）．如果我们尝试一下使方程(h)满足边界条件来确定 A_1, A_2 和 A_3 这些常数值，我们得到这样的一些结果：(1) 在 $x=0$ 处[2]，按 $v=0$ 的条件，得出 $A_3=0$；(2) 在 $x=0$ 处，按 $v'=0$ 的条件，得出 $A_2=0$；(3) 在 $x=L$ 处，按 $v=0$ 的条件，得出 $A_1=0$。因此，我们看出二次多项式虽然对简单梁是可以满足的，但不能满意地用作固定端梁的形状函数。

别的可能性是用下列具有一般形式的三次表达式：

$$v=A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4 \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}\right) \tag{i}$$

这里所示该方程的范围是需要的，因为三次表达式会得出对梁中央为非对称的挠度曲线，所以我们不能期望用方程(i)来表示对称的整个挠

1) 见参考文献11-33.

2) 原著中没有"在$x=0$处"一语，似乎应加上．——译者注

度曲线。然而，三次多项式却可满意地用来表示梁的左半部的挠度曲线，因为我们可以确定梁的左半部的应变能，然后将其结果加一倍。

为了确定方程(i)中所出现的常数 A_1, A_2, A_3 和 A_4，我们可以应用下列有关梁左半部的挠度和斜度的条件：(1) 在 $x=0$ 处，$v=0$；(2) 在 $x=0$ 处，$v'=0$；(3) 在 $x=\frac{L}{2}$ 处，$v'=0$；(4) 在 $x=\frac{L}{2}$ 处，$v=\delta$。式中 δ 为梁中央处的挠度。按上面这些条件中的前两个条件得出 $A_3=A_4=0$，按第三个条件得出 $A_2=-\frac{3A_1L}{4}$，按最后一个条件得出 $A_1=-\frac{16\delta}{L^3}$。将所有这些结果代入方程(i)，最后便得到所需要的形状函数：

$$v=\frac{4\delta x^2}{L^3}(3L-4x) \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}\right) \tag{j}$$

式中 δ 为未定位移参数。

现在参照前面的例题那样来进行。我们根据方程（11-64）求出应变能：

$$U=2\left(\frac{EI}{2}\right)\int_0^{L/4}(v'')^2\,dx+2\left(\frac{2EI}{2}\right)\int_{L/4}^{L/2}(v'')^2dx$$

将方程(i)代入这个式子，然后进行积分，我们求得：

$$U=\frac{144EI\delta^2}{L^3}$$

因而，其势能为

$$PE=U-P\delta=\frac{144EI\delta^2}{L^3}-P\delta$$

应用势能逗留值原理，我们得

$$\frac{dPE}{d\delta}=\frac{288EI\delta}{L^3}-P=0$$

根据它，得

$$\delta=\frac{PL^3}{288EI}=0.00347\frac{PL^3}{EI} \tag{k}$$

此结果仅比精确的结果低百分之三，其精确结果是

$$\delta=\frac{11PL^3}{3072EI}=0.00358\frac{PL^3}{EI} \tag{l}$$

此精确结果可藉第六章和第七章所述方法去确定，但是近似结果是比

较容易计算的，对于许多用途来说，这种近似结果是足够精确的。

例题 4　在本例题中，我们将说明瑞利-里兹法如何用于求解理想柱的临界屈曲荷载。让我们来讨论图 11-38 a 所示具有固定基础的棱形柱。该柱的屈曲形状示于图 11-38 a 的(b)内。它可藉三角函数或多项函数方便地表示出来。应用适当的三角函数可导出临界荷载的精确结果，因为我们知道它的真实的挠度曲线为三角函数曲线(见第 10.2 节方程 d 和方程 f)，习题 11.11-5 说明了这种精确的解。然而，本例题以多项式的形式作为近似的形状函数将较有启发性。

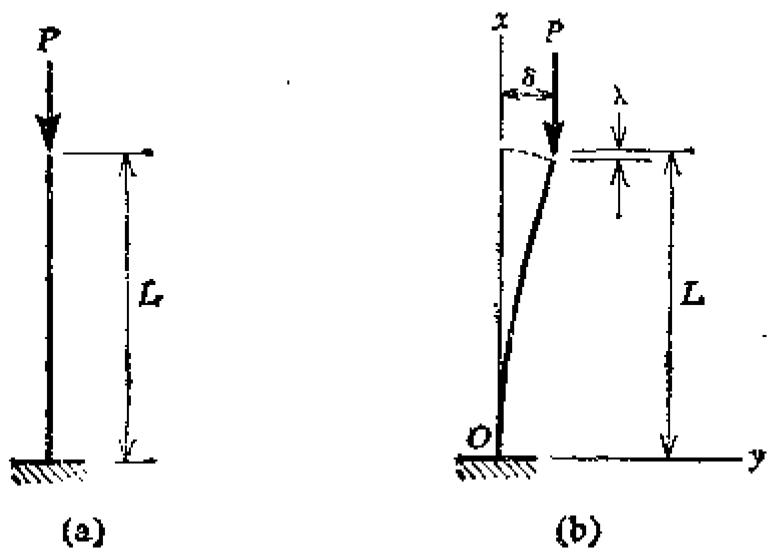


图 11-38　例题 4，用瑞利-里兹法求柱的临界屈曲荷载

最简单的多项表达式为方程 (b) 所示二次函数。如果我们要确定常数 A_1, A_2 和 A_3，只要满足几何边界条件（在 $x=0$ 处，$v=0$；在 $x=0$ 处，$v'=0$；在 $x=L$ 处 $v=\delta$)就可以了。这样得出二次的形状函数为

$$v=\frac{\delta x^2}{L^2} \tag{m}$$

式中 L 为柱的长度，δ 为自由端的挠度。虽然这种形状满足几何边界条件，但是它仍然是表示挠度曲线的不好方法，因为它得出柱的整个长度的曲率(亦即 v'')为一常数。实际上，在柱的自由端处曲率为零，而基础处曲率为最大。然而，我们可以继续应用方程(m)，按方程(11-64)计算应变能，

$$U=\frac{EI}{2}\int_0^L\left(\frac{2\delta}{L^2}\right)^2dx=\frac{2EI\delta^2}{L^3}$$

荷载 P 的势能等于 $-P\lambda$，其中 λ 为屈曲过程中弯曲所引起柱顶处向下的竖向位移，亦即 λ 为柱从图 11-38 a 所示未弯曲位置移至图 11-38 b 所示弯曲位置时所产生的竖直位移。该位移藉方程 (7-34) 得出。现在把它重复写出如下：

$$\lambda=\frac{1}{2}\int_0^L (v')^2dx \tag{11-66}$$

将 v' 代入此方程，并进行积分，得到

$$\lambda=\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{2\delta}{L^2}\right)^2dx=\frac{2}{3}\frac{\delta^2}{L}$$

因此，总势能为

$$PE=U-P\lambda=\frac{2EI\delta^2}{L^3}-\frac{2}{3}\frac{P\delta^2}{L}$$

现在按势能逗留值原理得出：

$$\frac{dPE}{d\delta}=\frac{4EI\delta}{L^3}-\frac{4}{3}\frac{P\delta}{L}=0$$

或

$$\delta\left(\frac{3EI}{L^2}-P\right)=0$$

如果 $\delta=0$，此方程显然是满足了，但是，这样一来柱保持是直的，而没有屈曲。对于该方程的非平凡解，括号内必须为零，由此得到

$$P=P_{cr}=\frac{3EI}{L^2}$$

临界荷载的这个近似值大约比精确值要高百分之二十二，其精确值为 $P_{cr}=\pi^2EI/4L^2$。近似屈曲荷载过高是可能出现的，因为我们早已说明过近似的弯曲形状代表较实际结构要刚硬的结构

采用三次多项式的形式作为假设的形状函数，我们便可以得到比较精确的结果：

$$v=\frac{\delta}{2L^3}(3Lx^2-x^3) \tag{n}$$

此形状函数不仅满足几何边界条件，而且还满足自由端曲率为零的条件。按前面那样，我们得到：

$$U=\frac{3}{2}\frac{EI\delta^2}{L^3}\qquad\qquad \lambda=\frac{3}{5}\frac{\delta^2}{L}$$

而临界荷载的最后结果为

$$P_{cr}=\frac{5\,EI}{2\,L^2}$$

此值仅比精确的临界荷载高百分之 1.3，它较采用二次的形状函数所得的结果有很大的改进。

藉应用包括两个位移参数去代替一个位移参数的形状函数，可以得到更精确的结果。例如，我们可以采用下面所示二次表达式与三次表达式之和作为形状函数：

$$v=\frac{\delta_1 x^3}{L^3}+\frac{\delta_2}{2\,L^3}(3\,Lx^2-x^3) \qquad \text{(o)}$$

式中 δ_1 和 δ_2 均为未定参数。每一个函数都满足几何边界条件（与方程 m 和方程 n 对照），藉应用势能逗留值原理所确定的 δ_1 值和 δ_2 值作适当的调整，我们可以得到比单独为二次方的函数和单独为三次方的函数要更为精确的组合函数。再次应用一般的程序，得到下列结果：

$$U=\frac{EI}{2L^3}(4\,\delta_1^2+6\,\delta_1\delta_2+3\,\delta_2^2) \qquad \lambda=\frac{1}{60\,L}(40\delta_1^2+75\delta_1\delta_2+36\,\delta_2^2)$$

$$\frac{\partial PE}{\partial\delta_1}=\frac{EI}{L^3}(4\,\delta_1+3\,\delta_2)-\frac{P}{12\,L}(16\,\delta_1+15\,\delta_2)=0$$

$$\frac{\partial PE}{\partial\delta_2}=\frac{3\,EI}{L^3}(\delta_1+\delta_2)-\frac{P}{20\,L}(25\,\delta_1+24\,\delta_2)=0$$

将上面两个方程重新排列一下，得

$$\left(\frac{4\,EI}{L^2}-\frac{4\,P}{3}\right)\delta_1+\left(\frac{3EI}{L^2}-\frac{5\,P}{5}\right)\delta_2=0$$

$$\left(\frac{3\,EI}{L^2}-\frac{5\,P}{4}\right)\delta_1+\left(\frac{3EI}{L^2}-\frac{6\,P}{5}\right)\delta_2=0$$

这两方程均为齐次方程，仅当位移参数 δ_1 和 δ_2 的系数行列式等于零时具有非平凡解。所以

$$\left(\frac{4\,EI}{L^2}-\frac{4\,P}{3}\right)\left(\frac{3\,EI}{L^2}-\frac{6\,P}{5}\right)-\left(\frac{3\,EI}{L^2}-\frac{5\,P}{4}\right)^2=0$$

或

$$3\,P^2-104\left(\frac{EI}{L^2}\right)P+240\left(\frac{EI}{L^2}\right)^2=0$$

这个二次方程的较小根得出最小临界荷载的近似值：

$$P_{cr}=2.486\frac{EI}{L^2}$$

它差不多等于精确的结果(比精确值高百分之 0.8)。

例题 5 本例为最后一个例题，想对非线性问题说明瑞利-里兹法。本例的结构为一自由端承受荷载 P 的矩形截面的悬臂梁(见图11-31和第 11.8 节中的例题 3)。梁的材料具有用方程$\sigma=B\sqrt{\epsilon}$ 所定义的非线性应力-应变曲线的性能，我们希望求出该梁的自由端之挠度 δ。

让我们取未弯曲状态下梁的左端为座标原点(图 11-31 a)，然后用下列三次多项表达式作为适当的表示方法来表示挠度曲线：

$$v=\frac{\delta}{2L^3}(x^3-3L^2x+2L^3) \quad \text{(p)}$$

式中 v 为梁的向下挠度。这个三次表达式满足几何端点条件 v 和 v'。另外，从它得出下列微小挠度的曲率表达式：

$$\kappa=v''=\frac{3\delta x}{L^3}$$

根据这个表达式，梁的自由端处的曲率为零，固定端处的曲率为最大，这与梁的真实情况是一致的。距中性轴 y 处梁上一点的应变 ϵ (见图11-31 b)近似地为

$$\epsilon_1=\kappa y=\frac{3\delta xy}{L^3}$$

应用这个式子，我们可以计算这同一点位置处梁中单位体积的应变能的近似值(见方程 11-32)：

$$u=\int_0^{\epsilon_1}\sigma d\epsilon=\int_0^{\epsilon_1}B\sqrt{\epsilon}\,d\epsilon=2\sqrt{3}\,B\left(\frac{\delta xy}{L^3}\right)^{3/2}$$

藉对梁的上半部$\left(y=0 \text{ 至 } y=\frac{h}{2}\right)$的整个体积进行体积积分，然后将此结果加一倍，便得到总应变能 U：

$$U=\int u\,dV=2\int_0^L\left[\int_0^{h/2}ub\,dy\right]dx=\frac{2\sqrt{6}\;Bbh^{5/2}\delta^{3/2}}{25\,L^2}$$

知道应变能之后，我们就可以按 $PE=U-P\delta$ 一式得出势能，随后按势

能逗留值原理得到：

$$\frac{dPE}{d\delta}=\frac{3\sqrt{6}\ Bbh^{5/2}\delta^{1/2}}{25\ L^2}-P=0$$

从它得：

$$\delta=\frac{625\ P^2L^4}{54\ B^2b^2h^5}$$

这个挠度近似值比精确值要小百分之 7(这种非线性弹性梁的精确挠度可应用下节所述的余能来求得，见方程 11-68)。

11.12 余能原理

在以上几节中我们讨论了有关应变能的几个重要原理。现在、本节将转向某些有关余能的同样重要的原理之讨论。在前面讨论中早已指出，应变能通常表达为位移的函数，而余能则通常表达为力的函数。因而应变能原理便很自然地与结构分析的位移法和刚度法有关，正如第 11.9 节早已说明过的那样，而余能原理则与力法和柔度法有关，如本节和下节所讨论。

为了导出关于余能的基本原理，让我们再来讨论承受 n 个荷载 P_1、P_2、···、P_n 并产生相应位移 δ_1, δ_2, ···, δ_n 的非线性结构。根据过去的讨论，我们知道 P 和 δ 以广义意义代表力和其相应的位移、结构的余能 U^* 可藉方程 (11-39 b) 算出。U^*的表达式将为荷载 P_1, P_2, ···, P_n 的函数。于是，如果我们设想某一个荷载，譬如 P_i，有一微小增量 dP_i，而其它荷载均不改变，那么余能将增大微量 dU^*，它为

$$dU^*=\frac{\partial U^*}{\partial P_i}dP_i$$

此方程仅从数学形式叙述为：U^* 的增量等于 U^* 对 P_i 的变化率乘以 P_i 的增量。

求 dU^*表达式的另一种途径是从当力 P_i 增大 dP_i 量时

荷载的余功来考虑．此余功与结构的余能增量 dU^* 相同(见方程 11-36)．荷载 P_i 本身是做余功的唯一荷载，因为别的力都没有变化．所以，余能的增量为位移 δ_i 与荷载增量 dP_i 之乘积：

$$dU^*=\delta_i dP_i$$

此余能增量用图11-28c中荷载-挠度图上水平窄条阴影面积来表示．令上述两个 dU^* 的表达式相等，得出

$$\delta_i=\frac{\partial U^*}{\partial P_i} \qquad (11\text{-}67)$$

此方程表明只要余能表示为荷载的函数，余能对任一荷载 P_i 的偏导数等于相应位移 δ_i．该方程称为**克罗第-恩格塞** (Crotti-Engesser) **定理**，因为它是意大利工程师法兰西斯柯·克罗第(Francesco Crotti)于 1878 年所推导出(参考文献 11-38 和 11-39)，另外德国工程师弗瑞德瑞·恩格塞(Friedrich Engesser)又于 1889 年单独得出了这个方程(参考文献 11-40)．

克罗第-恩格塞定理表现出与卡斯提里阿诺第一定理的相似性．这种相似性值得我们注意．当我们比较这两个定理的方程，可以明显地看出它们的相似性(见方程 11-67 和方程 11-51)．在应用克罗第-恩格塞定理中，我们先将余能表达为荷载的函数，然后对荷载取导数来求得相应的位移．但是在应用卡斯提里阿诺第一定理中，我们先将应变能表达为位移的函数，然后藉对位移取导数来求得相应的荷载．这两个定理都很普遍地用于非线性结构[1]．

例题 1 让我们求第 11.8 节例题 3 和图 11-31 所示自由端作用着集中荷载 P 的悬臂梁端点的挠度 δ．该梁的材料应力-应变图为非

1) 对于线性结构的特殊情况，余能等于应变能，因而克罗第-恩格塞定理便简化为卡斯提里阿诺第二定理(见第 11.14 节)．

线性者，如图 11-31 c 所示。

该梁的余能为：

$$U^*=\frac{25}{6}\frac{P^3L^4}{B^2b^2h^5}$$

如方程(11-50)所给。知道余能之后，我们应用克罗第-恩格塞定理便可以容易地求出相应于荷载 P 的挠度 δ：

$$\delta=\frac{\partial U^*}{\partial P}=\frac{25}{2}\frac{P^2L^4}{B^2b^2h^5} \tag{11-68}$$

例题 2　试求图 11-32 a 所示桁架节点 B 的竖直挠度。桁架材料在拉伸和压缩时的应力-应变关系按方程 $\sigma=B\sqrt{\epsilon}$ 求得，这里的 B 为常数(见图 11-32b)。

应用克罗第-恩格塞定理求挠度的第一个步骤是求出结构的余能。结构的总余能 U^* 为两根杆的余能之和，亦即：

$$U^*=U^*_{ab}+U^*_{bc} \tag{a}$$

另外，每一根杆的余能可藉杆的体积与单位体积的余能相乘来求得，因为每一根杆的应力和应变全都为常数。所以，我们得

$$U^*_{ab}=u^*_{ab}AL \qquad U^*_{bc}=u^*_{bc}AL\sqrt{2} \tag{b}$$

式中 A 为每根杆的横截面积。每一根杆的单位体积的余能可藉方程(11-37)求得如下：

$$u^*_{ab}=\int_0^{\sigma_{ab}}\epsilon d\sigma=\int_0^{\sigma_{ab}}\frac{\sigma^2}{B^2}d\sigma=\frac{\sigma^3_{ab}}{3B^2} \tag{c}$$

$$u^*_{bc}=\int_0^{\sigma_{bc}}\epsilon d\sigma=\int_0^{\sigma_{bc}}\frac{\sigma^2}{B^2}d\sigma=\frac{\sigma^3_{bc}}{3B^2} \tag{d}$$

式中 σ_{ab} 和 σ_{bc} 为杆中的应力。现在我们可以将方程(b)，(c)和(d)代入方程(a)，从而得出下列桁架余能公式：

$$U^*=\frac{AL}{3B^2}(\sigma^3_{ab}+\sqrt{2}\,\sigma^3_{bc}) \tag{e}$$

作用于桁架上的荷载 P(图 11-32 a)使杆中所产生的应力可以按静力学容易地求出：

$$\sigma_{ab}=\frac{P}{A} \qquad \sigma_{bc}=\frac{\sqrt{2}\,P}{A}$$

这里我们只考虑应力的绝对值．于是桁架的余能（根据方程 e）为

$$U^*=\frac{5}{3}\frac{P^3L}{A^2B^2}$$

此方程表达余能为荷载 P 的函数，因而现在可将克罗第-恩格塞定理用来求出相应于 P 的位移：

$$\delta_V=\frac{\partial U^*}{\partial P}=\frac{5P^2L}{A^2B^2}$$

这个方程得出了桁架节点 B 的竖直挠度 δ_V。

如果需求节点 B 的水平位移 δ_H，则要加上相应于这个位移的虚荷载 Q。然后我们可以重复前面早已叙述过用于求 δ_V 的程序，它们的主要差别在于现在桁架上有两个荷载，而不是一个荷载。水平位移 δ_H 的最终值将为一个包括 P 和 Q 的表达式。令该表达式中的 Q 为零，则得出荷载 P 单独作用时所产生的水平位移（见习题 11.12-4）。

单位荷载法　　克罗第-恩格塞定理直接用于求结构位移时，需要将结构的余能确定为荷载的函数，如上面例题所述的那样。然后需要求余能的导数，以得出所需求的位移。这样，其程序可能非常长，它不是求位移的实用方法。相反，有一个较为适用的方法可以利用，现在就将对它加以说明。

为了用最简单的方式导出这个方法，我们引用轴向力 N 为唯一的应力合力的桁架结构．让我们先讨论桁架的单根杆．假设杆的长度为 L，横截面积为 A，承受的轴向力为 N_1．这样，该杆的余能 U^* 为

$$U^*=\int_0^{N_1}\epsilon L dN \tag{f}$$

与以 $\delta=\epsilon L$ 代入方程(11-36) 所得一样，这里 ϵ 为轴向力 N 使杆产生的均匀应变．我们应注意：轴向力 N 自初始值为零增大到最大值为 N_1，应变 ϵ 自零增大到最大值 ϵ_1．类似地，杆的应力自零增大到最大值 σ_1．另外，假设其应力 σ 与应变 ϵ 的关系用图 11-28 b 所示非线性应力-应变图来表示。

我们可以以 F 定义为单位杆长的余能函数，因而，用长度 L 去除方程(f)，得

$$F=\int_0^N \epsilon dN \tag{g}$$

这个方程表示 F 为轴向力 N_1 的函数，它可借助应力-应变曲线来求算(注意：应力-应变曲线给出 ϵ 与 σ 的关系，但由于 $N=\sigma A$，所以我们也就知道 ϵ 与 N 的关系。这样，应变 ϵ 为 N 的已知函数，从而方程 g 的积分可以求算出来)。

现在，我们将讨论由许多杆组成的桁架结构，该结构承受使之产生相应位移 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 的荷载 $P_1, P_2, \cdots, P_n$。桁架中各杆的轴向力随着沿杆轴连续度量的距离 x 而变。所以，让我们取出两横截面之间的长度为 dx 的具有代表性的单元(见图 11-3 a)，作用轴向力 N_i，并设其伸长量为 $d\delta$(等于 $\epsilon_1 dx$)。参照方程(g)，我们看到该单元的余能可以用 $dU^*=Fdx$ 的形式来表达。因而，整个结构的余能为

$$U^*=\int Fdx \tag{h}$$

此式中的积分包括结构所有杆件。

为了得出相应于荷载 P_i 的位移 δ_i，我们可将克罗第-恩格塞原理用于方程(h)，从而得

$$\delta_i=\frac{\partial U^*}{\partial P_i}=\frac{\partial}{\partial P_i}\left[\int Fdx\right]$$

对积分括号内进行微分，得到

$$\delta_i=\int \frac{\partial F}{\partial P_i}dx$$

现在讨论此方程中所出现的导数 $\frac{\partial F}{\partial P_i}$。$F$ 这个量为轴向力 N_1 的函数，正如对方程(g)有关说明的那样。而轴向力 N_1 又为作用荷载 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的函数，所以，F 这个量通过中间

变量 N_1 成为 P_i 的函数. 从而,上述方程可写成下列形式:

$$\delta_i=\int\frac{\partial F}{\partial N_1}\frac{\partial N_1}{\partial P_i}dx \tag{i}$$

这个表达式中的每一个导数都有简单的物理意义. 导数 $\frac{\partial F}{\partial N_1}$ 等于 ϵ_1(见方程 g)[1]. 导数 $\frac{\partial N_1}{\partial P_i}$ 代表荷载 P_i 的单位值所引起轴向力 N_1 的值,因此,按单位荷载法的记法(第 11.3 节),此导数等于 N_U,它定义为由于相应于位移 δ_i 的单位荷载所产生的轴向力. 用 ϵ_1 和 N_U 分别代表方程 (i) 中的导数,得

$$\delta_i=\int\epsilon_1 N_U dx=\int N_U d\delta \tag{j}$$

式中 $d\delta$ 等于 $\epsilon_1 dx$,它为单元的伸长量(见图 11-3 a). 此方程为仅考虑轴向变形情况下单位荷载法的基本方程(方程 11-3).

如果结构承受弯曲变形(见图 11-3 b),譬如梁或平面框架,可以得出类似的推导. 让我们从假设有一长度为 L 的梁在力偶 M 作用下的纯弯来着手. 这些力偶使梁的两端产生相对转角 θ. 根据方程(11-36),分别以 M 和 θ 代替 P 和 δ,便得到梁的余能:

$$U^*=\int_0^{M_1}\theta dM \tag{k}$$

式中 M_1 为力偶 M 的最大值. 当所作用的力偶 M 从零增大到 M_1 时,梁两端的夹角 θ 从零增大到最大值 θ_1. 另外,梁的曲率 k 等于 θ/L,它从零变到最大值 $k_1=\frac{\theta_1}{L}$. 以 kL 代替方程(k)中的 θ 角,得出

---

1) 根据微积分学,我们知道 $\frac{\partial}{\partial a}\int_0^a f(x)dx=f(a)$. 将这种关系用于方程(g)时,我们知 $a=N_1$, $f(x)=\epsilon$, $dx=dN$, $f(a)=\epsilon_1$.

$$U^* = \int_0^{M_1} kLdM$$

现在让我们定义代表梁的单位长度余能的新函数 G:

$$G = \int_0^{M_1} kdM \tag{l}$$

该量为弯矩 M_1的函数，对任一特定梁可借助应力-应变图求算出来。

现在，让我们讨论承受荷载 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的梁或平面框架。这些荷载产生相应的位移 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$。该结构中代表性的单元(见图 11-3 b)承受弯矩 M_1，产生弯曲变形 $d\theta$(等于 k_1dx)。从方程(l)，我们得到该单元的余能为 $dU^* = Gdx$，因此，整个结构的余能为

$$U^* = \int Gdx$$

式中的积分包括结构的所有单元。然后，我们根据克罗第-恩格塞定理得到该结构的位移 δ_i:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left[\int Gdx\right] = \int \frac{\partial G}{\partial P_i}dx$$

看此式中的最后一个导数，我们注意到 G 这个量为弯矩 M_1 的函数（见方程 l），而 M_1 又为荷载的函数。所以，上列方程可以写成下面形式:

$$\delta_i = \int \frac{\partial G}{\partial M_1}\frac{\partial M_1}{\partial P_i}dx \tag{m}$$

式中导数$\frac{\partial G}{\partial M_1}$等于曲率 k_1(见方程 l 和上面的脚注)，导数$\frac{\partial M_1}{\partial P_i}$为荷载 P_i 的单位值使梁产生的弯矩。因而，方程(m)成为:

$$\delta_i = \int k_1 M_U dx = \int M_U d\theta \tag{n}$$

此式中我们应用了 $d\theta=\kappa_1 dx$ 关系式。M_U 这个量为相应于位移 δ_i 的单位荷载使结构产生的弯矩。因此，方程(n)与仅考虑弯曲变形时单位荷载法的基本方程（方程 11-3）相同。

我们可以作出结构考虑剪切变形效应和扭转变形效应的类似推导。因而，最后得出这样的结论：应用余能和克罗第-恩格塞定理可直接导出单位荷载法的基本方程。这个方程为确定位移提供了非常有效的方法，而且能用于非线性结构[1]。

例题 3　试用单位荷载法确定图 11-31 所示悬臂梁自由端处的挠度 δ。该梁材料的应力-应变曲线是非线性的，如图 11-31 c 所示。

因为只有弯曲变形对这种梁是重要的，我们使仅应用单位荷载方程(方程 11-3)的第二项。设弯矩 M_U 为相应于挠度 δ 的单位荷载所引起的弯矩，因而弯矩 M_U 等于 $1\cdot x$，这里的 x 为从梁自由端度量的距离。变形 $d\theta$ 等于 $k dx$，其中 k 为曲率。对于所讨论的梁，其曲率按第 11.8 节中的方程(f)来求得。由此，其变形 $d\theta$ 为

$$d\theta=\frac{50\ P^2x^2}{B^2b^2h^5}dx$$

将它代入单位荷载方程，我们得出下列挠度的式子：

$$\delta=\int_0^L 1(x)\left(\frac{50\ P^2x^2}{B^2b^2h^5}\right)dx=\frac{25\ P^2L^4}{2\ B^2b^2h^5}$$

此结果与例题 1 所得的挠度一致(见方程 11-68)。然而，单位荷载法提供了比前面例题较为容易的解，因为它不需要进行冗长的求算余能的过程(见方程 11-50 的推导)。

例题 4　在本例中，我们将用单位荷载法去确定图 11-32 中所示桁架节点 B 的竖直位移。桁架的材料是非线性者，其应力-应变曲线示于图 11-32 b 中。

按方程(11-3)，藉仅考虑该方程中的第一项可求出挠度。相应于

1) 关于线性结构的情况，讨论于第 11.14 节中。

此挠度 δ 的单位荷载为节点 B 处的竖直荷载. 桁架中两根杆的相应轴向力 N_U 为:

$$(N_U)_{ab}=1 \qquad (N_U)_{bc}=-\sqrt{2}$$

由于荷载 P 使这两杆所产生的应变为:

$$\epsilon_{ab}=\frac{\sigma_{ab}^2}{B^2} \qquad \epsilon_{bc}=-\frac{\sigma_{bc}^2}{B^2}$$

式中的应力 $\sigma_{ab}=\frac{P}{A}$, $\sigma_{bc}=-\frac{\sqrt{2}\,P}{A}$. 将这些应力代入应变的式子,得

$$\epsilon_{ab}=\frac{P^2}{A^2B^2} \qquad \epsilon_{bc}=-\frac{2\,P^2}{A^2B^2}$$

最后,我们可将 N_U 和 $d\delta$ (等于 ϵdx) 值代入单位荷载方程,得出挠度:

$$\delta=\int N_U d\delta=\int_0^L(1)\left(\frac{P^2}{A^2B^2}\right)dx+\int_0^{\sqrt{2}L}(-\sqrt{2})\left(-\frac{2\,P^2}{A^2B^2}\right)dx$$
$$=\frac{5\,P^2L}{A^2B^2}$$

此挠度与前面例题 2 所得的挠度相同. 然而我们可以再次看出应用单位荷载法求解的简易程度. 如果需要求的挠度不相应于结构上实际荷载之一(见习题 11.12-4),那么单位荷载法的优越性就更加显著.

11.13 力法

应用余能和克罗第-恩格塞定理可导出一种重要的分析结构的方法. 这种方法是建立在静不定的概念之上的,它利用静力赘余量作为分析中的未知量. 以力这个量(应力的合力和反力)作为未知量,与余能必须表达为力的函数以便应用克罗第-恩格塞定理的要求是相符的.

让我们来讨论 n 次静不定的非线性结构. 在选择赘余量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 之后,我们便可藉在结构中采取适当的放松形式来放松这些赘余量. 例如,假使赘余量为一反力,那么可以移去其支承;假使赘余量为一弯矩,则可放进一个销钉. 这

样所得的放松后的结构应为静定且不可动者，如前面柔度法所说明的那样(第 11.6 节)。然后，我们假想该放松结构不仅承受实际的荷载，而且还承受赘余量本身的作用。换句话说，必须将赘余力当作作用于放松结构上的荷载。这样，放松结构的余能 U^* 可以按通常的方式来求算。它唯一的新的特点是放松结构的余能为荷载和赘余量二者的函数。按照克罗第-恩格塞定理，我们可以将余能对这些赘余量求偏导数，从而得到放松结构上相应于诸赘余量的位移。让我们以符号 D_1, D_2, $\cdots$, D_n 分别代表原来结构上相应于赘余量 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 的位移[1)]。于是按克罗第-恩格塞定理(方程 11-67)得到 n 个联立方程如下：

$$D_1=\frac{\partial U^*}{\partial X_1} \quad D_2=\frac{\partial U^*}{\partial X_2} \quad \cdots \quad D_n=\frac{\partial U^*}{\partial X_n} \qquad (11\text{-}69)$$

这些方程中的每一方程都具有相同的一般形式。如果我们研究第 i 个方程，我们将发现其右边由包含静赘余力的项和荷载项组成，而赘余量作为未知量。这些项总计起来即为原来结构的实际位移 D_i，它应等于零，因为无论什么时候，相应的赘余量 X_i 是为应力合力或为支承反力，都不经历任何位移。这样，我们看到方程(11-69)实际上代表相应于赘余量的位移之协调条件。联解这些方程可以求出以荷载表示的赘余量，然后，剩下的反力和应力合力可藉静力学来确定。

上段所述的分析的余能法是利用赘余力作为未知量，而且需要求解协调方程，所以它是结构分析的**力法**。在用柔度法解线性结构时早已提及力法(见 11.6 节)。力法和柔度法基本上是同样的方法，但柔度法限制用于线性结构分析。所以，在任何情况下，若讨论的结构可能是非线结构时，我们就

1) 在讨论柔度法时早已用过这种同样的表示方法(见方程 11-25)。

应用“力法”一词；若讨论的结构只可能是线性结构时，方应用“柔度法”一词[1]。

用方程(11-69)所表示的力法与用方程(11-52)所表示的位移法相似. 在力法中，我们先将余能表达为静赘力的函数，然后，我们用克罗第-恩格塞定理得出可以求解赘余力的协调方程. 在位移法中，我们先将应变能表达为未知节点位移的函数，然后，用卡斯提里阿诺第一定理得出可以求解位移的平衡方程. 这两种方法均适用于非线性结构.

现在，让我们讨论原来结构上没有相应于静赘余力的位移这一力法的特定情况. 如同早已提到的那样，如果赘余力为应力合力或反力，但不产生移动，这种情形将是存在的. 在这种情况下，协调方程(方程 11-69)中的位移 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 变为零. 于是方程简化如下：

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_1}=0 \quad \frac{\partial U^*}{\partial X_2}=0 \quad \cdots \quad \frac{\partial U^*}{\partial X_n}=0 \qquad (11\text{-}70)$$

这些方程代表了余能逗留值的条件. 对于处在稳定平衡的结构，其逗留值实际上为最小值，因而方程 (11-70) 代表最小余能原理. 此原理指出：稳定结构的静赘余力 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 具有使余能为最小的值，只要原来结构中不存在相应于赘余力的位移[2].

例题 图 11-39 a 中所示桁架是由具有方程 $\sigma=B\sqrt{\epsilon}$ 表示应力-

1) 柔度法在第 11.15 节中将作进一步的讨论.

2) 最小余能原理首先由克罗第作了系统的阐述(参考文献11-38 与 11-39)，后来又由恩格塞加以叙述 (参考文献11-40). 如果结构是线性者，其余能便与应变能相等，这样，最小余能原理就简化成最小应变能原理(见第 11.15 节).

余能法为结构力学的重要发展提供了基础. 对于此法的深入研究有兴趣的读者应参考其它资料，例如参考文献 11-32，11-33，11-34，11-41 和 11-42. 应变能原理和余能原理的现代处理方法是写成矩阵形式，这在参考文献 11-43 和 11-44 中作了叙述. 其它情形的描述见参考文献 11-45 至 11-49. 关于余能法的历史，Orawas 和 McLean 作过探讨(参考文献 1-13)，Westergaard 在参考文献 11-41，11-50 和 11-51 作了一些历史注释.

应变关系的材料所构成，这里的 B 为一常数。试用余能法和力法去求全部三根杆的轴向力。

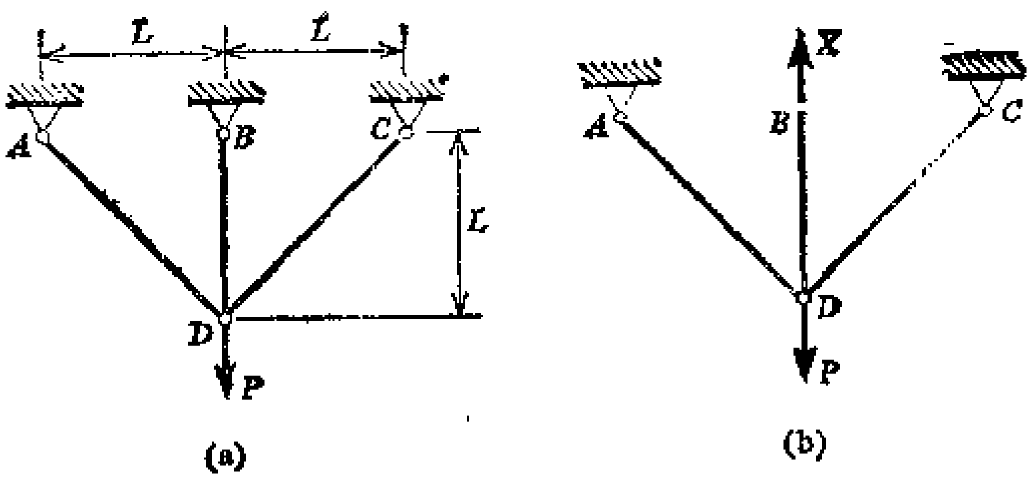


图 11-39 例题．力法

假设以节点 B 处的反力作为静赘余力 X，我们便得出图 11-39 b 所示的放松结构。根据静力学，放松结构中诸杆的轴向力为：

$$N_{ad}=N_{cd}=\frac{P-X}{\sqrt{2}} \quad N_{bd}=X \tag{a}$$

与它们相应的应力为

$$\sigma_{ad}=\sigma_{cd}=\frac{P-X}{\sqrt{2}A} \quad \sigma_{bd}=\frac{X}{A}$$

式中的 A 为每一根杆的横截面积。

BD 杆的单位体积之余能如下(见方程 11-37)：

$$u_{bd}^{*}=\int_0^{\sigma_{bd}}\varepsilon d\sigma=\int_0^{\sigma_{bd}}\frac{\sigma^2}{B^2}d\sigma=\frac{\sigma_{bd}^3}{3B^2}=\frac{1}{3B^2}\left(\frac{X}{A}\right)^3$$

按相似的方式可得出 AD 杆和 CD 杆的单位体积之余能如下：

$$u_{ad}^{*}=u_{cd}^{*}=\frac{1}{3B^2}\left(\frac{P-X}{\sqrt{2}A}\right)^3$$

最后，我们可以将杆的体积乘每根杆的单位体积之余能，并将这些结果加起来，得出放松结构的总余能：

$$U^{*}=\frac{L}{3A^2B^2}[(P-X)^3+X^3]$$

这个 U^* 表达式为荷载 P 和赘余力 X 二者的非线性函数。

原来结构中相应于赘余量 X 的位移为零，因为支承 B 没有位移。所以，对于赘余力 X，用克罗第-恩格塞定理可得出下列方程（见方程 11-70）：

$$\frac{dU^*}{dX}=\frac{L}{3A^2B^2}[3(P-X)^2(-1)+3X^2]=0$$

根据它，我们得到 $X=\frac{P}{2}$。将此 X 值代入方程(a)，得出

$$N_{ad}=N_{cd}=\frac{P}{2\sqrt{2}} \qquad N_{bd}=\frac{P}{2}$$

至此，这个静不定非线性桁架中诸杆的轴向力均已用力法求出来了。

11.14 卡斯提里阿诺第二定理

在上述两节中，我们讨论了怎样将余能用于求解位移和分析结构。在那两节中，我们强调它适用于非线性结构。现在，在本节中，让我们仅限于观察线性的而且适用叠加原理的结构。在这种情况下，结构的余能 U^* 和应变能 U 是相等的（见方程 11-40）。另外，这两个量均可表达为荷载的二次函数（见方程 11-44）。

现在假设线性结构承受的荷载为 $P_1, P_2, \cdots P_n$，还假设这些荷载产生的相应位移为 δ_1、$\delta_2\cdots\delta_n$，于是我们可以 U 代替 U^* 按克罗第-恩格塞定理（方程 11-67）得出

$$\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i} \qquad (11\text{-}71)$$

此方程称为卡斯提里阿诺第二定理[1)]，它可叙述为：对于线性结构，它的应变能对任一荷载 P_i 的偏导数等于与该荷载相应的位移 δ_i，只要它的应变能表达为荷载的函数。

为了介绍卡斯提里阿诺第二定理的应用，让我们讨论自

1) 见参考文献 11-25 至 11-29。

由端处承受荷载 P 和力偶 M 的悬臂梁(图 11-40)。这个梁是线性的，而且弯曲刚度 EI 为常数。梁的应变能可以根据方程（6-34 a)求得，这里将这个方程重复写一下：

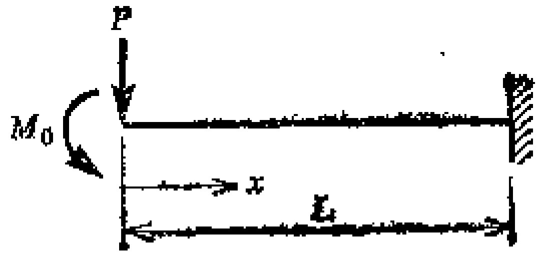


图 11-40　卡斯提格里阿诺第二定理的实例

$$U=\int\frac{M^2dx}{2EI} \tag{11-72}$$

在此方程中，M 代表任一横截面处的弯矩。对于图 11-40 所示的梁，距其自由端为 x 处的弯矩 $M=-Px-M_0$。将此表达式代入方程(11-72)，我们得

$$U=\frac{1}{2EI}\int_0^L(-Px-M_0)^2\,dx=\frac{P^2L^3}{6EI}+\frac{PM_0L^2}{2EI}+\frac{M_0^2L}{2EI} \tag{a}$$

这个方程表达应变能为荷载 P 和 M_0 的二次函数。

为了求得梁自由端处的竖直挠度 δ，我们可以应用卡斯提里阿诺第二定理，将 U 对 P 求偏导数，于是

$$\delta=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{PL^3}{3EI}+\frac{M_0L^2}{2EI}$$

用类似的方式，我们可以将 U 对 M_0 求偏导数来求得梁自由端处的转角 θ：

$$\theta=\frac{\partial U}{\partial M_0}=\frac{PL^2}{2EI}+\frac{M_0L}{EI}$$

这些式子中的正号表示 δ 和 θ 分别与荷载 P 和 M_0 的方向相同。如同所预料的那样，δ 和 θ 均为荷载的线性函数。

可以看出，卡斯提里阿诺第二定理仅可用于求相应于作用在结构上的荷载之位移，克罗第-恩格塞定理的情况也是如此。如果需要求某些没有荷载作用的位置处的位移，我们必

须在结构上放上相应于需求位移的虚荷载. 然后，应用卡斯提里阿诺第二定理求算位移，该位移由实际荷载和虚荷载共同表示. 我们令最后式子中的虚荷载为零，便得出由于实际荷载所产生的需求位移(见习题 11.14-1).

单位荷载法　如果结构有两个以上荷载作用时，直接采用卡斯提里阿诺第二定理求算位移的过程是非常烦冗的. 这个结论的理由是因为此时应变能的求算变得十分复杂. 例如，假设作用于图 11-40 所示悬臂梁上不是两个荷载而是四个荷载. 因此，仿照方程(a)来求算结构的应变能方程时，需要求一个四项的表达式的平方，U 的最后结果则包含十项.

如果在对弯矩表达式进行积分之前，先应用卡斯提里阿诺第二定理，则求算位移可得到大大的简化. 对于梁或平面框架，只有弯曲变形是重要的，其应变能 U 按方程 (11-72) 求得. 为了求出相应于荷载 P_i 的挠度 δ_i，我们必须将 U 对 P_i 求偏导数，因此，在积分符号内进行微分，得出：

$$\delta_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}=\frac{\partial}{\partial P_i}\int\frac{M^2dx}{2EI}=\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_i}dx \qquad \text{(b)}$$

偏导数$\frac{\partial M}{\partial P_i}$代表荷载 P_i 的单位值所引起的弯矩值 M. 因而，这个导数等于相应于所需要求算位移的单位荷载使结构产生的弯矩 M_U。方程(b)中积分符号内出现的力矩 M 为结构上实际荷载所产生的弯矩. 所以，该弯矩表示为 M_L. 采用这个符号，则方程(b)可写成：

$$\delta_i=\int\frac{M_UM_Ldx}{EI}$$

此方程表示仅考虑弯曲变形情况时的单位荷载法(见方程 11-4).

在考虑轴向变形、剪切变形和扭转变形时，可作类似的推导. 所以，我们得出结论：单位荷载法用于线性结构时(方程

11-4）可从卡斯提里阿诺第二定理直接导得。这样的结论是没有什么奇怪的，因为我们早已说到用于非线性结构的单位荷载法的较为普遍的方程(方程 11-3) 可根据克罗第-恩格塞定理导出。正如早已指出的那样，单位荷载法是对许多种结构确定位移时非常有效的方法。

11.15 应变能和柔度法

在第 11.13 节中，我们讨论过如何应用余能和克罗第-恩格塞定理导得结构分析的力法。当结构为线性时，则出现力法的特殊情况。在这种情况下，放松结构的应变能等于余能，它可表达为荷载和静赘余力 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的二次函数。然后，应用卡斯提里阿诺第二定理导出下列联立方程：

$$D_1=\frac{\partial U}{\partial X_1} \quad D_2=\frac{\partial U}{\partial X_2}\cdots D_n=\frac{\partial U}{\partial X_n} \qquad (11\text{-}73)$$

式中 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 代表原来结构上相应于赘余力的位移。这些方程中的每一个的一般形式是相同的。其右边所包括的诸项代表相应于赘余力的位移，位移中有一些是因赘余力本身所引起的，而其余的则是由于结构上的实际荷载所引起的。这些项加起来成为原来结构的真实位移，该真实位移为零。无论何时，相应的赘余力为应力合力或反力，就不会产生任何位移。由此，我们得出结论，方程(11-73)为柔度法的协调方程(见方程 11-25)。此外，方程(11-73)为线性结构的力法协调方程(方程 11-69)之特殊情况。

为了详细地说明方程 (11-73) 的一般形式，让我们进行具体的说明。假设有一结构为二次静不定者，承受两个荷载 P_1 和 P_2。因而其放松结构的应变能为两个赘余力 X_1 和 X_2 以及荷载 P_1 和 P_2 的二次函数，其普遍式如下(见方程 11-44)：

$$U=a_{11}X_1^2+a_{12}X_1X_2+a_{13}X_1P_1+a_{14}X_1P_2$$

$$+a_{21}X_2X_1+a_{22}X_2^2+a_{23}X_2P_1+a_{24}X_2P_2$$
$$+a_{31}P_1X_1+a_{32}P_1X_2+a_{33}P_1^2+a_{34}P_1P_2$$
$$+a_{41}P_2X_1+a_{42}P_2X_2+a_{43}P_2P_1+a_{44}P_2^2$$

式中系数 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{44}$ 为仅与结构性能有关的常数。用卡斯提里阿诺第二定理，从上列 U 的表达式得出协调方程如下（见方程 11-73）：

$$D_1=\frac{\partial U}{\partial X_1}=F_{11}X_1+F_{12}X_2+D_{1P}$$

$$D_2=\frac{\partial U}{\partial X_2}=F_{21}X_1+F_{22}X_2+D_{2P}$$

式中系数 F_{11}, F_{12}, F_{21} 和 F_{22} 为按诸 a 求得且仅与结构性能有关的新常数。由于这些常数为未知赘余力的系数，我们认识到它们为放松结构的柔度系数。而且，我们发现 D_{1P} 项和 D_{2P} 项只与荷载 P_1 和 P_2 以及结构的性能有关。因此，我们认识到这些项为放松结构上由荷载所引起相应于赘余力的位移。所以很清楚看出，应用应变能和卡斯提里阿诺第二定理得出与柔度法中协调方程（方程 11-25）一样的方程。自然，这个结论适用于具有任意多个赘余力的各种结构类型（桁架、梁或框梁）。

现在，我们假设上述方程中的一些偏导数如下：

$$\frac{\partial D_1}{\partial X_1}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2}=F_{11} \qquad \frac{\partial D_1}{\partial X_2}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_2\partial X_1}=F_{12}$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial X_1}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_1\partial X_2}=F_{21} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial X_2}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2}=F_{22}$$

根据这些关系，我们可以容易看出柔度的普遍式如下：

$$F_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_i\partial X_j} \tag{11-74}$$

这个式子说明：只要当应变能表达为赘余力 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的二次函数时，放松结构的柔度可藉微分该应变能而求得。另外，由于对 U 的微分次序没有关系，我们可写出下式：

$$F_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_j\partial X_i}=\frac{\partial^2 U}{\partial X_i\partial X_j}=F_{ji} \tag{11-75}$$

这样，从应变能的考虑建立了柔度互等定理。

只要赘余量是为应力合力或反力，便出现它们不会产生任何位移这一有趣的特殊情况．在这种情况下，原来结构上相应于赘余力的位移为零，因而柔度法的协调方程（方程11-73）成为

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0 \qquad \frac{\partial U}{\partial X_2}=0\cdots\frac{\partial U}{\partial X_n}=0 \qquad (11\text{-}76)$$

这些方程表示应变能为逗留值的条件．而结构为稳定平衡时，其逗留值实际上为最小值．所以我们得出最小应变能原理，这个原理可描述为：对于线性结构，其赘余力 X_1，X_2，…，X_n 具有使应变能为最小之值，只要在原来结构中相应于赘余力无位移．最小应变能原理为最小余能原理对于线性结构的更普遍形式（见方程11-70）．自然，按最小应变能原理所得的方程与前面用柔度法所得的相同[1]．

11.16 结构分析的其它方法

本章已经介绍了结构分析的几种基本方法，其中包括柔度法、刚度法以及建于应变能和余能之上的一些方法．自然，还有对工程师来说是重要的别的结构分析法．例如结构分析的矩阵法就是通常被应用者．矩阵法是柔度法和刚度法构成的，在这种方法中所有的方程均采用矩阵的形式来表示，所有推导和计算则均借助于矩阵代数．应用矩阵会使这些方法更有条理，使它们表现得更为紧凑，并理想地适用于计算机的程序设计．矩阵法在结构理论方面的教科书中有了介绍，例如参考文献11-14，11-17和11-19．

有一种广泛用于分析静不定的梁和平面框架的专门方

1）将方程(11-76)称作最小功原理不是罕见的．这个名称为 L.F.Ménabréa 所采用，他虽然没有作满意的证明，但是是他于1858年最早叙述这个定理．这个名称还为卡斯提里阿诺所采用，他于1879年对它作了证明（见参考文献11-25至11-29，以及参考文献11-52）．

法，是为力矩分配法（见参考文献 11-20）。这种方法具有不需求解大量联立方程便能分析多次静不定结构的可能。这种方法包含简单地去完成连续的近似计算。用于梁和框架的其它方法还有斜度-挠度法、共轭梁法以及弹性中心法。这些方法在教科书中已有介绍，例如参考文献 11-15，11-16 和 11-18。

本章虽然只讨论了棱柱形杆构成的结构，可是在柔度、刚度和固端力矩为已知时，是不难对付非棱柱形杆的结构的。关于处理非棱柱形杆结构的详细讨论可从参考文献 11-14，11-15 和 11-20 中找得。类似的解说可用于求解温度变化、支承沉降、剪切变形以及其它次要的效应。

*　　　*　　　*

本书除了介绍结构分析和能量法外，还期望能为读者提供进一步学习应用力学的适当的基础。本卷书的内容将在第二卷书《高等材料力学》中继续讨论，第二卷书涉及到许多附加课题。

习　题

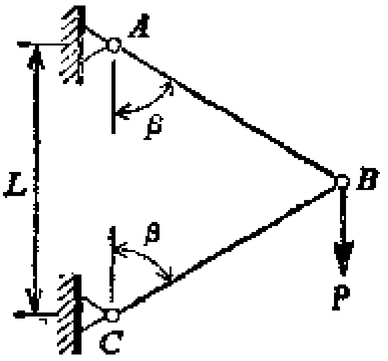
第 11.3 节的习题用单位荷载法求解

11.3-1　有一个由两根杆构成的桁架 ABC，承受竖直荷载 P 作用，见图所示。这两根杆的轴向刚度为 EI。假设 $\beta=60°$，试求节点 B 处的竖直挠度 δ_V，B 点的水平挠度 δ_H 以及 AB 杆的转角 θ_{ab}。

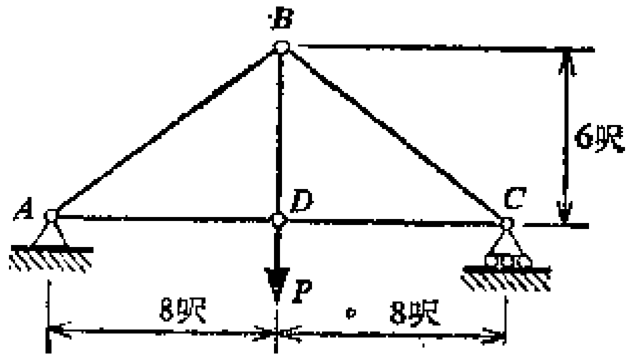
11.3-2　试求上题中 AB 杆的温度均匀增大 ΔT 的情况（以 α 作为热膨胀系数）。

11.3-3　试求图示桁架节点 D 的竖直位移 δ_V 和节点 C 的水平位移 δ_H，假设 $P=2100$ 磅，压杆的横截面积为 5 吋^2，拉杆的横截面积为 2 吋^2（假定 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2）。

11.3-4　援用上题所述桁架，假设荷载 P 为零。试问 AB 杆和 BC 杆增长多少（与它们的理论长度 10 呎相比）时使 D 点升高（或反挠）



习题 11.3-1 和 11.3-2

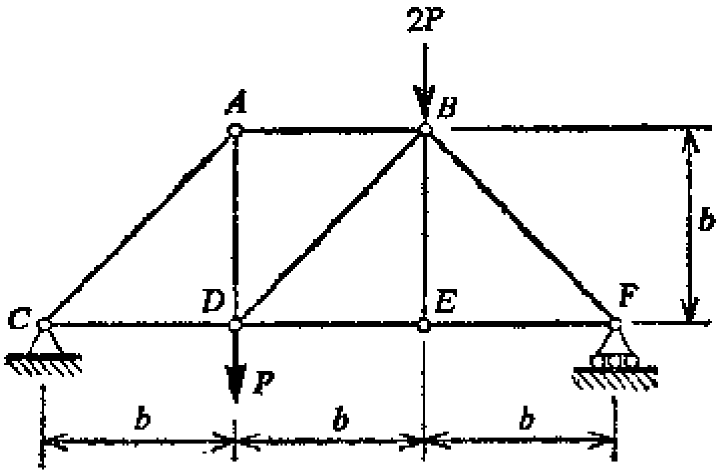


习题 11.3-3 和 11.3-4

0.5 吋?

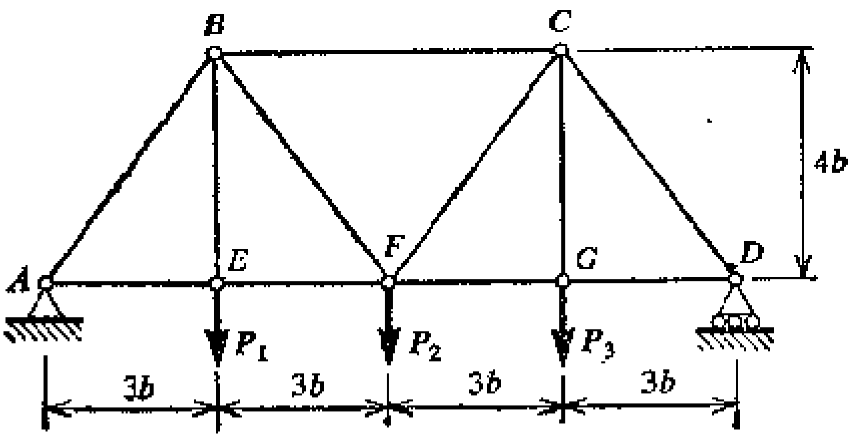
11.3-5 试求图示桁架节 A 处的竖直挠度 δ_V，假设所有杆的 EA 均相同。

11.3-6 试问当荷载作用于上题的桁架上时，节点 A 和节点 E 的间距增长多少?



习题 11.3-5 和 11.3-6

11.3-7 有一销接钢桁架 ($E=30\times10^6$ 磅/吋^2) 承受荷载 P_1, P_2 和 P_3，如图所示。诸杆的横截面积如下：BE, BF, CF 和 CG 杆为 2 吋^2，AE, EF, FG 和 GD 杆为 3 吋^2；BC 杆为 4 吋^2；AB 和 CD 杆为 6 吋^2。假设距离 b 等于 50 吋，$P_1=P_2=8$ 千磅，$P_3=4$ 千磅。试求桁架上的下列位移：(a) 节点 F 的竖直挠度 δ_V；(b) 节点 F 的水平位移 δ_H，以及 (c) BC 杆的转角 θ_{bc}。



习题 11.3-7 和 11.3-8

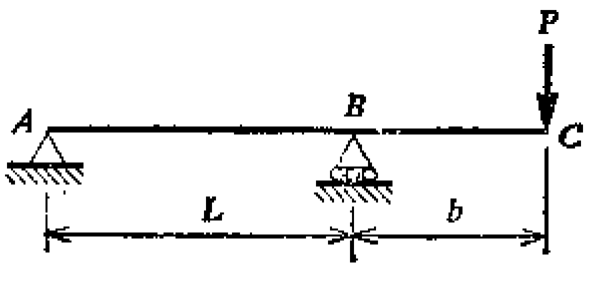
11.3-8　援用上题中的桁架，求算荷载 P_1，P_2 和 P_3 作用于桁架上所引起节点 B 和节点 G 之间距离的减小值（采用习题 11.3-7 所述数据）。

11.3-9　有一长度为 L，弯曲刚度为 EI 的悬臂梁，在梁的全长上承受强度为 q 的均匀荷载。试导出该梁自由端处的挠度 δ 和旋转角 θ 的式子。

11.3-10　有一简支梁，长度为 L，其中央处承受集中荷载 P 作用。试求作用荷载处的挠度 δ 和支承处的转角 θ。

11.3-11　有一悬臂梁承受两个集中荷载 P 作用，见习题 6.5-3 的图示。假设这两个荷载在梁上为相等间距$\left(a=b=c=\dfrac{L}{3}\right)$，试求梁自由端处的挠度 δ 和转角 θ。

11.3-12　有一带有挑臂的简支梁（见图），自由端处承受荷载 P 作用。试确定荷载作用点处的挠度 δ_c 和转角 θ_c。



习题 11.3-12 和 11.3-13

11.3-13　对上题的梁求 AB 跨中央处的向上挠度 δ 和支承 A 处的转角 θ。

11.3-14　参见例题 5 和图 11-7，求温度差使梁自由端 C 处产生的转角 θ。

11.3-15　用单位荷载法求解习题 6.3-6（在悬臂梁的一半长度上作用有均匀荷载）。

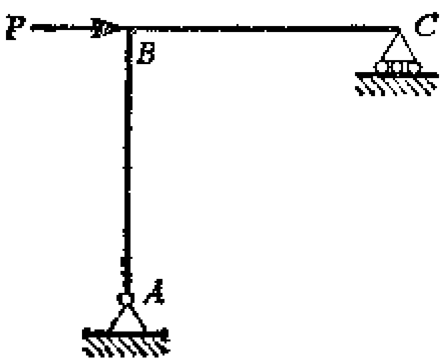
11.3-16　用单位荷载法求解习题 6.4-6（承受两个集中荷载的简单梁）。

11.3-17　试求三角形分布荷载作用下简单梁端点处的转角 θ_a 和 θ_b（见习题 6.2-9 的图）。

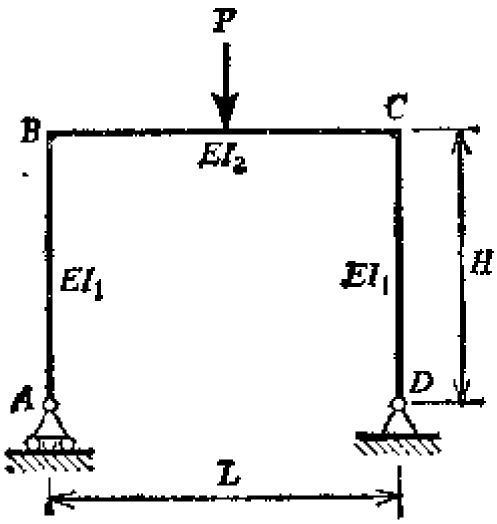
11.3-18　试求图示平面框架 C 点处的水平挠度 δ。假设 AB 杆和 BC 杆的长度均为 L，弯曲刚度均为 EI（注意，该框架 A 处为销支承，C 处为辊支承）。

11.3-19　有一平面框架 $ABCD$，A 处为辊支承，D 处为销支承（见图）。框架上的荷载为作用于 BC 杆中点处的力 P。竖直杆的弯曲刚度为 EI_1，水平杆的弯曲刚度为 EI_2。试确定 A 点的水平挠度 δ_H 和转角 θ。

11.3-20　试求解上一习题，但假设 A 点处作用有向左的水平力 Q，而不是荷载 P。

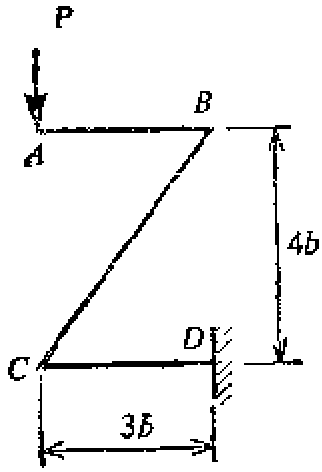


习题　11.3-18



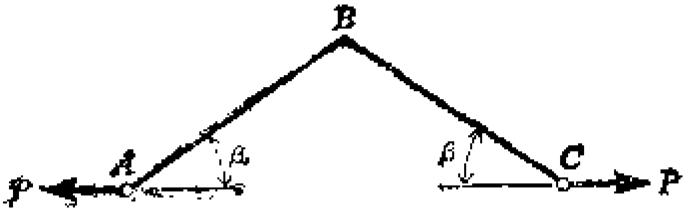
习题 11.3-19 和 11.3-20

11.3-21　图中所示平面框架 $ABCD$ 固定于 D 处，而 A 处是自由的。试求竖直荷载 P 作用下 A 点所产生的转角。假设所有杆的弯曲刚度 EI 均相同。



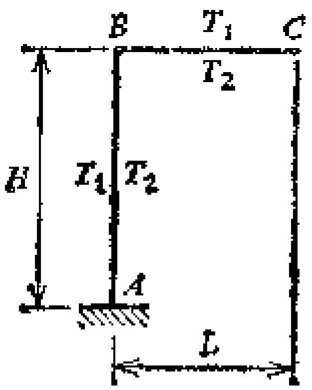
习题 11.3-21

11.3-22 试求平面框架 ABC 在两个力 P 作用下(见图)A 点和 C 点间距的增大值 Δ. AB 杆和 BC 杆的长度相等,均为 L;弯曲刚度均为 EI,轴向刚度均为 EA(考虑弯曲变形和轴向变形对杆的效应).



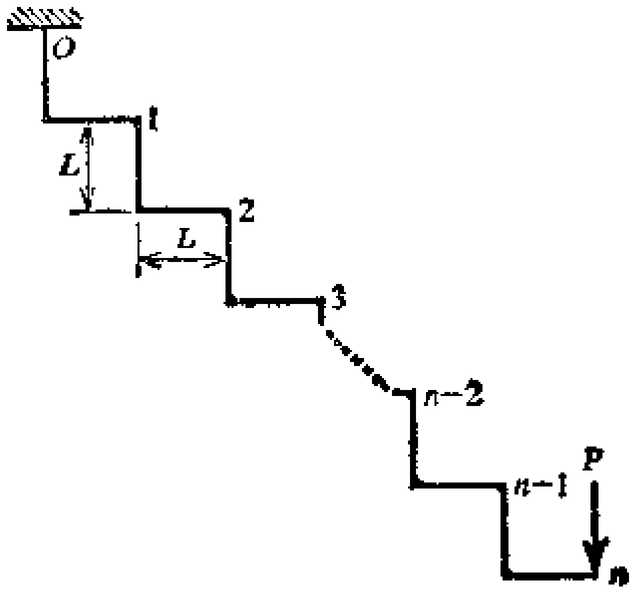
习题 11.3-22

11.3-23 图中所示平面框架 ABC 的杆之左侧和顶侧温度为 T_1,另一侧为 T_2. 试求 C 点的水平挠度 δ_H、竖直挠度 δ_V 和转角 θ. 假设框架的两根杆为相同的横截面(横截面的高度等于 h)和相同的材料(热膨胀系数为 α).



习题 11.3-23

11.3-24　有一楼梯踏步的平面框架，上端为固定支承，下端是自由的（见图），荷载 P 作用于自由端处。试导出自由端处竖直挠度 δ 的公式。假设有 n 个踏步（框架每一根杆的长度为 L，弯曲刚度为 EI）。

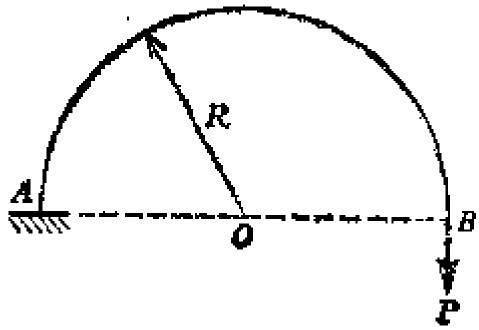


习题 11.3-24

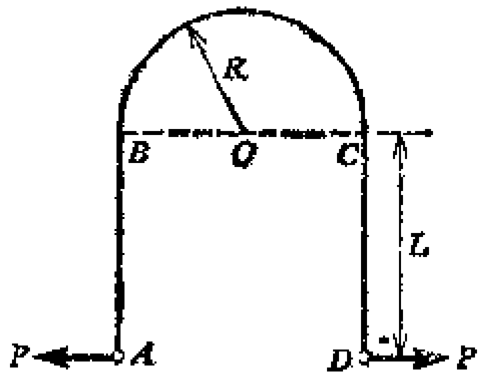
11.3-25　试求图 11-9a 所示曲杆 B 点处的竖直挠度 δ_V 和转角 θ。

11.3-26　试确定其中心线半径为 R 的半圆形薄壁曲杆 AB 之 B 端竖直挠度 δ_V（见图）。

11.3-27　试求由半径为 R 的半圆部分 BC 和两个长度为 L 的直线段 AB 及 CD 所组成的薄杆，在两个荷载 P 作用下，杆 A 点和 D 点的间距之增大值 Δ（见图）。



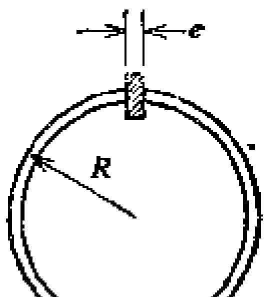
习题 11.3-26



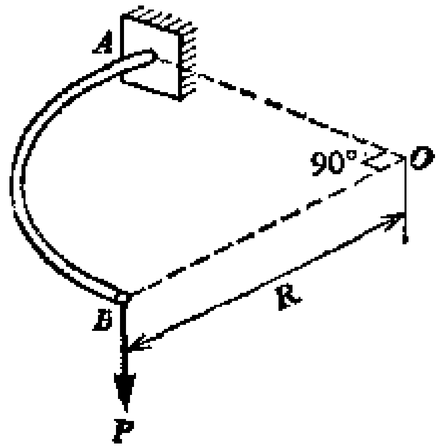
习题 11.3-27

11.3-28　有一细圆环，其平均半径为 R，于某一点处切开，缝中置放一小块体，使环张开（见图）。假设块体的宽度为 e，试求环中的最大弯矩。

11.3-29　有一细长曲杆 AB 置于水平面内，其中心线形成半径为 R 的四分之一圆，竖直荷载 P 作用于杆的端点处，如图所示。试求荷载处竖向挠度 δ_V 的公式（假设杆的弯曲刚度为 EI，扭转刚度为 GJ）。



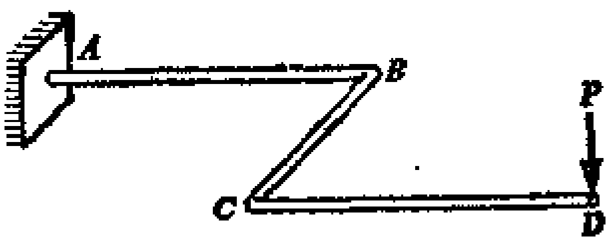
习题 11.3-28



习题 11.3-29 和 11.3-30

11.3-30　试问上一习题中曲杆 B 端的扭角 ϕ 为多少？

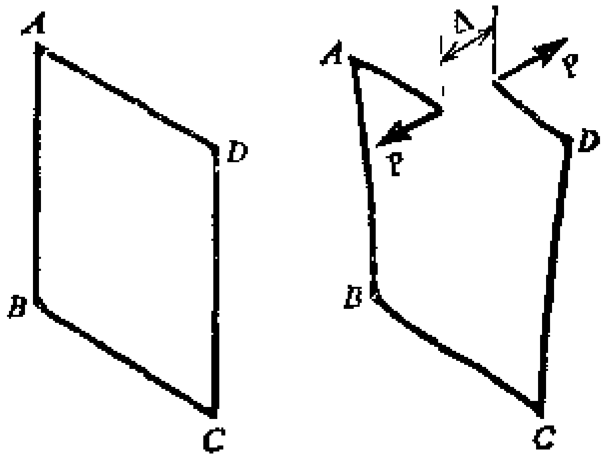
11.3-31　有一水平托架 $ABCD$（见图）固定于 A 端处，而 D 端是自由的。AB 杆和 CD 杆的长度为 60 吋，BC 杆的长度为 48 吋，它与 AB 杆和 CD 杆互成直角。该托架由直径为 4 吋、惯性矩 $I=7.23$ 吋^4、极惯性矩 $J=14.46$ 吋^4 的圆管构成。试求竖直荷载 $P=400$ 磅所引起托架自由端的竖直挠度 δ 和扭转角 ϕ（假设 $E=30\times10^6$ 磅/吋^2，$G=12\times10^6$ 磅/吋^2）。



习题 11.3-31

11.3-32　有一方形平面框架 $ABCD$，于 AD 边的中央处切开（见

图),有两个大小相等而方向相反的力 P,与框架平面垂直方向,作用于切开的端点处。试求框架切开端之间的距离 Δ。假设所有杆的弯曲刚度均为 EI,扭转刚度均为 GJ,方形的每边长度为 L。



习题 11.3-32

11.5-1 参照图 11-12 a 和 b 导出互等位移定理 ($\delta_{ab}=\delta_{ba}$),用单位荷载法求出这些位移。

11.5-2 对图 11-12 a 和 b 所示的简单梁,证明互等位移定理 ($\delta_{ab}=\delta_{ba}$)。假设杆的长度为 L,A 点位于梁中央处,B 点位于距右边支承 $L/4$ 处。

11.5-3 试证明互等位移定理适用于图 11-13 所示简单梁。假设梁的长度为 L,A 点位于距左边支承 $L/3$ 处,B 点位于距右边支承 $L/4$ 处。

11.5-4 试证明互等位移定理 ($\theta_{ab}=\theta_{ba}$) 适用于图 11-14 所示简单梁。假设梁的长度为 L,A 点位于中央处,B 点位于距右边支承 $L/3$ 处。

11.5-5 有一长度为 L 的悬臂梁,固定于左端,另一端是自由的。该梁承受两种加载。在第一种加载时,梁中点作用有向下的集中力 P_1,自由端处作用有反时针方向的力偶。在第二种加载时,中点处作用向下的力 P_2,自由端处作用向下的力 P_3。藉求算方程 (11-21) 两边的功,对这两种加载情况证明互等功定理。

11.5-6 有一长度为 L 的简单梁,承受两种加载。第一种加载

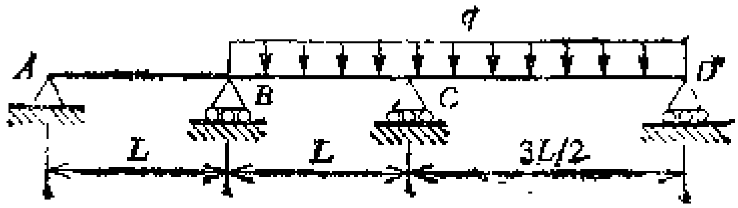
是距左边支承 $L/3$ 处作用向下的集中力 P_1。第二种加载是在梁上作用两个大小相等的反时针方向的力偶，一个位于梁的左端，另一个位于梁的中央处。籍求算方程(11-21)两边的功，对这两种加载情况证明互等功定理。

11.5-7 有一长为 L 的简单梁，承受两种加载作用。第一种加载是在整个梁上作用着强度为 q 的均匀荷载。第二种加载是在梁中央处作用集中力 P。籍求算方程(11-21)两侧的功，对这两种加载情况证明互等功定理(提示：在均匀荷载情况下，将荷载单元 qdx 如同集中荷载来对待，然后进行积分)。

第 11.6 节的习题用柔度法求解

11.6-1 试用图 11-16 c 所示的放松结构求出图 11-16 a 所示两跨梁的赘余力。假设 $P_1=P, M_1=0, P_2=P, P_3=P$。以赘余力 X_1 作为支承 A 处的反时针方向的反力矩，以 X_2 作为 B 处向上的反力。

11.6-2 试求图中所示连续梁支承 B 和支承 C 处的弯矩，这些弯距分别作为赘余力 X_1 和 X_2。假设这些赘余力使梁的顶面压缩时，它们为正值。该梁的弯曲刚度 EI 为常数。

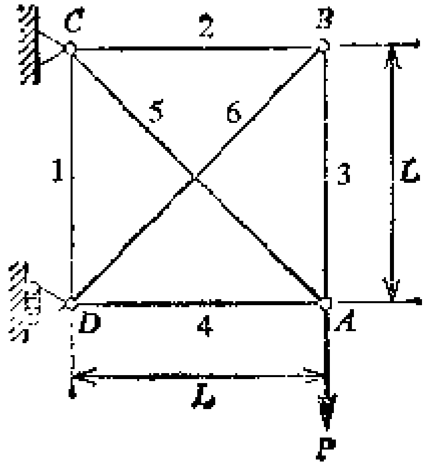


习题 11.6-2

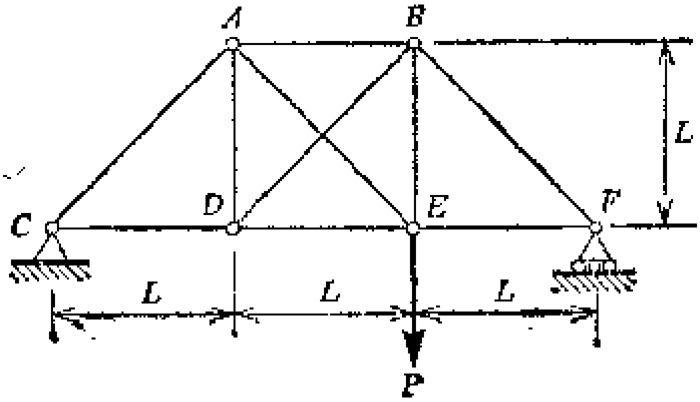
11.6-3 试求图 11-19 所示梁的赘余力 X_1 和 X_2。假设中央跨上没有荷载，而右边跨上的荷载 P 等于 qL。

11.6-4 图示桁架的节点 A 处承受荷载 P。所有杆的轴向刚度均为 EA。试求诸杆的轴向力 $N_1, N_2, \cdots N_6$。

11.6-5 试求平面桁架中 AB 杆的轴向力(见图)，如果 $P=30$ 千磅。假设 $L=20$ 呎，所有杆的 E 均相同，CA, AB 和 BF 杆的横截面积为 4.0 吋^2，其余杆的面积则均为 2.0 吋^2。



习题 11.6-4



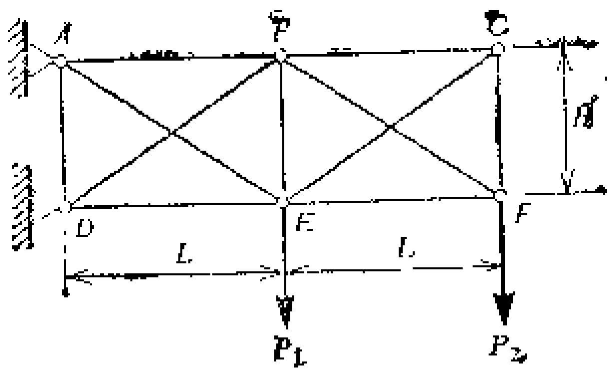
习题 11.6-5

11.6-6　对图 11-20 所示平面桁架，作再次求解，但此时分别取赘余力 X_1 和 X_2 作为 AB 杆和 BC 杆中的轴向力。水平杆和竖直杆的轴向刚度为 EA，对角杆为 $2EA$。

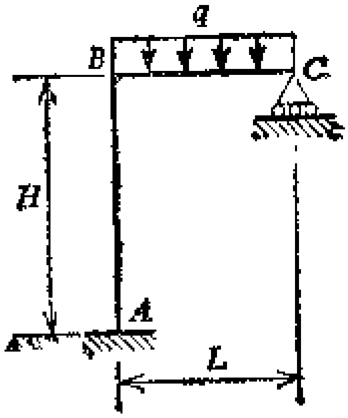
11.6-7　试求图中所示桁架中 AB 杆和 BC 杆的力。分别以这两杆的力作为赘余力 X_1 和 X_2。求解时应用下列数据：$L=40$ 吋、$H=30$ 吋、$P_1=250$ 磅、$P_2=150$ 磅、$E=12,000,000$ 磅/吋^2，所有杆 $A=1.5$ 吋^2。

11.6-8　有一平面框架 ABC，A 为固定支承，C 为辊支承，如图所示。AB 杆和 BC 杆具有相同的弯曲刚度 EI。仅考虑弯曲变形，试求 C 处的竖直反力。

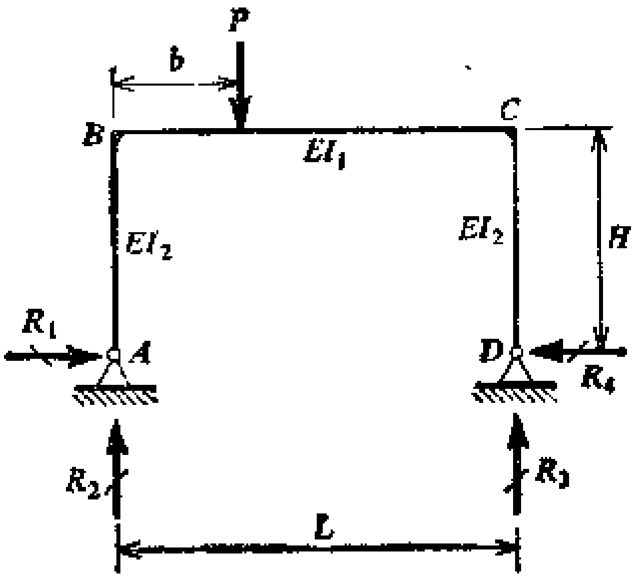
11.6-9　有一平面框架，A 处和 D 处均为销支承(见图)，水平



习题 11.6-7



习题 11.6-8



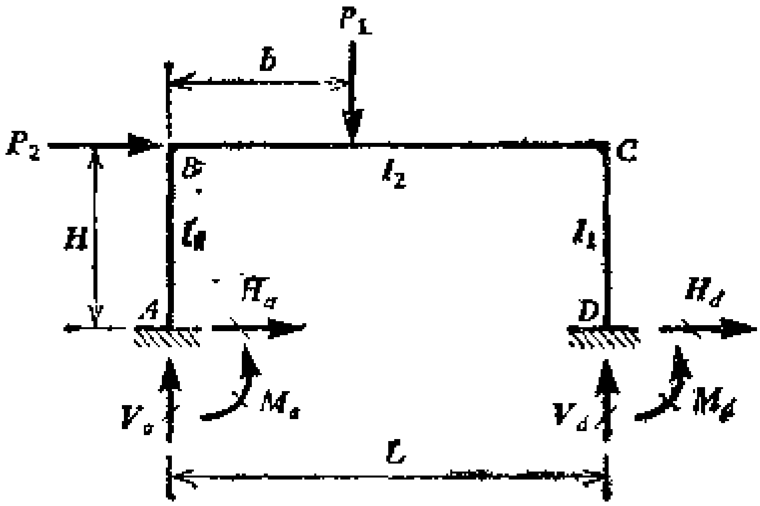
习题 11.6-9

杆的长度为 L，弯曲刚度为 EI_1；竖直杆的长度为 H，弯曲刚度为 EI_2。试求荷载 P 所引起框架的反力 R_1, R_2, R_3 和 R_4。仅考虑弯曲变形并取反力 R_4 为赘余力。

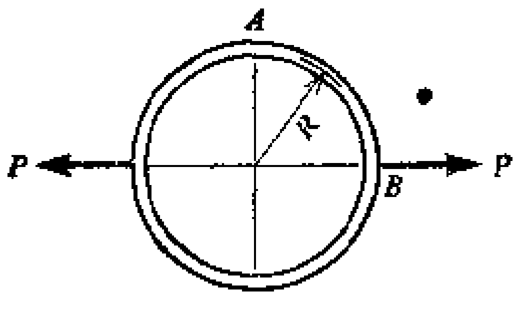
11.6-10 有一平面框架 $ABCD$，固定于 A 和 D 处，如图所示。试求支承处的反力，假设 $P_1=P, P_2=0, b=\frac{L}{2}, H=L$ 和 $I_1=I_2$。仅考虑弯曲变形效应。

11.6-11 求解上题，假设 $P_2=P, P_1=0, H=\frac{L}{2}, I_2=2I_1$。

11.6-12 有一个半径为 R 的薄圆环，承受着两个沿其直径作用的大小相等而方向相反的力 P，如图所示。试求 A 点和 B 点处环内的弯



习题 11.6-10，11.6-11和11.6-13



习题 11.6-12

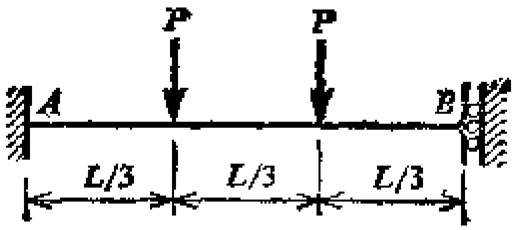
矩．仅考虑弯曲变形的效应．

11.6-13　试以D处反力作为赘余力求出图中所示平面框架支承D处的反力。仅考虑弯曲变形效应，并应用下列数据：$P_1=16$千磅、$P_2=0$、$b=20$呎、$L=60$呎、$H=20$呎、$E=30,000$千磅/吋^2、$I_1=650$吋^4、$I_2=1100$吋^4。

第 11.7 节的习题用刚度法进行求解

11.7-1　图中梁AB的A点处为固定支承，B点处为导向支承．试求支承B处的向下位移D和反力矩M_b(当反时针方向时为正)。

11.7-2　有一个两跨连续梁ABC，A处为固定支承，B处和C处为辊支承，如图11-26a所示。梁上的荷载如下：$P_1=P$，$M_1=PL$，$P_2=0$，$P_3=0$．另外，AB跨的长度为L，BC跨的长度为$1.5L$。试分别

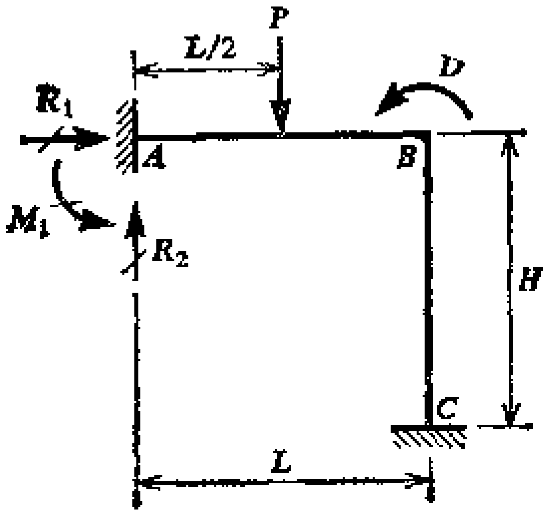


习题 11.7-1

求 B 点处和 C 点处的转角 D_1 和 D_2（反时针方向为正），还要求出支承 A 处的反力 R_a 和 M_a。

11.7-3　分析图 11-27 a 所示的梁 ABC，假设 $P_1=P$，$P_2=P/3$，$L_1=L$，$L_2=2L$。试求未知位移 D_1 和 D_2，并求端点处的反力矩 M_a 和 M_c。

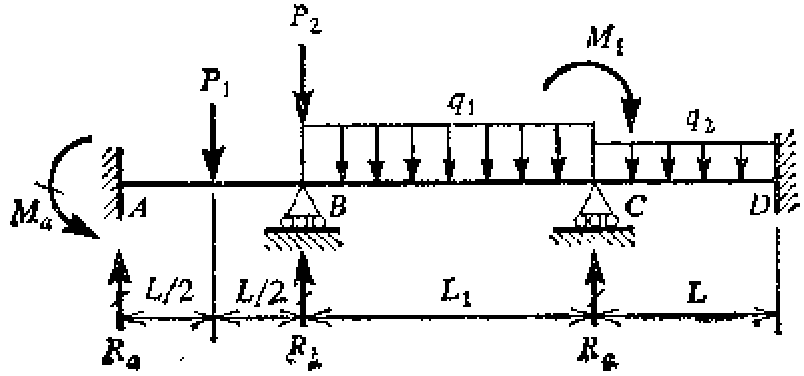
11.7-4　图中所示平面框架 ABC 于 A 处和 C 处均设有固定支承。AB 杆的长度为 L，BC 杆的长度为 H。两根杆的弯曲刚度 EI 相同。仅考虑弯曲变形的效应，试求 B 点处的转角 D（当反时针方向时为正）。另外，还确定支承 A 处的反力 R_1，R_2 和 M_1。



习题 11.7-4

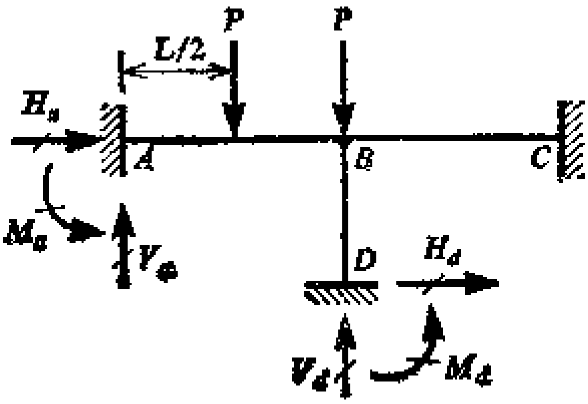
11.7-5　图中所示三跨连续梁于 A 处和 D 处设有固定支承；B 和 C 处设置辊支承。三跨的长度相同（$L_1=L$）。梁上的荷载如下：$P_1=P$，$P_2=0$，$M_1=0$，$q_1=0$，$q_2=P/L$。试确定该梁的反力 R_a、R_b、R_c 和 M_a。

11.7-6　求解上一习题，其中跨长度为边跨长度的 1.5 倍（$L_1=1.5L$），荷载为：$P_1=P_2=P$，$q_1=P/L$，$q_2=P/L$ 和 $M_1=PL$。



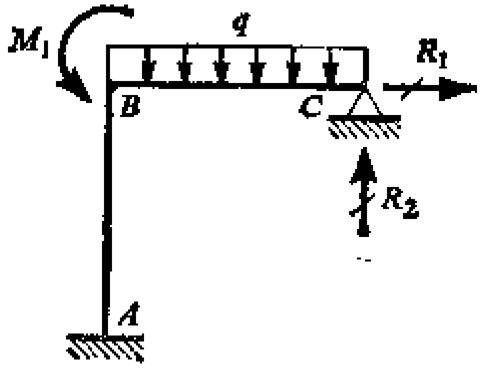
习题 11.7-5 和 11.7-6

11.7-7 试求图中所示平面框架支承 A 处和 D 处的反力，仅考虑弯曲变形的效应。所有杆的弯曲刚度相同。AB 杆和 BC 杆的长度为 L，BD 杆的长度为 $2L/3$。



习题 11.7-7

11.7-8 有一平面框架 ABC（见图），其 A 点处设有固定支承，C 点处设有销接支承。AB 杆和 BC 杆的弯曲刚度以及长度 L 都相同。



习题 11.7-8

其荷载：作用于 BC 杆上为强度 q 的均匀荷载和作用于 B 点处的力偶 $M_1=2qL^2$。仅考虑弯曲变形，试求支承 C 处的反力 R_1 和 R_2。

11.9-1 图 1-14a 所示的对称桁架由三根相交于 D 点的杆所组成。所有杆的轴向刚度 EA 相同，中央杆的长度为 L。作用于桁架上的唯一荷载是作用于 D 点处的竖直力 P。(a)试将结构应变能表达为 D 点处竖直位移的函数。(b)应用卡斯提里阿诺第一定理求出刚度法的平衡方程，并对此方程求解挠度 δ。(c)用此 δ 值求出桁架中诸杆的轴向力 N_{ad}、N_{bd} 和 N_{cd}。

11.9-2 有一简单桁架，承受荷载 P 作用，见图 1-10a 所示。该桁架的两根杆具有相同的轴向刚度 EA，AB 杆的长度为 L。以 D_1 表示 B 点的水平位移，向右为正值；以 D_2 表示竖直位移，向下为正值。(a)将结构的应变能 U 表达为位移 D_1 和 D_2 的函数。(b) 用卡斯提里阿诺第一定理求解 D_1 和 D_2。(c)采用这些 D_1 和 D_2 值，求出诸杆的轴向力 N_{ab} 和 N_{bc}。

11.10-1 用势能法求出图 11-34a 中平面框架的节点转角 D_1 和 D_2。每一根杆的长度均为 L，弯曲刚度均为 EI。

11.10-2 用势能法求解习题 11.9-1。

11.10-3 用势能法求解习题 11.9-2。

第 11.11 节的习题采用瑞利-里兹法进行求解

11.11-1 试求图 11-36 所示简单梁在下列情况下中央处挠度 δ 的近似值：(a)取形状函数为带有一个位移参数的二次多项式的形式。(b)取形状函数(对梁的一半)为带有一个位移参数的三次多项式的形式。将所得的结果与精确解进行比较。

11.11-2 有一简单梁，长度为 L，承受强度为 q 的均匀荷载作用，试求该梁中央处挠度 δ 的近似值。假设该梁的弯曲刚度 EI 为常数。(a) 取形状函数为带有一个位移参数的三角函数表达式(见第 11.11 节方程 a)。(b) 取形状函数为带有两个位移参数的三角函数表达式(见第 11.11 节的方程 d)。将所得的结果与精确解进行比较。

11.11-3 试求长度为 L、中央承受集中荷载 P 的固定端梁中央处的近似挠度 δ(见图 7-3)。假设该梁的弯曲刚度 EI 为常数。应用形

状函数为带有一个位移参数的三角表达式的形式，其形式如下：

$$v=\frac{\delta}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$

将所得的结果与挠度的精确值进行比较。

11.11-4　有一具有两种不同惯性矩的简支梁示于图 6-15a 中。试按下列情况求出该梁中央处挠度 δ 的近似值：(a)取形状函数为带有一个位移参数的二次多项式的形式。(b) 取形状函数(对梁的一半)为带有一个位移参数的三次多项式的形式。将所得的结果与精确的挠度(见第 6.6 节方程 c)进行比较。

11.11-5　试求带有固定基础的理想柱之临界屈曲荷载 P_{cr}(见图 11-38)。假设该柱的弯曲刚度 EI 为常数，柱的形状函数采用带有一个位移参数的三角函数表达式的形式，即

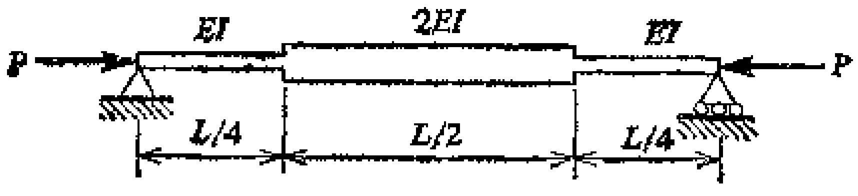
$$v=\delta\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)$$

11.11-6　试确定带有简单支承条件的理想柱之临界屈曲荷载 P_{cr} 的近似值(见图 10-6a)。假设该柱的弯曲刚度 EI 为常数。(a)采用带有一个位移参数的二次多项式的表达式作为假设的形状函数。(b) 采用带有一个位移参数的四次多项式的表达式作为假设的形状函数。将所得的结果与精确的临界荷载进行比较。

11.11-7　试计算具有两种惯性矩的理想简支柱之临界屈曲荷载 P_{cr} 的近似值(见图)。采用下列带有一个位移参数的三角函数作为形状函数：

$$v=\delta\sin\frac{\pi x}{L}$$

(注意：精确的屈曲荷载 $P_{cr}=1.68\,\pi^2EI/L^2$)



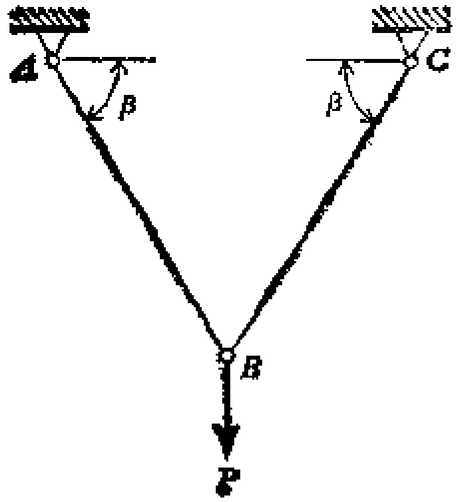
习题 11.11-7

11.12-1　有一承受荷载 P 的非线性结构，它所储存的余能 U^* 给于第 11.8 节的例 1 中(见方程 11-46)。籍应用克罗第-恩格塞定理

核实该结构挠度 δ 的表达式。

11.12-2　第 11.8 节例题 2 已叙述由两根水平杆构成的非线性结构(见图 11-30)。该结构的余能给自方程(11-49)。试用克罗第-恩格塞定理证明该结构的挠度 δ 表达式(见方程 11-47 b)。

11.12-3　有一由两根相同杆 AB 和 BC 组成的桁架(见图),承受竖直荷载 P 作用。每一根杆的横截面积为 A,长度为 L,应力-应变关系为 $\sigma^n=B\epsilon$,这里 B 和 n 均为常数。(a)需求算结构的余能,应用克罗第-恩格塞定理,试确定节点 B 处的挠度 δ。(b)试用单位荷载法确定挠度 δ。



习题 11.12-3

11.12-4　图 11-32 中所示桁架的节点 B 承受竖直荷载 P 作用,其应力-应变图示于图中(b)内。试用下列方法确定节点 B 处的水平挠度 δ_H:(a)求算结构的余能,并应用克罗第-恩格塞定理。(b)应用单位荷载法。

11.12-5　有一顶端悬挂着的杆,试求该杆在自重作用下所产生的伸长量 δ。假设该杆材料的应力-应变关系为 $\sigma^n=B\epsilon$,式中的 B 和 n 均为常数。该杆的长度为 L,单位体积的重量为 γ。(a)采取求算杆的余能和运用克罗第-恩格塞定理去求其伸长量。(b)采用单位荷载法去求伸长量。

11.14-1　试确定图 11-40 所示悬臂梁中点处的挠度 δ。(a)藉梁中央处加一虚荷载 Q 求算应变能,然后采用卡斯提里阿诺第二定理,去求出上述挠度。(b)应用单位荷载法去求出挠度。

参考文献和历史注释

1-1. Timoshenko, S. P.,[1] *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1953 年.

1-2. Todhunter, I. 和 Pearson, K., *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, 第Ⅰ卷和第Ⅱ卷, Dorver Publications, Inc.,New York,1960 年(原来由 Cambridge University Press 于 1886 年和 1893 年出版).

1-3. Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 第 4 版,Dover Publications, Inc., New York, 1944 年(原来由 Cambridge University Press 于 1927 年出版),见"Historical Introduction",第 1—31 页.

1-4. 见参考文献 1-2,第Ⅰ卷,第 10、533 和 873 页. [注: Jacob Bernoulli (1654—1705 年)还以 James, Jacques 和 Jakob 等名字而闻名,参考文献 1-2 应用了 James 一名. 他是瑞士Basel 著名数学家和科学家家族的成员. 他写了梁的弹性曲线方面的重要著作,还推导了极坐标. 他因概率理论、解析几何等方面的著作而出名. Jean Victor Poncelet (1788—1867 年)是法国人,参加过拿破仑反对俄国的战役,没有战死在战场上,幸免地活了下来,被捉为囚犯,后来回到法国继续从事他的数学著作. 他对数学的主要贡献是几何方面,然而在力学方面,他以材料性能和动力学的著作最为著名.]

1-5. 见参考文献 1-1 第 90—98 页和参考文献 1-2 第Ⅰ卷第 80—86 页. (注: Thomas Young 是一位杰出的科学家. 他在光学、声学、冲击以及其它课题方面写出了创始性的著作.)

1-6. Young, Thomas, *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*,第 1 卷和第 2 卷,London,1807 年.

1-7. 见参考文献 1-1 第 17—20 页和参考文献 1-2 第Ⅰ卷第 5 页. (注: Robert Hooke 对弹性物体做了许多试验,而且不断地提出了改进的方法. 他没有受牛顿的帮助而系统地阐述了万有引力定律, 他与牛顿是同时代的人. 1662 年伦敦皇家协会成立, 他被任命为第一干事.)

1-8. Hooke, Robert, *De Potentiâ restitutiva*, London,1678 年.

1-9. 见参考文献 1-1 第 111—114 页, 参考文献 1-2 第Ⅰ卷第 208—318 页以及参考文献 1-3 第 13 页. (注: Siméon Denis Poisson 对数学做出了

---

1) 铁摩辛柯(Timoshenko, S. P.) 为美国斯坦福大学应用力学荣誉教授,除本书外还著有工程力学、结构学原理、弹性力学、板壳理论、弹性稳定理论、材料力学史、高等动力学和工程中的振动问题等书. 他于 1972 年 5 月 29 日在德国他的女儿家中去世,时年 93 岁. ——译者注

许多重要的贡献．他的名字除用于泊桑比外，在好多方面都保留着．例如，在偏微分方程方面，我们有"泊桑方程"；在概率方面，有"泊桑分布"．在他自己的材料性能理论基础上，他算出了受拉杆的横向应变，并发现它为纵向应变的四分之一．）

1-10. Timoshenko, S. P. 和 Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 第3版，McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1970年第110页．

1-11. 见参考文献1-1第314页．

1-12. 见参考文献1-1第36页和参考文献1-13第650页．

1-13. Oravas, G. A. 和 McLean, L., "Historical development of energetical principles in elastomechanics," *Applied Mechanics Review*, 第I部分，第19卷，第8期，1966年8月，第647—658页和第II部分，第19卷，第11期，1966年11月，第919—933页．

1-14. 见参考文献1-1第75页，参考文献1-2第I卷第146页和参考文献1-13第652页．［注：Louis Marie Henri Navier(1785—1836年)是数学弹性理论创始人之一．他对梁、板和壳的理论、振动理论、粘性液体理论作出了贡献．］

1-15. 见参考文献1-1第88页．

1-16. Timoshenko, S. P. 和 Young, D. H., *Vibration Problems in Engineering*, 第3版 D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1955年．（注：杆上纵向冲击在第24-26页和312—314页中作了讨论．梁上横向冲击在第26—29页和412—413页中作了讨论．）

1-17. Goldsmith, W., *Impact*, Edword Arnold Ltd., London, 1960年，第379页．

2-1. Piobert, G., Morin, A.-J. 和 Didion, I., "Commission des Principes du Tir," *Mémorial de l'Artillerie*, 第5卷，1842年，第501—552页．［注：这篇论文讨论了藉射炮弹于铁板所做的实验．在第505页上显示关于滑动带的痕迹的描述．其描述非常简要，没有表明著者把痕迹认为是材料固有的性能．Guillaume Piobert (1793—1871年) 为法国的将军和数学家．他做了许多弹道学的研究，在此论文公布对，他是炮兵军官．］

2-2. Lüders, W., "Ueber die Äusserung der elasticität an stahlartigen Eisenstäben und Stahlstäben, und über eine beim Biegen solcher Stäbe beobachtete Molecularbewegung," *Dingler's Polytechnisches Journal*, 第155卷，1860年，第18—22页．（注：这篇论文清晰地描述和说明了磨光钢试件表面在屈服变形时所出现的条纹．自然，这些条纹仅是变形三向区域的表面征象；因此这些区域说成是条纹倒不如描述为楔形物．虽然，通常以 Lüder 带这一词来标记，但有时被称为 Piobert 带．对于这种带的进一步讨论以及有关照片和文献可从参考文献2-3和2-4中找到．）

2-3. Fell, E. W., "The Piobert effect in iron and soft steel," *The Journal of the Iron and Steel Institute*, 第132卷，第2期，1935年，

第75—91页.
2-4 Turner, T. H. 和 Jevons, J. D., "The detection of strain in mild steels," *The Journal of the Iron and Steel Institute*, 第111卷,第1期,1925年,第169—189页.
2-5. 见参考文献1-1第216页.
2-6. 见参考文献1-1第285—286页和参考文献2-7及2-8[注:Otto Christian Mohr(1835—1918年)对结构理论做出了许多贡献. 他由于许多图解法而出名. 在这些图解中包括有莫尔应力圆、Williot-Mohr图解以及力矩面积法. 另外,他还发展了一种分析静不定结构的方法,这种方法通常称为Maxwell-Mohr法.]
2-7. Mohr, O., "Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperehementes," *Zivilingenieur*. 1882年.
2-8. Mohr, O., *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Wilhelm Ernst and Sohn, Berlin,1906年.
2-9. 见参考文献1-1第109页. [注: Augustin Louis Cauchy (1789—1857年)是数学弹性理论史中的另一位卓越人物. 他清晰地介绍我们今天所理解的应力的概念,见参考文献1-1第108页和115页. 在参考文献1-2中有一章专谈他的著作,见该书第1卷第319页—376页.]
2-10. 见参考文献1-2第Ⅱ卷第1部分第86页和296页.[注:William John Macquorn Rankine(1820—1872年)于1852年推导出应力变换方程. 他对弹性理论和结构理论(包括拱和挡土墙的性能)作出了许多其他的贡献. 他还以他的有关液体、光学、声学、结晶性能等方面的著作而获盛名,见参考文献1-1的第197—202页和参考文献1-2的第Ⅱ卷第Ⅰ部分第287—322页. Barréde Saint-Venant(1797—1886年)一直广泛地被认为是最出色的弹性力学家. 他的最著名贡献中的一部分是对弹性力学基本方程之推导以及对梁的弯曲和扭曲的精确理论的发展. 他还发展了塑性变形和振动的理论. 关于他的生平和著作的材料见参考文献1-1第229—242页和参考文献1-2第Ⅰ卷的第833—872页以及第Ⅱ卷第Ⅰ部分的第1—286页.]
2-11. 见参考文献1-10第219—226页.
2-12. Hetényi, M., Editor, *Handbook of Experimental stress Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., New York,1950年.
2-13. Dally, J. W. 和 Riley, W. F., *Experimental Stress Analysis* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York,1965年.
3-1. 见参考文献1-1第51—53页和92页以及参考文献1-2第Ⅰ卷的第69页[注:圆杆情况下扭矩与扭转角之间的关系是由法国著名科学家Charles Augustin Coulomb于1784年正确地建立起来的. Coulomb在电学以及磁学、液体的粘滞度、摩擦力、梁的弯曲、挡土墙和拱、扭转和扭转振动以及其它问题上作出了贡献,见参考文献1-1第47—54页. Thomas Young在他的1807年的书中(参考文献1-6)已观察到所作用的扭矩由

横截面上的剪切应力来平衡，还观察到其剪切应力与距轴线的距离成正比.]
3-2. 见参考文献 1-1 第 233—237 页和参考文献 1-2 的第Ⅱ卷第Ⅱ部分第 1—51 页。[注：Saint-Venant 关于扭转的划时代的研究报告出版于 1855 年，并且在这些参考文献中作了叙述.]
3-3 Bredt, R., "Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität," *Zeitzschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 第 40 卷，1896 年，第 813—817 页.
3-4. Flügge, W., 主编，*Handbook of Engineering Mechanics*，第 1 版，McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1962 年，第 36—13 页.
3-5. Timoshenko, S. P. 和 Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*，第 2 版，McGraw-Hill Book Co., Inc., 1961 年，第 500—509 页.
5-1. Fazekas, G. A., "A note on the bending of Euler beams," *Journal of Engineering Education*，第 57 卷第 5 期，1967 年 1 月，第 393—394 页.
5-2. 见参考文献 1-10 第 42，48 页
5-3. 见参考文献 1-1 第 11-47，135—141 页和参考文献 1-2.
5-4. *Manual of Steel Construction*，第 7 版，由 American Institute of Steel Construction, Inc 出版，101 Park Avenue, New York, N. Y., 10017，1970 年.
5-5. *Aluminum Construction Manual*，由 Aluminum Association 出版，420 Lexington Avenue, New York, N. Y., 1959 年，389 页，和"部分 A"，1963 年，96 页.
5-6. 见参考文献 3-5 的第 6 章.
5-7. 见参考文献 1-1 第 141—144 页和参考文献 1-2 第Ⅱ卷第Ⅰ部分第 641—642 页 [注：D. J. Jourawski (1821—1891 年) 是俄国桥梁和铁路工程师，发展了现在所广泛应用的梁中剪切应力的近似理论. 尽管 Saint-Venant 已提出梁中剪切应力的精确理论，但是它仅用于很少几种实际情况，因此，看来 Todhunter 和 Pearson 在第 642 页中对 Jourawski 的理论所作的苛刻评语是不正确的. Jourawski 关于梁中剪切的专题论文列于参考文献 5-8 中.]
5-8. Jourawski, D. J., "Sur la résistance d'un corps prismatique ......," *Annales des Ponts et Chaussées*, Mémoires et Documents, 第 3 辑，第 12 卷，第 2 部分，1856 年，第 328—351 页.
5-9. 见参考文献 1-10 第 358—9 页.
5-10. 见参考文献 1-1 第 194—195 页. [注：Karl Culmann (1821—1881 年) 是德国工程师，对图解法作了大量发展，并出版了图解静力学方面的最早一本书.]
5-11. Ranov, T. 和 Wolko, H. S., "The location of maximum principal stresses," *Proceedings of the American Society of Civil En-*

gineers, Journal of the Structural Division, 第84卷，ST 3，第1629号论文，1958年，5月.

5-12. Maki, A. C. 和 Kuenzi, E. W., "Deflection and stresses of tapered wood beams," Research Paper FPL 34, U. S. Forest Service. Forest Products Laboratory, Madison, Wisconsin, 1965年9月，54页.

5-13. 见参考文献 1-10 第 110—111 页.

5-14. Plantema, F. J., *Sandwich Construction*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1966年.

5-15. 见参考文献 1-1 第 147 页. [注：法国工程师 J. A. C. Bresse (1822—1883年)因其曲杆和拱的著作而闻名.]

6-1. 见参考文献 1-1 第 27, 30—36 页. [注：Jacob Bernoulli, Euler 以及其他许多人有关弹性曲线的著作在参考文献 1-2 中也作了讨论. 关于这方面，Bernoulli 家族中的另一个成员 Daniel Bernoulli (1700—1782年)曾向 Euler 提出他藉使应变能成为最小得到变位曲线的微分方程，这种方程 Euler 已得出过. Daniel Bernoulli 是 Jacob Bernoulli 的侄子，他因其流体动力学、气体动力学理论、梁的振动以及其它方面的著作而著名. 他的父亲 John Bernoulli (1667—1748年)是 Jacob 的弟弟，是同样著名的数学家和科学家，他最早阐述虚位移原理，解决了最速降线问题，并建立了得出当分子和分母均趋近于零时分数的极限值的规则. 他把上面这个规则告诉 G. F. A. de L'Hôpital (1661—1704年)，L'Hôpital 写了微积分学的最早一本书，其中包括了上述定理，这就是今天我们所熟悉的"L'Hôpital 定理"，见参考文献 6-2. Daniel 的侄子 Jacob Bernoulli (1759—1789年)也以 James 或 Jacques 的名字著名，他是板挠曲和板振动理论的先驱. 关于 Bernoulli 家族中许多杰出成员以及力学和数学方面的其它先驱的大量有趣资料可在数学史的书籍中找到，例如参见参考文献 6-3, 6-4 和 6-5.]

6-2. Struik, D. J., "The origin of L'Hôpital's rule," *The Mathematics Teacher*, 第56卷第4期，第257—260页，1963年4月.

6-3. Newman, J. R., *The World of Mathematics* 第1—4卷，Simon and Schuster, New York, 1956年.

6-4. Struik, D. J., *A Concise History of Mathematics*, 第3版，Dover Publications, Inc. New York, 1967年.

6-5. Cajori, F., *A History of Mathematics*, 第2版，The Macmillan Co., New York, 1919年.

6-6. 参见参考文献 1-1 第 137 页.

6-7. Navier 著，而由 Barré de Saint-Venant 编写注释和附录的 *Résumé des Leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 第3版第1部分，"De la Résistance des corps solides," Paris, 1864年，第72页.

6-8. 见参考文献 1-1 第 284 页。

6-9. Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Holz-und Eisen-Constructionen," *Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 第 14 卷, 1868 年, 第 19—51 页.

6-10. Greene, Charles E., "Graphical Method for the Analysis of Bridge Trusses," D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1875 年。(注：力矩面积法是密歇根大学教授 Greene 于 1873 年独创的。他在这一年开始向学生讲授这种方法。这种方法以"面积力矩法"(area-moment method)的名称在该书第 35—40 页中进行了叙述。)

6-11. Hildebrand, F. B., *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1956 年。

6-12. Salama, A. E. 和 Moody, M. L., "Analysis of beams and plates for ponding loads," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Structural Division, 第 93 卷, 第 ST 1 期, 第 109-126 页, 1967 年 2 月。

6-13. Sawyer, D. A., "Roof-structure roofdrainage interaction," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*. Journal of the structural Division, 第 94 卷, 第 ST 1 号, 1968 年 1 月, 第 175—198 页。

6-14. 见参考文献 1-10 第 49 页。

6-15. 见参考文献 1-10 第 121 页。

6-16. 见参考文献 1-1 第 89 页。

6-17. Cowper, G. R., "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory," *Journal of Applied Mechanics*, 第 33 卷第 2 期, 1966 年 6 月(*Transactions of the American Saciety of Mechanical Engineers*, 第 88 卷, E 辑), 第 335—340 页。

6-18. Gere, J. M., *Moment Distribution*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey, 1963 年, 第 212 —220 页。

6-19. 见参考文献1-1第25, 30—36, 39—40页. [注：曲率与弯矩关系的基本方程为Jacob Bernoulli 所创，虽然他没有正确地求算比例常数。尽管如此，他的工作应该认为是对求梁的大挠度问题的最早贡献。后来，Euler 遵照 Daniel Bernoulli 的建议再导出挠度曲线的微分方程，并进行了弹性线的各种问题之求解，见参考文献 1-1 第 27 页、参考文献 1-2 第 I 卷第 30 页和 34 页以及参考文献 1-3 第 3 页。Euler 关于弹性曲线的著名论文被列入参考文献 6-20。Joseph Louis Lagrange(1736—1813 年)是著名的意大利数学家，他是第一个阐述虚功原理的人，而且对动力学作出了重要的贡献。显然，他是研究弹性线的第二个人。他考察过端头处作用有荷载的悬臂梁，见参考文献 1-1 的第 39-40 页和参考文献 1-2 的第 I 卷第 58-61 页。Lagrange 的论文被列入参考文献 6-21，他的传略载在参考文献 6-4 的第 132 页和参考文献 6-5 的第 250 页。另一位弹性理论方面的早期研究者是 Giovanni Antonio Amaedo Plana (1781—1864

年)，他是 Lagrange 的侄子，曾校正过 Lagrange 在弹性研究中的错误，见参考文献 1-2 的第Ⅰ卷第 89—90 页。Plana 的论文被列入参考文献 6-22，他的传记资料可从参考文献 6-5 中找到．在 Max Born 的学位论文中，做过用变分法进行弹性线研究，见参考文献 1-13 的第 927—928 页和第 932 页、参考文献 6-23 以及参考文献 6-24 的第 xxviii 页．Max Born（1882—1970 年）是一位伟大的物理学家，他建立了近代波动力学，并在量子力学和相对论方面作了重要的研究．在他的学位论文中，他对弹性学建立了新的变分原理．]

6-20．Euler，L.，"Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes……，" 附录Ⅰ "De curvis elasticis，" Bousquet，Lausanne and Geneva，1744 年．（英译本：Oldfather，W. A.，Ellis，C. A. 和 Brown，D. M.，*Isis*，第 20 卷，1933 年，第 70—160 页．并再次发表于 *Leonhardi Euleri Opera Omnia*，第 1 辑，第 24 卷，1952 年．）

6-21．Lagrange，J. L.，"Sur la force des ressorts pliés，" *Mémoires de l'Académie rayale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*，第 25 卷，1771 年．（再版于"Oeuvres de Lagrange，" Gauthier-Villars，Paris，第 3 卷，1869 年，第 77—110 页．）

6-22．Plana，G. A. A.，"Équation de la courbe formée par une lame élastique，" *Memoirs of the Royal Society of Turin*，第 18 卷，1809—1810 年，第 123—155 页．

6-23．Born，M.，"Untersuchungen über der Stabilität der elastichen Linie in Ebene und Baum unter verschiedenen Grenzbedingungen，" Dissertation，Göttingen，1906 年．

6-24．Oravas，G. A.，"Historical Review of Extremum Principles in Elastomechanics，" C. A. P. Castigliano 著 *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications* 一书的介绍部分（第 xx 页至 xixi 页）由 E. S. Andrews 译成英文，Dover Publications，Inc. 出版，New York，1966 年．（注：Castigliano 的著作最早在 1879 年出版于 Turin，随后在 1886 年译成德文，1919 年译成英文．E. S. Andrews 所译的英译本以 *Elastic Stresses in Structures* 为题由 Scott，Greenwood，and Son 于 London 出版．Dover 版本是英译本的再版，但是里面有 Oravas 所编历史方面的新的介绍材料，见参考文献 11-25 至 11-29．）

6-25．见参考文献 1-3 第 401—412 页．

6-26．见参考文献 3-5 第 76—82 页．

6-27．Southwell，R. V.，*An Introduction to the Theory of Elasticity* 第 2 版，Oxford University Press，London，1941 年，第 429—436 页

6-28．Frisch-Fay，R.，*Flexible Bars*，Butterworth and Co.，Ltd.，1962 年，220 页．

6-29. Eisley, J. G., "Nonlinear deformation of elastic beams, rings, and strings," *Applied Mechanics Reviews*,第 16 卷,第 9 期,1963 年 9 月,第 677—680 页.
6-30. Reddick, H. W.和 Miller, F. H., *Advanced Mathematics for Engineers*,第 3 版,John Wiley and Sons, Inc.,New York,1955 年,548 页.
6-31. Jahnke, E.和 Emde, F., *Table of Functions*,第 4 版,Dover Publications, New York,1945 年.
6-32. Belyakov, V. M., Kravtsova, P. I.和 Rappoport, M. G., *Tables of Elliptical Integrals*,第 I 部分,由 P. Basu 翻译, The Macmillan Co., New York,1965 年,647 页.
6-33. Fettis, H. E.和 Caslin, J. C., *Tables of the Elliptic Integrals of the First, Second and Third Kind*. ARL 64-232, Aerospace Research Laboratories, Office of Aerospace Research, United States Air Force, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1964 年 12 月,93 页.
6-34. Rojahn, C., "Large deflections of elastic beams," 工程师学位论文,Stanford University,1968 年 6 月.
6-35. Bisshopp, K. E.和 Drucker, D. C., "Large deflection of cantilever beams," *Quarterly of Applied Mathematics*, 第 3 卷, 1945 年第 272—275 页.
6-36. Barten, H. J., "On the deflection of a cantilever beam," *Quarterly of Applied Mathematics*,第 2 卷,1944 年,第 168—171 页,以及同一刊物的第 3 卷,1945 年,第 275—276 页. (注: 第二篇改正了第一篇里的错误.)
6-37. Rohde, F. V., "Large deflections of a cantilever beam with uniformly distributed load,"*Quarterly of Applied Mathematica*, 第II卷,1953 年,第 337—338 页.
6-38. Kirchhoff, G. R., "Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 第 56 卷, 1859 年, 第 285—313. [注: Gustav Robert Kirchhoff(1824—1887 年)是一位著名的德国物理学家,他以电网路和板挠曲理论的著作而出名.]
6-39 见参考文献 3-5 第 77 页、参考文献 1-3 第 23—24 和 399—402 页、参考文献 1-2 第II卷第II部分第 65—66 页以及参考文献 6-27 第431 页.
7-1. Navier, L. M. H., *Résumé des Leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 第 1 版, 1826 年, 第 2 版, 1833 年,第 3 版(附有 Saint-Venant 的注释和附录)Paris,1864 年. (注 Navier 编写了前两版,第 3 版是在 Navier 死后由 Saint-Venant 校订. Saint-Venant 补充的材料为原书内容的十倍. 关于对此名著的讨

论参见参考文献7-2。）
7-2. 见参考文献1-1第73—77和232—233页以及参考文献1-2第Ⅰ卷，第144—146页和第Ⅱ卷，第Ⅰ部分第105—135页。
7-3. 见参考文献6-18第269—272页。
7-4. 见参考文献1-1第144—146页。〔注：B. P. E. Clapeyron（1799—1864年）是一位法国工程师，他在桥梁方面的著作中导出了三弯矩方程。他还因其功能和应变能的定理而出名。Clapeyron叙述三弯矩方程的论文列入了参考文献7-5中。另一位法国工程师Bertot是用今天的形式发表三弯矩方程的第一个人，见参考文献7-6中所列他的论文。虽然Bertot的论文发表在Clapeyron之前，但是看来Clapeyron应用这个方法却要早好几年，他是这个方程的真正创始者，如参考文献1-1中所指出的那样。〕
7-5. Clapeyron, B. P. E., "Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés." *Comptes Rendus*. 第45卷，1857年，第1076—1080页。
7-6 Bertot. H., *Mémoires et compte-rendu des travaux de la Société des Ingenieurs Civils*，第8卷，1855年，第278页。
7-7. Zaslavsky, A., "Beams on immovable supports." *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering*，第25卷，1965年，第353—362页。
8-1. Timoshenko, S. P., "Use of stress functions to study flexure and torsion of prismatic bars."（俄文本），St. Petersburg, 1913年（在*Memoirs of the Institute of Ways of Communication*的第82卷中再次发表。）〔注：在这篇论文中，梁横截面内集中力作用所穿过以使它不产生转动的点被找到了。这样，在这一著作中第一次确定了剪切中心。他所研究的特定梁为一半圆形横截面的实心梁，见参考文献8-2。1909年，C. Bach试验了槽形梁，并观察了当梁上作用平行于腹板平面的荷载时所产生的扭转（参考文献8-3和8-4）。他还观察了当荷载横向移动时旋转的变化，但是显然他没有确定出剪切中心。1917年，A. A. Griffith和G. I. Taylor应用皂膜法研究挠曲，他们确定了几种截面形式的剪切中心，他们称之为弯曲中心（参考文献8-5）。开口横截面薄壁杆的剪切中心的一般近似解由R. Maillort得出，他解释了剪切中心对于结构形式的实际意义，见参考文献8-6。它还指出Maillart引进了"剪切中心"这一名词。对于发展剪切中心概念的更大贡献是参考文献8-7至8-16。剪切中心的广泛讨论，以及梁的挠曲和扭转问题的一般介绍列于参考文献8-17中。有关剪切中心的一些历史注释可在参考文献8-18和8-19中找到。〕
8-2. 见参考文献1-10第371-373页。
8-3. Bach, C., "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit [-förmigem Querschnitt," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*. 第53卷第44期，1909年，第1790—

1795 页。
8-4. Bach, C., "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Tragern mit [-förmigem Querschnitt," *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 第54卷,第10期, 1910年, 第382—387页。
8-5. Griffith, A. A.和Taylor, G. L., "The problem of flexure and its solution by the soap-film method," *Technical Report of the Advisory Committe for Aeronautics*, 1917—1918年,第3卷, 由His Majesty's Stationery Office, 于1921年出版, London. (Reports and Memoranda, 第399期,1917年11月),第950—969页。
8-6. Maillart, R., "Zur Frage der Biegung," *Schweigerische Bauzeitung*,第77卷,1921年, 第195—197页; "Bemerkungen zur Frage der Biegung," *Ibid.*,第78卷,1921年,第18—19页;"Ueber Drehung und Biegung," *Ibid.*,第79卷,1922年, 第254—257页; "Der Schubmittelpunkt," *Ibid.*,第83卷,1924年,第109—111页;"Zur Frage des Schubmittelpunktes," *Ibid.*,第83卷,1924年, 第176—177页。
8-7. Weber, C., "Biegung und Schub in geraden Balken," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*,第4卷,1924年, 第334—348页。
8-8. Weber, C., "Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*,,第6卷,1926年,第85—97页。
8-9. Schwalbe, W. L.,"Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*,第15卷,1935年,第138—143页。
8-10. Trefftz. E., "Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*,第15卷,1935年,第220—225页。
8-11. Hill, H. N., "Torsion of flanged members with cross sections restrained against warping," *National Advisory Committee for Aeronautics*, Technical Note, 第888,1943年3月。
8-12. Osgood, W. R., "The center of shear again," *Journal of Applied Mechanics*,第10卷,第2期,1943年6月,第A-62至A-64页 (*Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 第65卷,1943年)。
8-13. Mandel, J., "Détermination du centre de torsion à láide du théorème de réciprocité," *Annales des ponts et Chaussées*, 第118卷,1948年,第271—290页。
8-14. Jacobs, J. A., "The centre of shear of aerofoil sections,"*Journal of the Royal Aeronautical Society*,第57卷,1953年,第235—237页.
8-15. Duncan, W. J., "The flexural centre or centre of shear," *Jo-*

urnal of the Royal Aeronautical Society,第57卷,1953年,第594—597页。
8-16. Koiter, W. T., "The flexural centre or centre of shear," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 第58卷,1954年,第64—65页。
8-17. Timoshenko, S. P., "Theory of bending, torsion, and buckling of thin-walled members of open cross section," *Journal of the Franklin Institute*, 第239卷,第3期,1945年3月,第201—219页;第4期,1945年4月,第249—268页以及第5期,1945年5月,第343—361页。
8-18. 见参考文献1-1第401页。
8-19. Nowinski, J. L., "Theory of thin-Walled bars," *Applied Mechanics Surveys*, edited by Abramson, H. N., et al., Spartan Books, Washington, D. C.,1966年,第325—338页。
9-1. Beedle, L. S., *Plastic Design of Steel Frames*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958年,406页。
9-2. Massonnet, C. E. 和 Save, M. A., *Plastic Analysis and Design*, 第1卷,Blaisdell Publishing Co., New York,1965年,379页。
9-3. Phillips, A., *Introduction to Plasticity*, Ronald Press Co., New York,1956年,230页。
9-4. Phillips, A., "Bending of Beams," *Handbook of Engineering Mechanics* 第47章,由 W. Flügge 编辑,McGraw-Hill Book Co., Inc., New York,1962年。
9-5. Hodge, P. G., Jr., *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York,1959年,364页。
9-6. Neal, B. G., *The Plastic Methods of Structural Analysis*, 第2版,John Wiley and Sons, Inc., New York,1963年,358页。
9-7. Heyman, J., *Plastic Design of Portal Frames*, Cambridge University Press,1957年,104页。
9-8. Symonds, P. S., "Limit Analysis," *Handbook of Engineering Mechanics* 第49章,由 W. Flügge 编, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York,1962年。
9-9. Smith, J. O. 和 Sidebottom, O. M., *Inelastic Behavior of Load-Carrying Members*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965年,447页。
9-10. Symonds, P. S. 和 Neal, B. G., "Recent progress in the plastic methods of structural analysis," *Journal of the Franklin Institute*,第252卷,第5期,1951年11月,第383—407页及第6期,1951年12月,第469—492页。
9-11. Beedle, L. S., et al, *Structural Steel Design*, Ronald Press Co., New York,1964年,829页。

9-12. *Plastic Design in Steel*, published by the American Institute of Steel Construction, Inc., 101 Park Avenue. New York. N. Y., 10017, 1959 年。
9-13. Nadai, A., *Theory of Flow and Fracture of Solids*, 第1卷, 第2版, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1950 年, 572 页。
9-14. *Commentary on Plastic Design in Steel*, Manuals of Engineering Practice, 第41卷, American Society of Civil Engineers, 1961 年, 173 页。
9-15. Baker, J. F., Horne, M. R. 和 Heyman, J., *The Steel Skeleton*, 第Ⅱ卷, "Plastic Behavior and Design." Cambridge University Press, 1956 年, 408 页。
9-16. Baker, J. F. "A review of recent investigations into the behaviour of steel frames in the plastic range," *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 第31卷, 第3期, 1949年1月, 第188—224页。
9-17. Baker, J. F., "The design of steel frames," *Structural Engineer*, 第27卷, 第10期, 1949年10月, 第397—431页。
9-18. Greenberg, H. J. 和 Prager, W., "Limit design of beams and frames," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 第117卷, 1952年, 第447—458页.
9-19. Beedle, L. S. 和 Tall, L., Basic column strength," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 第127卷, 第Ⅱ部分, 1962年, 第138—172页.
9-20. Huber, A. W. 和 Beedle, L. S., "Residual stress and the compressive strength of steel." *Welding Journal*, 第33卷, 第12期, 1954年12月, 第589页至614页.
9-21. Yang, C. H., Beedle, L. S. 和 Johnston, B. G., "Residual stress and the yield strength of steel beams," *Welding Journal*, 第31卷, 第4期, 1952年4月, 第205页至229页.
9-22. Horger, O. J., "Residual Stresses," *Handbook of Experimental Stress Analysis* 第11章, 由 M. Hetényi 编, John Wiley and Sons Inc., New York, 1950 年.
9-23. Barrett, C. S., "A critical review of various methods of residual stress measurement," *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, 第Ⅱ卷, 第1期, 1944年, 第147—156页
10-1. Timoshenko, S. P. 和 Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 第2版, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1961 年.
10-2. Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952 年.
10-3. Euler, L., "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes……," 附录1, "De curvis elasticis," Bo-

usquet, Lausanne and Geneva. 1744 年. （英译文由 Oldfather, W A., Ellis, C. A. 和 Brown, D. M. 翻译，此书第 20 卷，1933 年，第 72-160 页. 还再次发表于 *Leonhardi Euleri Opere Omnia*，第Ⅰ辑，第 24 卷，1952 年.）

注：L. 欧拉（Leonhard Euler 1707-1783 年）对数学和力学作出了许多出色的贡献. 他可能是直到目前为止著作最多的数学家（参考文献 6-4，第120页），Newman称他为"数学家之英雄"（参考文献 6-3 第150页）. 他的名字在现代教科书中反复出现，例如，在力学方面，我们读到的有 Euler 的刚体运动方程、Euler 角、Euler 的液流方程、柱屈曲时的 Euler 荷载等等；在数学方面，我们遇见有著名的 Euler 常数和 Euler 数、Euler 恒等式（$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 等）和 Euler 公式（$e^{i\pi}+1=0$）、Euler 微分方程、变分问题的 Euler 方程、Euler 求积公式、Euler 求和公式、齐次函数的 Euler 定理、Euler 积分以及 Euler 方（具有某些性质的数的方阵列）.

在应用力学方面，Euler 第一个导出理想细长柱的临界屈曲荷载，而且第一个求解了弹性线问题. 在他的大量著作中包括有天体力学、动力学和流体力学方面的论文，还包括有梁和板振动方面的内容.

在数学领域里，Euler 对三角、代数、数论、微积分、无穷级数、解析几何、微分方程、变分计算以及其它许多方面作出了杰出的贡献. 他是第一个将三角值叙述为数的比值，而且第一个提出方程 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. 他的数学著作在其后很多年代中被认为是经典参考书. 我们从中发现变分法的最早发展以及诸如对于 $n=3$ 和 $n=4$ 的 Fermat "最终定理"的证明那种引起兴趣的项目. 他求解了 Königsberg 七座桥的著名问题——一个拓扑学的问题，这是他开拓的另一个领域.

Euler 出生于瑞士的 Basel 附近，求学于 Basel 大学，在 John Bernoulli（1667—1748 年）的指导下进行学习. 从 1727 年至 1741 年，他在圣彼得堡生活和工作，在这里他作为一位数学家获得了很大的声誉. 1741 年，他应普鲁士国王腓特烈二世要求移居到柏林. 在柏林直到 1766 年俄国女皇迦塞林二世要求他回到圣彼得堡为止，他一直继续他的数学研究. 他在 76 岁死于圣彼得堡之前，不停止地写作. 在他生命中这个最后一段时间内，他写了 400 余篇论文. Euler 一生中所写的书和论文的数量总计 886 件. 在他死后留下了许多原稿，这些原稿在后来的四十七年中由圣彼得堡的俄国科学院准继出版了. 他没有因为一只眼于 1735 年失明，另一只眼又于 1766 年失明而影响从事著作. Euler 的生平轶事在参考文献 1-1 中第 28—30 页和参考文献 6-3 中第 148—151 页作了介绍. 他对力学的有关贡献在参考文献 1-1 中第 30—36 页作了叙述.

10-4. Euler, L., "Sur la force des colunnes," *Histoire de L'Academie Royale des Sciences et Belles Letters*, 1757 年，发表于 *Memoires* of the Academie，第 13 卷，Berlin，1759 年，第 252—282 页.（注：见参考文献 10-5 中这篇论文的译文和讨论.）

10-5. Van den Broek, J. A., "Euler's classic paper 'On the strength

of columns,'" *American Journal of Physics*,第 15 卷,第 4 期, 1947 年 7 月—8月,第 309—138 页.

10-6. Hoff, N. J., "Buckling and Stability," The Forty-First Wilbur Wright Memorial Lecture, *Journal of the Royal Aeronautical Society*,第 58 卷, 1954 年 1 月,第 3 · 52 页.

10-7. Young, D. H., "Rational design of steel columns," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*,第 101 卷, 1936 年,第 422—451 页.

10-8. Johnston, B. G., editor, *Guide to Design Criteria for Metal Compression Members*,第 2 版,John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966 年.

10-9. *Manual of Steel Construction*,第 7 版,由 American Institute of Steel Construction, Inc. 出版, 101 Park Avenue, New York, N Y., 10017, 1970 年,第 5—16 页和 5-17 页.

10-10. ALCOA *Structural Handbook*, 由 Aluminum Company of America, Pittsburgh, Pennsylvania 出版, 1960 年.

11-1. Maxwell, J. C., "On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames," *Philosophical Magazine*,第 4 辑, 第 27 卷, 1864 年,第 294—299 页. (再次发表于 The *Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Cambridge University Press,第 1 卷,1890年,第 598—640 页,见参考文献 11-3.)[注: James Clerk Maxwell(1831—1879 年)在这篇论文中导出了求解弹性桁架挠度的单位荷载法,它还包括位移互等定理和静不定桁架中求赘余力的柔度法. 十年后, Otto Mohr 再次创出求挠度的Maxwell 法(参考文献 11-4),以及他在静不定桁架中求赘余力的方法(参考文献 11-13). Maxwell 进行了结构力学中其它的重要工作,包括应力分析的光测弹性法的导出,还在弹性理论方面作了许多研究. 关于这方面的著作和简略传记见参考文献 1-1 中的第 202—208 页和 268—275 页. 自然,Maxwell以他在光学、气体分子运动论、电学以及磁学方面的科学著作最为著名. 关于这位著名数学家和物理学家的生平轶事见参考文献 11-2.]

11-2. Campbell, L. 和 Garnett, W., *The Life of James Clerk Maxwell*, Macmillan and Co., London, 1882 年.

11-3. Maxwell, J. C., *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 第 1 卷和第 2 卷, 由 W. D. Niven 编排, Cambridge University Press, 1890 年.

11-4. Mohr, O., "Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger," *Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 第 20 卷, 第 2 期, 1874 年, 第 223—238 页. (注: 这篇论文提出了求桁架位移的单位荷载法.)

11-5. Betti, E., "Teoria della Elasticita," *Il Nuovo Cimento*, 第 2 辑, 第 7 卷和第 8 卷, 1872 年. [注: Enrico Betti(1823—1892 年)是意大

利数学家和工程师.]

11-6. Rayleigh, Lord. "Some general theorems relating to vibrations." *Proceedings of the London Mathematical Society*, 第4卷, 1873年,第357—368页。(由John William Strutt再次发表于*Scientific Papers*. 第1卷,Cambridge University Press, 1899年,第170—181页.)[注：在这篇论文中Lord Rayleigh提出了在振动系统上两个不同点处作用谐和变力情况下的互等定理。他得出对于假设力的周期成为无穷大的两个力之情况下静力互等功定理。在1874年和1875年出版的论文中(参考文献11-7),Rayleigh得到柔度和刚度的互等定理,虽然他没有采用这些术语。后来,在1877年所出版他的《声学理论》中(见参考文献11-8),他对两组相应力和位移的互等功定理(每一组包含任意多个力)给了明确的叙述。

Lord Rayleigh(1842—1919年)即John William Strutt. 他是著名的英国物理学家。他最著名的研究属于声学、光学和电学方面,他的著作"The Theory of Sound"是一部经典书籍,曾被广泛应用。他的科学论文共有六卷,已经再版过两次(见参考文献11-9和11-10)。Lord Rayleigh曾在剑桥大学的特林尼梯学院数学家E. J. Routh和G. G Stokes教导下进行学习。他除了理论学习外,完成了许多实验工作。1879年,他在剑桥卡文笛施实验室当上了教授,后来他担任过大不列颠皇家学院为自然科学教授。他曾帮助筹备国家物理实验室,并自1909年起直到他去世为止为航空学咨询委员会主席。此外,自1905年至1908年,Lord Rayleigh为皇家学会主席。自1908年起到他去世为止他还是剑桥大学名誉校长。他曾获得不少荣誉,包括1902年的国家勋章和1904年的诺贝尔物理学奖金.在获得这后面一项奖金中,他是与Sir William Ramsay于1895年共同最早发现稀有气体氩的. 在他的许多重要发现中,我们应注意到Lord Rayleigh是第一个解释为什么天空是蓝色的人。Rayleigh曾两次访问美国,第二次是1884年,当时他参加Kelvin公爵的著名的"Baltimore讲演"。

Lord Reyleigh的传记可从参考文献1-1,11-8, 11-11和11-12中找到.]

11-7. Rayleigh, Lord. "A statical theorem". *Philosophical Magazine*, 第4辑,第48卷,1874年,第452—456页;第4辑, 第49卷, 1875年,第183—185页。(由John William Strutt再次发表于*Scientific Papers*, 第1卷, Cambxidge University Press, 1899,第223—229页.)

11-8. Strutt, John William (Baron Rayleigh), *The Theory of Sound*, 第1卷和第2卷,第2版,Dover Publications, Inc., 1945年。(注：这个再版本包括Robert Bruce Lindsay写的历史介绍和传记略述。第1版最初出版的时间是：第1卷于1877年,第2卷于1878年。第2版最初出版的时间是：第1卷于1894年,第2卷于1896年。这两版均由Macmillan and Co., Ltd. London出版.)

11-9. Strutt, John William (Baron Rayleigh), *Scientific Papers*,

Cambridge University Press，第1卷，1899年；第2卷，1900年；第3卷，1902年；第4卷，1903年，第5卷，1912年；第6卷，1920年。（1964年由Dover Publications，Inc.再版，见参考文献11-10.）

11-10. Rayliegh, Lord, *Scientific Papers*, Dover Publications, Inc., New York，1964年。（这6卷的再版本于1899年至1920年由Cambridge University Press出版，但是装订成三卷.）

11-11. Strutt, Robert John (Fourth Baron Rayleigh), *John William Strutt, Third Baron Rayleigh*, Edward Arnold and Co., London, 1924年，403页。（由Lord Rayleigh的长子编写Lord Rayleigh的传记.）

11-12. Strutt, Robert John (Fourth Baron Rayleigh), *Life of John William Strutt, Third Baron Rayleigh*, University of Wisconsin Press，1968年，439页。（在这个最初由Edwargd Arnold and Co.于1924年出版的传记的再版本中，包括著者写的注释和John N. Howard写的前言。）

11-13. Mohr, O., "Beitrag zur Theorie des Fachwerks," *Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereins zu Hannover*，第20卷，第4期，1874年，第509—526页和第21卷，第1期，1875年，第17—38页。（注：这篇论文提出了用于静不定桁架的柔度法.）

11-14. Gere, J. M. 和 Weaver, W., Jr., *Analysis of Framed Structures*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.，1965年，475页.

11-15. Timoshenko, S. P. 和 Young, D. H., *Theory of Structures*，第2版，McGraw-Hill Book Co., Inc., New York，1965年，629页.

11-16. Norris, C. H. 和 Wilbur, J. B., *Elementary Structural Analysis*，第2版，McGraw-Hill Book Co., Inc., New York，1960年，651页.

11-17. Hall, A. S. 和 Woodhead, R. W., *Frame Analysis*，第2版，John Wiley and Sons, Inc., New York，1967年，329页.

11-18. Borg, S. F. 和 Gennaro, J. J., *Modern Structural Analysis*, Van Nostrand Reinhold Co., New York，1969年，455页.

11-19. Martin, H. C., *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York，1966年，331页

11-20. Gere, J. M., *Moment Distribution*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey，1963年，378页.

11-21. Weaver, W., Jr., *Computer Programs for Structural Analysis*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.，1967年，300页.

11-22. Clebsch, A., *Theorie der Elasticität fester Körper*，1862年，424页。[注：Alfred Clebsch（1833—1872年）是一位在力学方面作了许多发展的德国数学家。]

11-23. Bendixen, A., *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Bere-*

chung von Rahmenkonstruktionen. Berlin, 1914 年。(注：在这本书中，Axel Bendixen 提出了角变位移法，这种方法是用于平面构架的刚度法，以节点转动作为未知量。)
11-24. Ostenfeld, A., *Die Deformationsmethode*, Springer, Berlin, 1926 年，118 页。
11-25. Castigliano, A., *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. 由 A. F. Negro出版，Turin. 1879年，480 页。(注：在这本书中，Castigliano 以非常完整的形式提出了结构分析的许多概念和原理。虽然 Castigliano 是意大利人，但是他是用法文写这本书的，为的是要使他的著作得到较广泛的读者。它被译成了德文和英文，见参考文献 11-26 和 11-27。英译本由 Dover Publications 再版于 1966 年，且因 Gunhard A. Oravas 所写的介绍材料而特别有价值，见参考文献 11-28 和 6-24。

Castigliano 的第一定理和第二定理见他的著作 1966 年版本中第 15—16 页。他将它们区别为"内功微分系数定理"的第 1 部分和第 2 部分。关于这个定理，他的叙述如下：

"第 1 部分。如果构架结构的内功被表达为作用于结点处外力的相应位移之函数，那么所得的表达式对这些位移的微分系数得出相应力之值。

"第 2 部分。相反地，如果构架结构的内功被表达为外力的函数，那么表达式的微分系数可得出它们作用点的相应位移。"

今天，这些叙述通常分别称为 Castigliano 的第一定理和第二定理，而不称为同一定理中的第 1 部分和第 2 部分。Castigliano 在这本书中叙述他的定理之后，接着进行它们的推导，并将它们用于许多种情况。在这本书中，它们以数学形式表现为：

$$F_p=\frac{dW_1}{dr_p} \text{和} r_p=\frac{dW_1}{dF_p}$$

式中 W_1 为内功(或应变能)，F_p 代表外力中的任意一个力，r_p 为 F_p 的作用点之位移。

虽然 Castigliano 在他的书中指出他的介绍和论证比以前已经出版的任何书刊更为全面，但是他没有声称第一定理完全是他的独创。第二定理是他所创，且为他于 1873 年在都灵工艺学院的土木工程学位论文之一部分，见参考文献 11-29。

"最小功原理"为 Castigliano 在他的 1873 年出版的论文中所证明，而且它还出现在这本参考书中。Castigliano 和 Ménabréa 之间对这个原理的原作者进行争论的轶事，在 Oravas 对 1966 年版本所作的引言中(参考文献 11-28)作了描述。

Carlo Alberto Pio Castigliano 于 1847 年出生在阿斯梯的一个贫穷家庭里，而于 1884 年因肺炎早死，那时正是他著述最多的时候。他的生平轶事由 Oravas 在对 1966 年版本所作的引言中进行了介绍。Castigliano 的传记以及他的荣誉和所受奖也在那里作了介绍。在参考文

献 1-13，1-1 和 11-30 中还提供了有关他的贡献方面的材料。当他在其著作上署名时，他采用 Alberto Castigliano 这一名字。）

11-26. Hauff, E., *Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und deren Anwendung*, 由 Carl Gerold's Sohn 出版，Vienna, 1886 年。[Castigliano 的书（参考文献 11-25）之译本。]

11-27. Andrews, E. S., *Elastic Stresses in Structures*, Scott Greenwood and Son, London, 1919 年。[Castigliano 的书（参考文献 11-25）的译本。]

11-28. Castigliano, C. A. P., *The Theory of Equilibrium of Elastic Systems and Its Applications*, 由 E. S. Andrews 翻译，并由 G. A. Oravas 加了新的引言和传记叙述一节，Dover Publications, Inc., New York, 1966 年。（参考文献 11-27 的再版。）

11-29. Castigliano, A., "Intorno ai sistemi elastici," 1873 年为都灵工艺学院土木工程学位提出的论文，由 Vincezo Bona 出版，Turin, 1873 年，52 页。

11-30. Grüning, M., "Theorie der Baukonstruktionen", *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaft*. Leipzing, 第 4 卷，第 4 部分，1907—1914 年，第 419—534 页。

11-31. Kirchhoff, G. R., "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe." *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 第 40 卷，1850 年，第 51—88 页。
[注：在这篇论文中，Kirchhoff 应用了势能驻留值的概念导出了板弯曲时的基本微分方程。在后来一篇论文中（参考文献 6-38），他进一步发展了势能驻留值的概念。关于这位著名科学家的传记材料见参考文献 1-1 的第 252—255 页。]

11-32. Au, T., *Elementary Structural Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963 年，521 页。

11-33. Hoff, N. J., *The Analysis of Structures*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1956 年，493 页。

11-34. Oden, J. T., *Mechanics of Elastic Structures*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1967 年，381 页。

11-35. Ritz, W., "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 第 135 卷，1908 年，第 1—61 页。
[注：Walther Ritz（1878—1909 年）是一位不幸早去世的卓越的瑞士物理学家，他的论文已再次发表于参考文献 11-36 中，该文献还包括有传记。]

11-36. Ritz, W., *Gesammelte Werke*, Gauthier-Villars, Paris, 1911 年，541 页。

11-37. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Structural and Continum Mechanics*, McGraw-Hill Publishing Co., Ltd.,

London. 1967 年,272 页.

11-38. Crotti, F., "Esposizione del Teorema Castigliano e suo raccordo colle teoria dell' elasticità," *Atti del collegio degli Ingegneri ed Architetti in Milano*. 第 11 卷,第 4 辑,第 2 部分,1878 年,第 225 页.(还发表于 *Il Politecnico*. 第 27 卷,1879 年,第 45 页.)[注:Francesco Crotti (1839—1896 年)是一位意大利铁路工程师和 Castigliano 的朋友. 在这篇论文中,他第一次推导出 Crotti-Engesser 定理,虽然他后来关于余能的研究要广泛得多. Crotti 开始于 1877 年所写的一系列论文直到 1888 年的一篇重要论文(参考文献 11-39)为止,阐述了关于余能的全部基本定理和原理 关于 Crotti 的工作在参考文献 1-13 的 922—925 页和 6-24 的 xxv-xxvii 页作了描述. 关于 Crotti 的生平简述材料由 Oravas 写于参考文献 6-24 中第 xliii 页.]

11-39. Crotti, F., *La Teoria dell' elasticita né suoi Principi Fondamentali e nelle sue Applicazioni Pratiche alle Costruzioni*, Ulrico Hoepli, Milan, 1888 年.

11-40. Engesser, F., "Ueber statisch unbestimmte Trager bei beliebigem Formanderungs-Gesetze und über den Satz von der kleinsten Erganzungsarbeit," *Zeitschnift des Architekten-und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 第 35 卷,1889 年, 第 733—744 页 [注:在这篇论文中,Friedrich Engesser (1848—1931 年) 介绍了"余功"一词,并导出了 Crotti-Engesser 定理. 显然他不知道 Crotti 更为一般的方法.见参考文献 1-13 的第 925—926 页和参考文献 6-24 的第 xxvii 页. Engesser 是德国铁路工程师,后来成为 Karlsruhe Polytechnic Institute 的教授. 他对结构力学作出了许多贡献,而以他对柱的非弹性屈曲方面的著作尤为著名. 有关传记材料见参考文献 1-1 的第 297—299 页.]

11-41. Westergaard, H. M., "On the method of complementary energy," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 第 107 卷,1942 年,第 765—793 页.

11-42. Langhaar, H. L., *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1962 年,350 页.

11-43. Argyris, J. H. 和 Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth and Co., Ltd., London, 1960 年, 85 页.

11-44. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York. 1968 年,468 页.

11-45. Charlton, T. M., "Analysis of statically-indeterminate structures by the complementary energy method," *Engineering* 第 174 卷,1952 年,第 389—391 页

11-46. Brown, E. H., "The energy theorems of structural analysis," *Engineering*, 第 179 卷,1955 年,第 305—308,339—342 以及 400—403 页.

11-47. Lihove, C., "Complementary energy method for finite deformations." *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Engineering Mechanics Division. 第 90 卷,第 EM 6 期,1964 年 12 月,第 49—71 页.
11-48. Oran, C., "Complementary energy method for buckling," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Engineering Mechanics Division. 第 93 卷,第 EM 1 期, 1967年 2 月,第 57—75 页.
11-49. Oran, C., "Complementary energy concept for Large deformations," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Journal of the Structural Division. 第 93 卷,第 ST 1 期,1967 年 2 月,第 471—494 页.
11-50. Westergaard, H. M., *Theory of Elasticity and Plasticity*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts. 1952 年,176 页.
11-51. Westergaard, H. M., "One hundred fifty years advance in structural analysis," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 第 94 页,1930 年,第 226—240 页.
11-52. Ménabréa, L. F., "Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques," *Comptes Rendus*, 第 46 卷,1858 年,第 1056—1060 页. [注: 在这篇论文中,Ménabréa 叙述了这样的概念,即桁架中诸杆的赘余力具有使应变能为最小之值,但是他没有正确地证明这个概念,见参考文献 6-24 第 xxii 页. 参考文献 1-13 第 655 页以及参考文献 1-1 第 289 页. Luigi Frederico Ménabréa (1809—1896 年)是意大利的贵族、将军和工程师. 他的传记可从参考文献 6-24 第 xi 页中找到.]

附录A　平面面积的特性

A.1　面积的形心

为了确定面积形心的坐标，让我们采用面积 A 和图 A-1 中所示的坐标系 x,y。面积的单元 dA 的坐标为 x 和 y 亦如图示。藉积分可以求得总的面积 A：

$$A=\int dA \tag{A-1}$$

根据下列方程求出面积形心的距离 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$：

$$\bar{x}=\frac{\int x dA}{\int dA} \qquad \bar{y}=\frac{\int y dA}{\int dA} \tag{A-2 a, b}$$

式中的积分应对整个面积 A 进行。

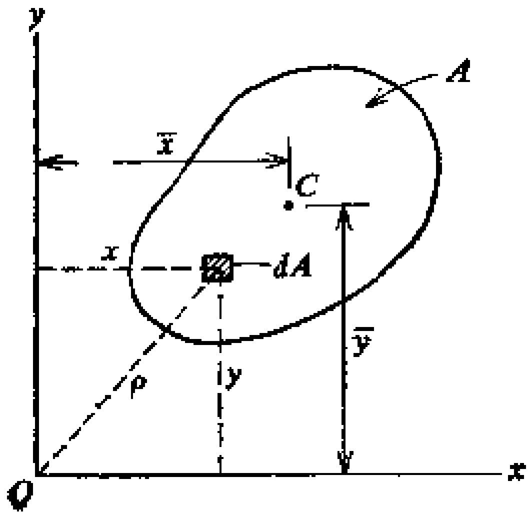


图 A-1 具有形心 C 的平面面积

方程(A-2)的分子称为面积的**一次矩**，以符号 Q 来代表。因而，得

$$Q_x=\int y dA \qquad Q_y=\int x dA \tag{A-3a, b}$$

式中 Q_x 为对 x 轴的一次矩，Q_y 为对 y 轴的一次矩。采用这种表示方

法，我们可以写出形心的坐标方程：

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A} \qquad \bar{y}=\frac{Q_x}{A} \qquad \text{(A-4 a, b)}$$

只要面积的边界线可藉简单的解析表达式定义出来，我们就能用封闭形式对方程(A-1)和(A-3)进行积分，然后应用方程(A-4)确定形心的位置。

有许多情况下，形心的位置可藉观察看出来。例如，倘若面积具有两根对称轴(图 A-2)，那么形心位于对称轴的交点处。倘面积有一根对称轴(图 A-3)时，形心则位于该轴上的某一点上，因而，只需要求一个坐标距来确定 C 的位置. 如果面积对于某一点成对称(即使没有对称轴)，则该点即为其形心(见图 A-4)。

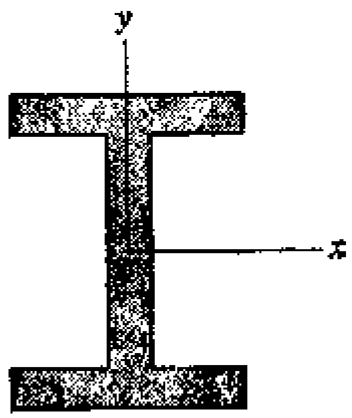


图 A-2

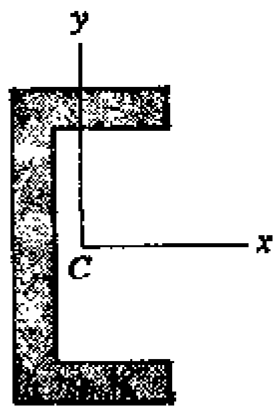


图 A-3

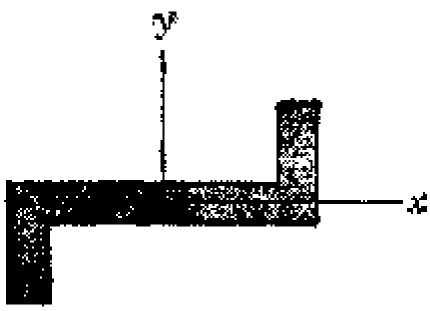


图 A-4

附录 B 中有一个确定各种形状的平面面积形心的表。

如果面积的边界线为不规则的曲线，我们可将面积分成很小的面积单元 ΔA，用总和代替积分：

$$A=\sum \Delta A \quad Q_x=\sum y\Delta A \quad Q_y=\sum x\Delta A \qquad \text{(A-5 a, b, c)}$$

然后将这些按总和所求得的量代入方程(A-4) 得出 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$. 只要面积的单元不要取得太大,这种方式所得的结果就非常接近精确值.

例题 试求图 A-5 所示抛物线的面积 A、面积的一次矩 Q_x 和 Q_y,并确定面积形心 C 的位置. 抛物线的方程为

$$y=f(x)=h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)$$

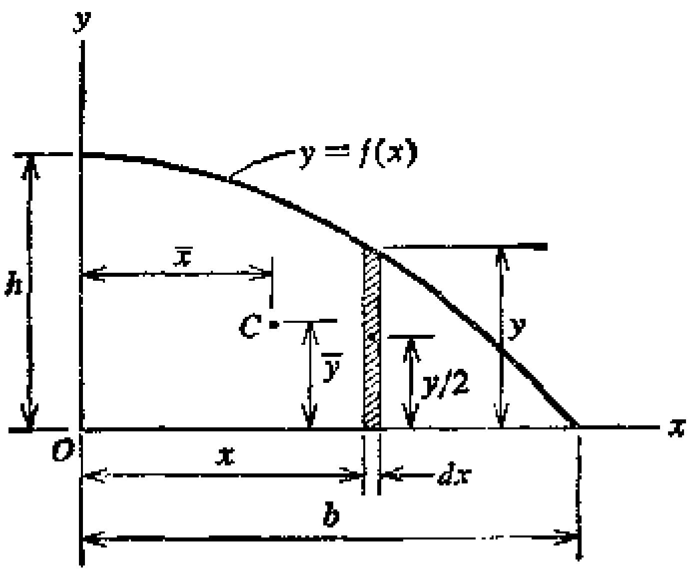


图 A-5 例题

图中阴影所示面积单元 dA 的面积为

$$dA=ydx=h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx$$

总面积为

$$A=\int dA=\int_0^b h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx=\frac{2bh}{3}$$

阴影面积单元的形心坐标为 x 和 $\frac{y}{2}$,所以,面积的一次矩为

$$Q_x=\int \frac{y}{2}\,dA=\int_0^b \frac{h^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)^2 dx=\frac{4bh^2}{15}$$

$$Q_y=\int x\,dA=\int_0^b xh\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx=\frac{b^2h}{4}$$

最后，确定出形心位置如下：

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{3b}{8} \qquad \bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{2h}{5}$$

A.2 组合面积的形心

在工程实践中，我们经常碰到面积由几个部分组成，每一部分均为普通的几何形状，这些形状的面积和形心位置都早已知道了。图 A-2，A-3 和 A-4 表示这种组合面积的例子，其中每一块面积均由矩形构成。在确定这种图形的面积和形心位置时，只须将面积划分成一些适当的部分，然后用总和代替积分。

为了说明这种方法，让我们讨论图 A-6 所示的组合面积。该面积可以划分成两个面积为 A_1 和 A_2、形心为 C_1 和 C_2 的矩形，它们的形心位置假设为已知。分别以 x_1, y_1 和 x_2, y_2 代表 C_1 和 C_2 的坐标，我们则得到该组合面积形心坐标的表达式：

$$\bar{x}=\frac{x_1A_1+x_2A_2}{A_1+A_2} \qquad \bar{y}=\frac{y_1A_1+y_2A_2}{A_1+A_2}$$

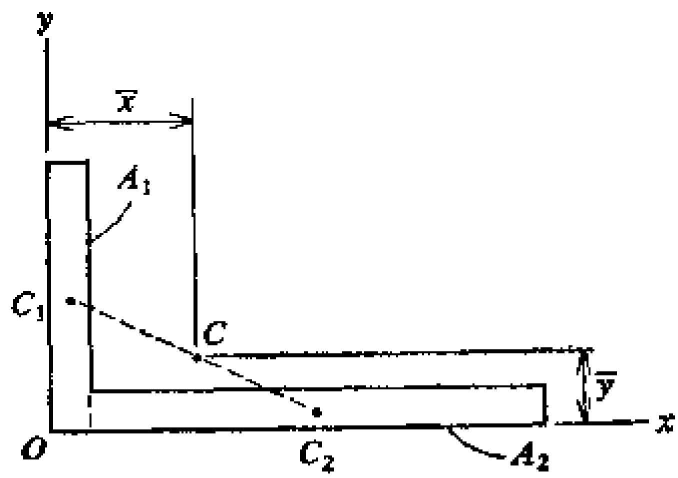


图 A-6 组合面积的形心

从此例推广，我们看出，可以用下列表达式得出组合面积的特性：

$$A=\sum A \qquad Q_x=\sum y_iA_i \qquad Q_y=\sum x_iA_i \qquad \text{(A-6 a, b, c)}$$

式中 A_i 代表形心坐标为 x_i 和 y_i 的分块面积，总和号包括总组合面积内所有这样的面积。不管分块面积的个数有多少，这些方程都是成立的。在面积仅分为两部分的特定情况下，譬如象图 A-6 所示，整个面积的形

心 C 总是位于形心 C_1 和 C_2 的联线上。

例题 某一底宽为 b 和 a、高度为 h 的梯形(图 A-7)，欲求其形心 C 的坐标 $\bar{y}$。

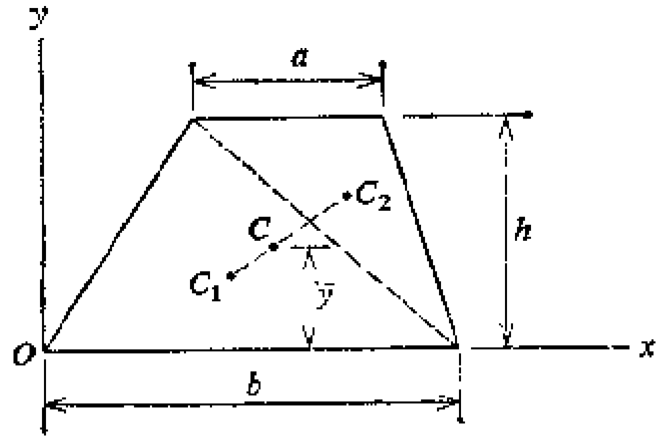


图 A-7 例题

将该梯形划分成两个形心为 C_1 和 C_2 的三角形，我们看出这些形心的坐标 y 分别为

$$y_1=\frac{h}{3} \qquad y_2=\frac{2h}{3}$$

另外，这两个三角形的面积为

$$A_1=\frac{bh}{2} \qquad A_2=\frac{ah}{2}$$

于是，根据方程(A-6)，得出

$$A=\frac{h}{2}(b+a) \qquad Q_x=\frac{h^2}{6}(b+2a)$$

最后，得

$$\bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{h(b+2a)}{3(b+a)}$$

注意：如果 $a=b$，其图形则成为矩形，从上列方程得出 $\bar{y}=\frac{h}{2}$；如果 $a=0$，则得出三角形的情况，其 $\bar{y}=\frac{h}{3}$。

A.3 面积的惯性矩

平面面积(见图 A-1)对 x 轴和 y 轴的惯性矩分别用积分定义为：

$$I_x=\int y^2 dA \qquad I_y=\int x^2 dA \qquad \text{(A-7 a, b)}$$

式中为面积的单元 dA 与距相应轴之距离的平方相乘，并对整个面积 A 进行积分。有时惯性矩称为面积的二次矩。

在少数简单情况下，惯性矩可用解析计算求得。例如象矩形的情况(图 A-8)。在计算其对 x 轴的惯性矩时，x 轴为通过形心的一根对称轴，我们可将该矩形划分成许多象图中用阴影面积所示的无穷小之单元。于是，我们得到 $dA=bdy$ 和

$$I_x=\int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy=\frac{bh^3}{12} \qquad \text{(A-8)}$$

采取同样方式，我们将看出矩形面积对 y 轴的惯性矩 $I_y=\dfrac{hb^3}{12}$。

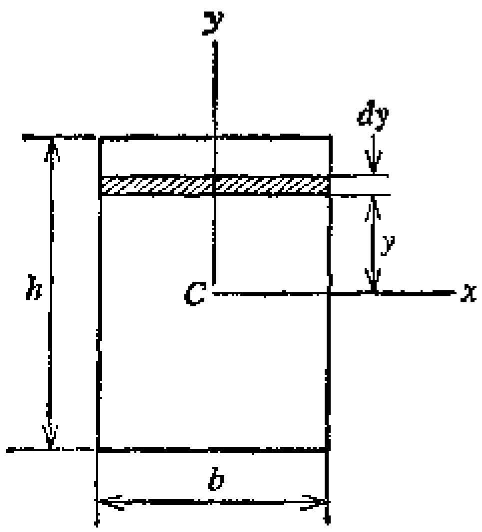


图 A-8

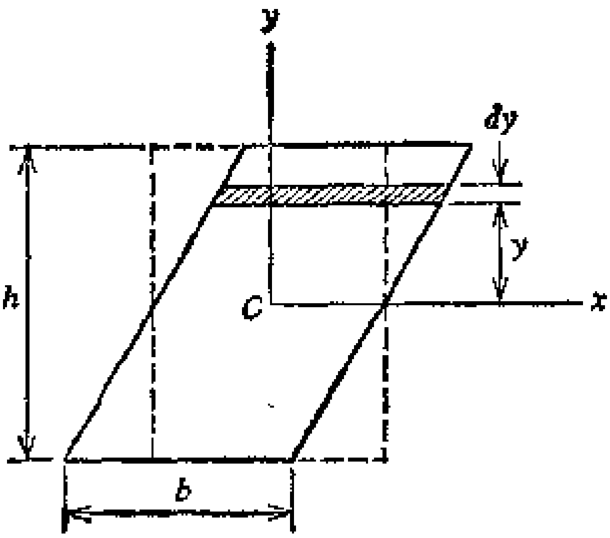


图 A-9

方程(A-8)也可用于计算图 A-9 所示的平行四边形的 I_x。该平行四边形可藉将图中阴影所示单元平行 x 轴移动到虚线所示的矩形来求得，在移动过程中该单元的面积和距 x 轴的距离保持不变，因而其 I_x 与矩形的相同。

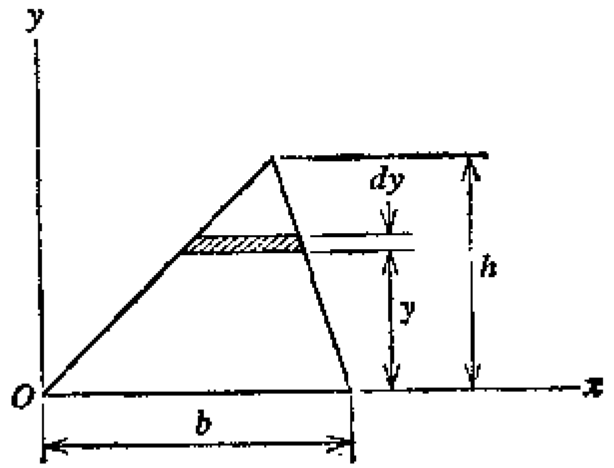


图 A-10

在求算三角形对底边的惯性矩时(图 A-10)，我们还是将面积分成薄的单元。单元的面积为

$$dA=\frac{b(h-y)dy}{h}$$

由方程 (A-7a)得出：

$$I_x=\int_0^h\frac{b(h-y)}{h}y^2dy=\frac{bh^3}{12} \tag{A-9}$$

用上面例子所说明的求算方法从理论上说是可以用于普遍情况的。其惯性矩藉将面积分成平行其坐标轴为无穷小的窄条，然后进行积来求得。如果其积分不易分析出来，则将面积分成有限个窄条，用每一窄条的面积乘它距坐标轴的距离之平方，然后将所得的这种乘积加起来，总是可以得到惯性矩的近似值。

通常遇到的一些面积惯性矩已列于附录 B 中，可供参考。

倘若面积可以分成具有已知惯性矩的若干部分，那么对某一坐标轴的惯性矩的求算往往可以得以简化。图 A-11a 所示槽形截面就是一个例子。对于通过形心 C 的对称轴 x 的惯性矩是为两个矩形面积惯性矩之差，所以

$$I_x=\frac{bh^3}{12}-\frac{b_1h_1^3}{12}$$

这个公式显然可以用于图 A-11 b 所示的 Z 形截面和图 A-11 c 所示的空心箱形截面。

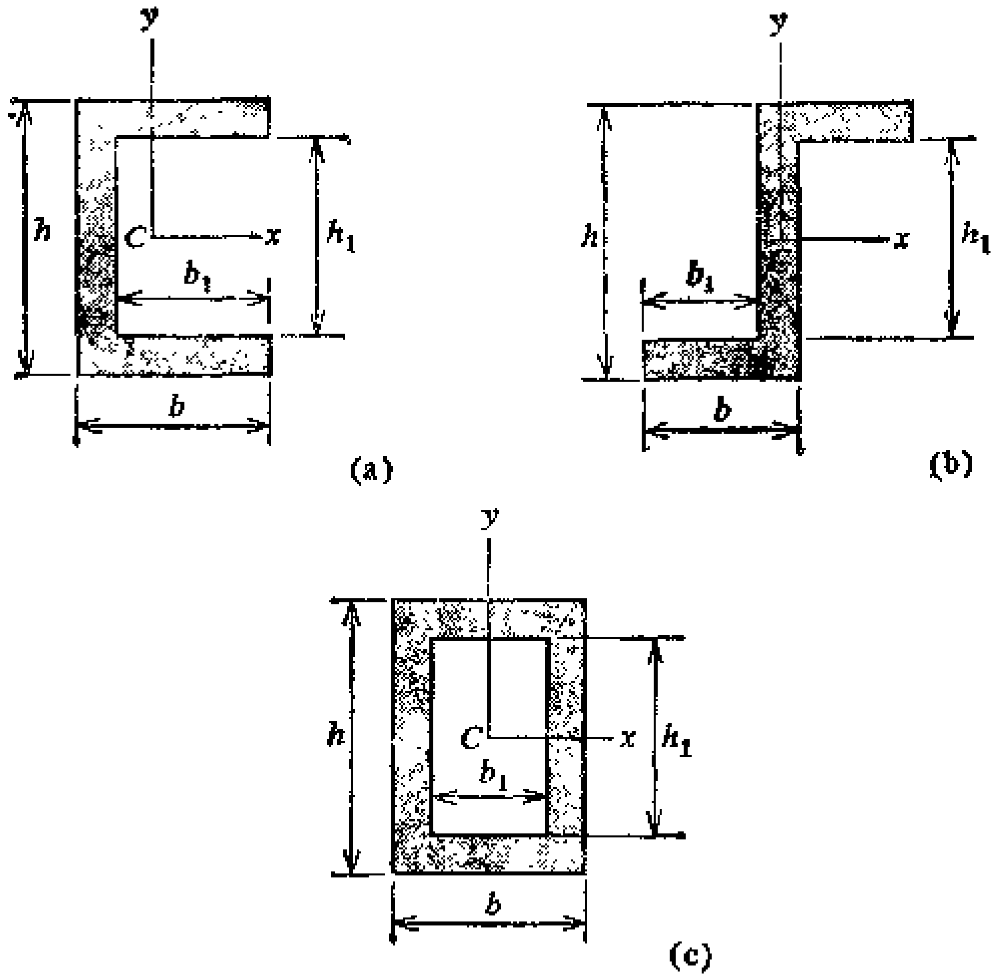


图 A-11

根据惯性矩的定义(方程 A-7),我们看出，它的量纲是为长度的四次方。因此,当面积的惯性矩被面积本身去除，则所得的量纲为长度的二次方。这除得的量之平方根称为面积的**回转半径**。因而应用符号 r 作为回转半径，我们得

$$r_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad \text{(A-10 a, b)}$$

式中的 r_x 和 r_y 分别代表对 x 轴和对 y 轴的回转半径。

A.4 极惯性矩

平面面积对垂直于该面积平面的轴线之惯性矩称为**极惯性矩**。它定义为下列积分式：

$$J = \int \rho^2 dA \tag{A-11}$$

式中为每一面积的单元 dA(见图 A-1)乘以它距 O 点的距离 ρ 之平方，O 为轴线与平面的交点. 方程(A-11) 中的积分系对整个面积来进行.

参照图 A-1,注意 $\rho^2 = x^2 + y^2$,所以根据方程(A-11),我们得出:

$$J = \int (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \tag{A-12}$$

此方程说明，对任一点 O 的极惯性矩等于对通过该点两互相垂直的 x 轴和 y 轴的惯性矩之和.

现在让我们讨论圆对其圆心的极惯性矩之计算(图 A-12). 如果我们将圆的面积划分出半径为 ρ、厚度为 $d\rho$ 的单元圆环，我们看出该圆环的面积 $dA = 2\pi\rho d\rho$. 按定义,它对中心的极惯性矩为 $2\pi\rho^3 d\rho$. 为了得出整个圆面积的极惯性矩,我们只要对整个面积进行积分，便得到:

$$J = \int_0^{d/2} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2} \tag{A-13}$$

式中 d 为圆的直径,r 为圆的半径.

得到了圆对其中心的极惯性矩，我们便容易求出它对直径的惯性矩. 因为对所有直径的惯性矩都相同,根据方程(A-12)看出:

$$I_x = I_y = \frac{J}{2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} \tag{A-14}$$

四分之一圆的极惯性矩(图 A-13 中的面积 OAB) 为整圆极惯性矩

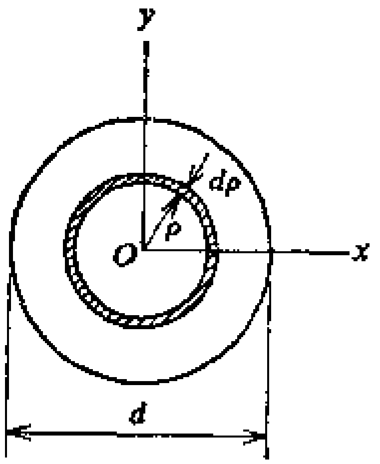


图 A-12

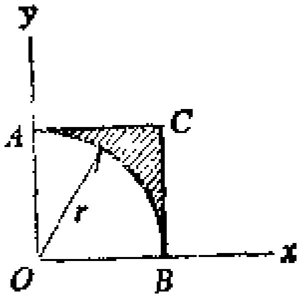


图 A-13

的四分之一，即 $\pi r^4/8$，所以，四分之一圆对 x 轴和对 y 轴的惯性矩为

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$$

另外，让我们讨论图 A-13 中的阴影所示圆以上的空间部分 ACB。它对 x 轴(或对 y 轴)的惯性矩可用方形 $OACB$ 的惯性矩减去四分之一圆的惯性矩来求得。这样

$$I_x = I_y = \frac{r^4}{3} - \frac{\pi r^4}{16} = \frac{r^4}{48}(16-3\pi) = 0.137\,r^4$$

圆以上的空间部分对 O 点之极惯性矩为 I_x 或 I_y 的两倍。

椭圆对形心主轴 x 的惯性矩(图A-14)可藉椭圆与图中虚线所示的圆进行比较来求得。椭圆中任一单元的高度 y，见图中所示阴影部分，

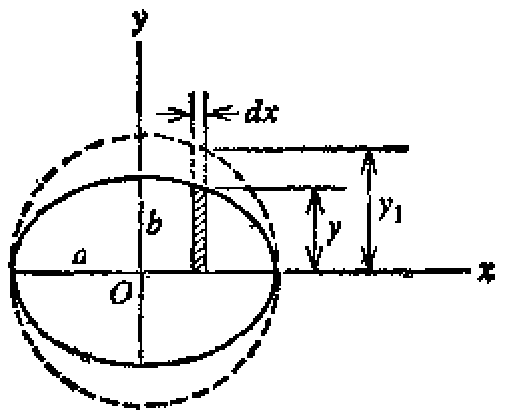


图 A-14

可以用圆的相应单元之高度 y_1 按比值 $\frac{b}{a}$ 折算来得到，这里的 a 和 b 为椭圆的半轴长度．根据方程(A-8)，这两个单元对 x 轴的惯性矩之比值为 b^3/a^3。椭圆的惯性矩与圆的惯性矩显然存在同样的比值．因此，椭圆的惯性矩为

$$I_x = \frac{\pi a^4}{4}\left(\frac{b^3}{a^3}\right) = \frac{\pi ab^3}{4} \tag{A-15a}$$

用同样的方式，得到对 y 轴时的椭圆惯性矩：

$$I_y = \frac{\pi ba^3}{4} \tag{A-15 b}$$

最后，椭圆对其形心 O 的极惯性矩为

$$J = I_x + I_y = \frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2) \tag{A-16}$$

A.5 平行轴定理

面积对其平面内的某一轴线的惯性矩，藉平行轴定理使之与平行且通过形心的轴线之惯性矩联系起来。为了得到此定理，让我们来讨论图 A-15中所示的面积。假设 C 点为该面积的形心，还假设 x_c 轴和 y_c 轴通过形心。x 轴和 y 轴平行于 x_c 轴和 y_c 轴，它们的原点位于任一点 O 处。于是，根据定义，该面积对 x 轴的惯性矩为：

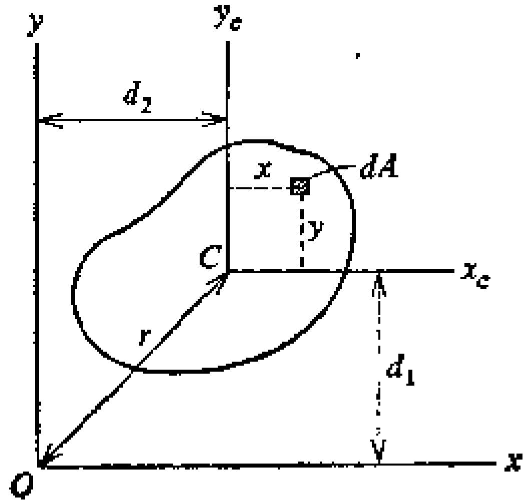


图 A-15 平行轴定理

$$I_x=\int(y+d_1)^2dA=\int y^2dA+2d_1\int ydA+d_1^2\int dA$$

右边第一个积分为绕 x_c 轴的惯性矩 I_{x_c}；第二个积分为零，因为 x_c 轴通过形心；第三个积分为图形的面积。所以，上列方程简化为

$$I_x=I_{x_c}+Ad_1^2 \tag{A-17a}$$

按同样的方法，可表示出

$$I_y=I_{y_c}+Ad_2^2 \tag{A-17b}$$

方程(A-17)表示惯性矩的平行轴定理。它们说明：面积对其平面内任一轴的惯性矩等于对平行形心轴的惯性矩加上面积与两轴之间距离平方之乘积。

根据方程(A-17)将 I_x 和 I_y 相加，注意到 $r^2=d_1^2+d_2^2$（见图A-

15)，我们得出

$$I_x+I_y=I_{x_c}+I_{y_c}+A(d_1^2+d_2^2)$$

或

$$J_0=J_c+Ar^2 \qquad \text{(A-18)}$$

此方程给出了极惯性矩的平行轴定理：面积对其平面内任一点 O 的极惯性矩，等于对形心 C 的极惯性矩加面积与 O 和 C 之间距离平方的乘积。

应用平行轴定理，我们往往可以很容易计算平面图形的惯性矩。例如，矩形(图 A-8)对底边的惯性矩为

$$I_{底}=\frac{bh^3}{12}+bh\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{bh^3}{3}$$

类似地，圆对其切线的惯性矩为

$$I_t=\frac{\pi d^4}{64}+\frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{5\pi d^4}{64}$$

圆对其周边上一点的极惯性矩为

$$J=\frac{\pi d^4}{32}+\frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{3\pi d^4}{32}$$

对于三角形(图 A-10)，我们早已得到对其底边的惯性矩(见方程 A-9)，然后藉平行轴定理可以求出对平行于底边的形心轴的惯性矩：

$$I_{x_c}=\frac{bh^3}{12}-\frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2=\frac{bh^3}{36}$$

在确定如图 A-6 和 A-11 所示组合面积的惯性矩时，平行轴定理是特别有用的。假设图 A-11b 中的面积的形心的位置已确定，欲求对形心轴的惯性矩 I_x。我们可将总面积划分成三个矩形。然后，每一个矩形的形心可藉观察确定其位置，对通过形心而平行于 x 轴的惯性矩，可以用方程(A-8)容易地求得。这样，可以用平行轴定理来计算每一个矩形绕 x 轴的惯性矩。将这些惯性矩加起来便得出整个面积的 I_x。

A.6 惯性积

平面面积对 x 轴和 y 轴的惯性积(见图 A-1) 用下列积分式来定义：

$$I_{xy}=\int xy\,dA \qquad \text{(A-19)}$$

式中表示面积单元 dA 与两个坐标之乘积相乘，并对整个面积进行积分。虽然惯性矩总是正值，但是我们从方程(A-19)看出：惯性积却可以为正，也可以为负或为零，它随 x, y 轴与面积的相对位置而定。如果面积全部位于坐标轴的第一象限内，象图 A-1 那样，那么惯性积为正，因为面积中所有单元面积 dA 具有正的 x 坐标和正的 y 坐标。如果面积位于第二象限内，惯性积则为负，因为所有单元面积具有正的 y 坐标，但其 x 坐标是负的。类似地，面积在第三和第四象限内时，将分别为正的惯性积和负的惯性积。当面积位于一个以上的象限内，惯性积的正负号则随面积在诸象限的分布情况而定。

当坐标轴之一为面积的对称轴时，将出现一种特殊情况。以图 A-16 来说明。该图中的 y 轴为一对称轴，对应于每一个具有一定正 x 坐标的单元面积 dA，存在一个相等而对称布置的单元面积 dA，它具有相同的 y 坐标，但有一个为负值的 x 坐标。因而，乘积 $xydA$ 互相消去，图 A-16 中的积分成为零。于是，我们得出结论：对于坐标轴之一为对称轴的面积，对其坐标轴的惯性积为零。参见图 A-11 a 和 c，我们观察到：图中这两个面积对 xy 轴的惯性积为零。然而，这个结论对于图 A-11 b中的面积是不适用的。

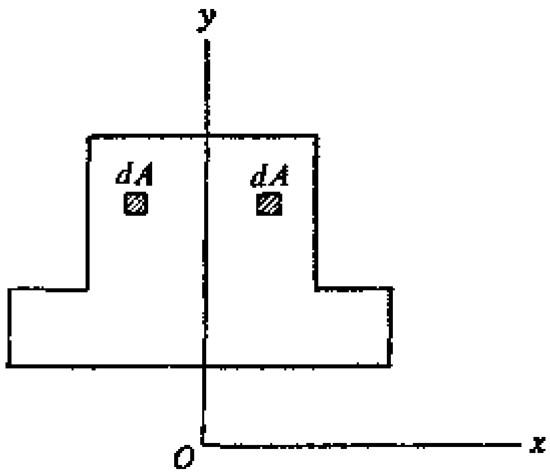


图 A-16

现在让我们假设对于一对形心轴的惯性积 $I_{x_c y_c}$ 为已知，如对图 A-15 中所示 $x_c y_c$ 轴的惯性积为已知，那么对于平行的 x, y 轴系的惯性积可求得如下：

$$I_{xy}=\int(x+d_2)(y+d_1)dA$$
$$=\int xydA+d_1\int xdA+d_2\int ydA+d_1d_2\int dA$$

上列表达式中的第一个积分为对形心轴的惯性积 $I_{x_c y_c}$；第二个和第三

个积分为零，因为其轴通过形心；最后一个积分为其面积．所以，上列表达式可简化为

$$I_{xy}=I_{x_cy_c}+Ad_1d_2 \tag{A-20}$$

式中的 d_1 和 d_2 为形心对 x, y 轴的坐标。方程(A-20)为惯性积的平行轴定理。

为了给平行轴定理作一个应用例子，让我们来确定矩形对通过一个角的轴线之惯性积（见图 A-17）。由于是对称的，所以知道对形心轴 x_c, y_c 的惯性积为零，从而对 x, y 轴的惯性积为

$$I_{xy}=bh\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{b^2h^2}{4} \tag{A-21}$$

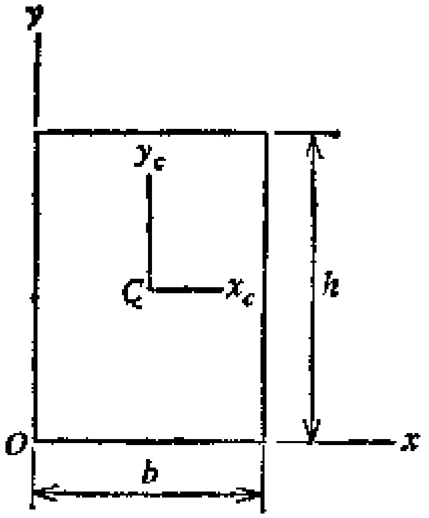


图 A-17

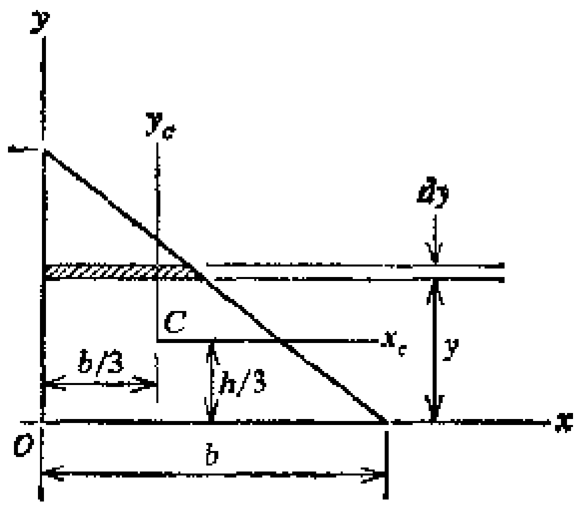


图 A-18

对于底边为 b、高度为 h 的直角三角形(图 A-18)，我们从讨论阴影单元着手。该单元为一厚度等于 dy 的薄矩形，其宽度为：

$$\frac{(h-y)b}{h}$$

由于对称，该单元对其自身形心的惯性积为零．所以，按平行轴定理，我们得出该单元对 x 轴和 y 轴的惯性积：

$$\left[\frac{(h-y)bdy}{h}\right][y]\left[\frac{(h-y)b}{2h}\right]=\frac{b^2}{2h^2}(h-y)^2ydy$$

现在藉积分得出整个三角形的惯性积为：

$$I_{xy}=\frac{b^2}{2h^2}\int_0^h(h-y)^2ydy=\frac{b^2h^2}{24} \tag{A-22}$$

知道对 x, y 轴的惯性积后，我们便容易确定对其平行的形心轴之惯性积(见图 A-18)：

$$I_{x_cy_c}=I_{xy}-Ad_1d_2=\frac{b^2h^2}{24}-\frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)=-\frac{b^2h^2}{72} \qquad \text{(A-23)}$$

A.7 轴的旋转

假设某一平面面积(图 A-19)的惯性矩和惯性积

$$I_x=\int y^2dA \quad I_y=\int x^2dA \qquad I_{xy}=\int xydA \qquad \text{(a)}$$

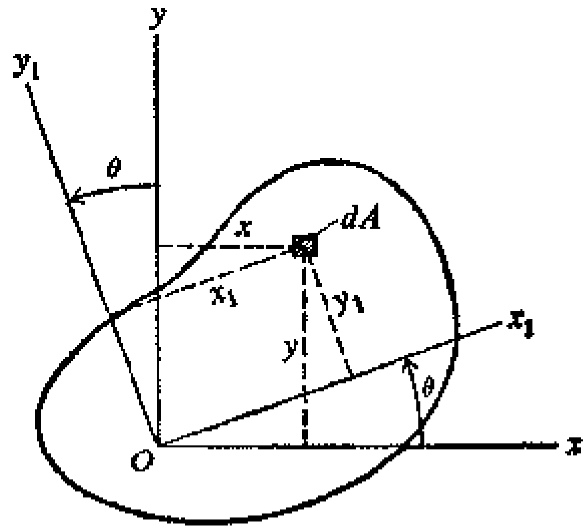


图 A-19 轴的旋转

为已知，还假设欲求对图示转动后的 x_1, y_1 轴的 I_{x_1}, I_{y_1} 和 $I_{x_1y_1}$ 诸量。我们看出对于在原来轴的坐标系中坐标为 x, y 的面积单元 dA，在转动后坐标系中的坐标为：

$$x_1=x\cos\theta+y\sin\theta \qquad y_1=y\cos\theta-x\sin\theta$$

式中 θ 为诸轴之间的旋转角。于是，惯性矩 I_{x_1} 为

$$I_{x_1}=\int y_1^2dA=\int(y\cos\theta-x\sin\theta)^2dA$$

$$=\cos^2\theta\int y^2dA+\sin^2\theta\int x^2dA-2\sin\theta\cos\theta\int xydA$$

或藉应用方程(a)，

$$I_{x_1}=I_x\cos^2\theta+I_y\sin^2\theta-2I_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad \text{(A-24a)}$$

代人三角恒等式 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$，$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ 以及

$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$，上列方程则为

$$I_{x_1}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta-I_{xy}\sin 2\theta \qquad \text{(A-24b)}$$

用同样的方式，我们可以得到惯性矩 I_{y_1}：

$$I_{y_1}=I_x\sin^2\theta+I_y\cos^2\theta+2I_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad \text{(A-25a)}$$

或

$$I_{y_1}=\frac{I_x+I_y}{2}-\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta+I_{xy}\sin 2\theta \qquad \text{(A-25b)}$$

方程(A-24)和(A-25)表达以对原来轴的惯性矩和惯性积表示对转动后的轴之惯性矩。

取 I_{x_1} 和 I_{y_1} 之和，得出

$$I_{x_1}+I_{y_1}=I_x+I_y \qquad \text{(A-26)}$$

此方程表明：当两轴绕原点旋转后，对于这两轴的惯性矩之和保持为常数。自然，此和为面积对同一原点的极惯性矩。

对于转动后的轴的惯性积为

$$I_{x_1y_1}=\int x_1y_1dA=\int(x\cos\theta+y\sin\theta)(y\cos\theta-x\sin\theta)dA$$

或

$$I_{x_1y_1}=I_x\sin\theta\cos\theta-I_y\sin\theta\cos\theta+I_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \quad \text{(A-27a)}$$

采用三角置换，得到

$$I_{x_1y_1}=\frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta+I_{xy}\cos 2\theta \qquad \text{(A-27b)}$$

根据这个方程，我们可以计算对任一组转动后的轴的惯性积。

观察惯性积随 θ 角的变化是有趣的。如果 $\theta=0$，根据方程(A-27b)，则得 $I_{x_1y_1}=I_{xy}$，这是预料到的。如果 $\theta=90°$，该方程得出 $I_{x_1y_1}=-I_{xy}$。这样，在旋转 90°时，惯性积改变其正负号。由于惯性积随 θ 连续变化，这里必定有在轴为某一方向时，其惯性积为零。这样的轴称为面积的**主轴**。如果坐标原点位于面积形心处，主轴则称为**形心主轴**。

上节中已说明，当一对轴中的一根轴为对称轴时，对这一对轴的

惯性积则为零. 因此得出：如果面积具有对称轴，则该轴与任一根与它垂直的轴，构成一组主轴.

面积惯性矩中轴的转动方程与平面应力中轴的转动方程之间完全对应(见第 2.5 节)。如果，在平面应力方程中，我们分别用 $I_x, I_y, -I_{xy}, I_{x_1}$ 和 $I_{x_1y_1}$ 代替 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_\theta$ 和 τ_θ，则方程完全变成与上面所得的惯性矩方程相同. 所以，在其中一种情况下得到的所有一般结论可以转换到另一种情况. 例如，我们可以采用莫尔圆去求绕转动后的轴之惯性矩和主惯性矩。

A.8 主轴

在上节中我们已经定义主轴是对它们的惯性积为零的轴系。因此，为了确定这些轴的位置，我们令方程(A-27b)中的 $I_{x_1y_1}$ 等于零，然后对 θ 进行求解，得到

$$\tan 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \tag{A-28}$$

符号 θ_p 用以表示确定主轴的 θ 角. 根据方程(A-28)，我们得出两个 $2\theta_p$ 值，这两个值相差一个 π。相应于 θ_p 的两个值，彼此相差 $\frac{\pi}{2}$，这样便确定了主轴的正交方向.

我们还可以弄清使惯性矩为最大或最小的 θ 值. 参见方程(A-24)，我们看出 I_{x_1} 的大小随着 θ 角的改变而连续地变化. 为了求出使 I_{x_1} 为最大或最小的 θ 值，我们求方程(A-24b)的右边表达式对 θ 的导数，并令它等于零。

$$(I_y - I_x)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

将此方程对 θ 求解，得到与方程(A-28)所得的相同结果. 另外，如果我们应用方程(A-25b)，求出 I_{y_1} 的最大值和最小值，也得到同样的方程. 因此可以得到结论：主轴是对它们的惯性矩为最大值和最小值的轴.

归纳起来，我们注意下列有关主轴的观察结果：(1) 主轴是由 θ_p 角定向的一对互成正交的轴(方程 A-28)；(2) 对于主轴的惯性积等于零；(3) 对其中一根主轴的惯性矩具有最大值，而对另一根主轴的惯性矩为其有最小值；(4) 对称轴总是主轴.

为了得到主惯性矩的表达式，只需将方程(A-28)所得的 θ_p 值代入

方程(A-24 b)。根据方程(A-28)，考虑：

$$\sin 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y-I_x)^2+4I_{xy}^2}} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2}}$$

和

$$\cos 2\theta_p = \frac{\frac{I_y-I_x}{2}}{\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2}}$$

现在我们将这些式子代入方程(A-24 b)，因而得到

$$I_{1,2} = \frac{I_x+I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2} \tag{A-29}$$

此方程中的 I_1 代表两个主惯性矩中的较大者，I_2 代表较小者。

对主轴的回转半径(见方程 A-10)称为主回转半径。自然，它们是回转半径中的最大值和最小值。

现在用例子来说明确定主轴位置和计算主惯性矩的方法。

例题 试确定图 A-20 中所示 Z 形截面的主轴方向和主惯性矩的大小。坐标原点设于面积形心 C 处。假设下列数据：$h=16$ 吋，$b=7$ 吋，$t=1.1$ 吋。

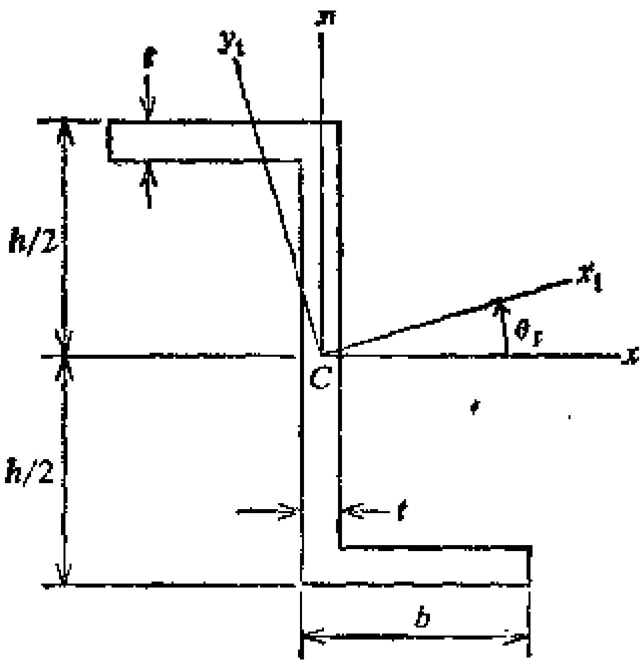


图 A-20

将 Z 形截面面积划分成三个矩形，并应用平行轴定理，我们便容易地计算出对通过形心的 x, y 轴的惯性矩和惯性积：

$$I_x = 1097 \text{ 吋}^4, \quad I_y = 198 \text{ 吋}^4, \quad I_{xy} = -338 \text{ 吋}^4$$

将这些值代入方程(A-28)，我们求得

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = 0.753 \quad 2\theta_p = 37° \text{ 和 } 217°$$

因此，θ_p 的两个值为 18°30′和 108°30′。将这些值中的第一个值代入方程(A-24 b)，我们得到 $I_{x_1} = 1210$ 吋^4；将第二个值代入该方程，我们得到 $I_{x_1} = 85$ 吋^4。根据方程(A-29)得出惯性矩的两个同样值。因此，我们看到主惯性矩为

$$I_1 = 1210 \text{ 吋}^4 \qquad I_2 = 85 \text{ 吋}^4$$

较大的惯性矩 I_1 是对转过 $\theta_p = 18°30'$ 角的轴的惯性矩，而其较小者是对转过 $\theta_p = 108°30'$角的轴的惯性矩。

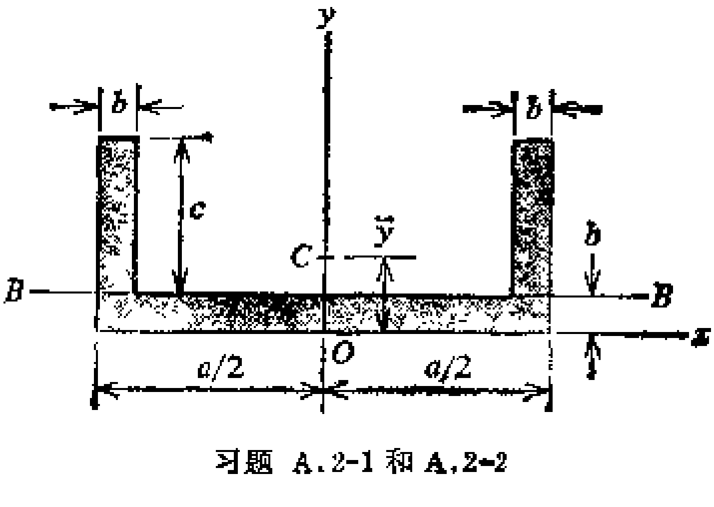
习　题

A.1-1　试证明附录 B 中第 8 种情况所给确定半圆面积形心距离 $\bar{y}$ 的公式。

A.1-2　试证明附录 B 中第 11 种情况所给抛物线以上空间面积 A 和其形心坐标 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 的公式。

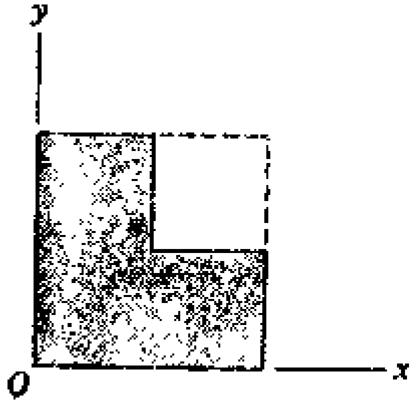
A.2-1　试确定图示槽形截面形心 C 的位置。假设 $a=6$ 吋，$b=1$ 吋，$c=2$ 吋。

A.2-2　试问使图示槽形截面形心 C 位于 BB 线上时其尺寸 a、b 和 c 之间应该成为什么样的关系？



习题 A.2-1 和 A.2-2

A.2-3　试问将边长为 a 的方形的四分之一去掉（见图）后剩下面积的形心坐标是多少？



习题 A.2-3

A.2-4　图 A-6 所示角形截面的尺寸：对 A_1 为 4 吋×0.5 吋，A_2 为 5.5 吋×0.5 吋。试求其形心 c 的坐标 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$。

A.3-1　试求图 A-8 中的矩形对其底边的惯性矩。

A.3-2　试求图 A-10 中的三角形对通过该三角形顶点且平行 x 轴的惯性矩。

A.3-3　试确定边长为 a 的正方形对其对角线的惯性矩。

A.3-4　试求图 A-7 所示梯形对 x 轴的惯性矩。

A.3-5　试确定边长为 a 和 b 的矩形对其对角线的惯性矩。

A.3-6　试求图 A-8 中矩形的回转半径 r_x 和 r_y。

A.4-1　试求图 A-8 所示矩形对其形心的极惯性矩。

A.4-2　试求底为 b、高为 h 的等腰三角形对其顶点的极惯性矩。

A.4-3　试确定边为 a 和 b 的矩形对一角点的极惯性矩。

A.5-1　试确定图 A-7 中梯形对通过形心平行于 x 的轴之惯性矩。

A.5-2　参见图 A-14 中的椭圆，试求它对位于主直径端点处一点之极惯性矩。

A.5-3　试求图 A-11c 所示空心箱形截面对通过其底边的轴线之惯性矩。假设 $b=h$ 和 $b_1=h_1$。

A.5-4　　试求截面 W 12×106(见附录 C 表 C-1)对其底边的惯性矩。

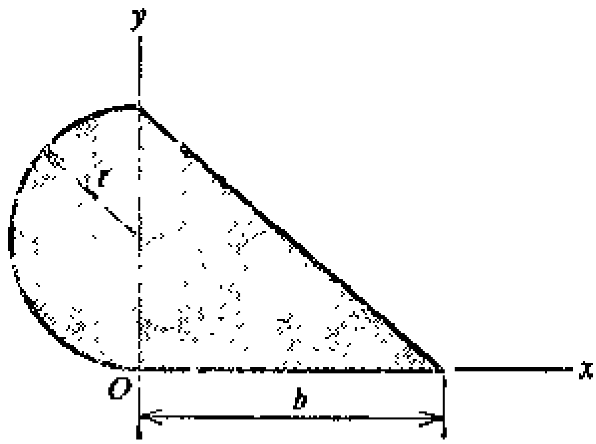
A.5-5　　试求 $4\times4\times\frac{3}{4}$ 角形截面(见附录 C 表 C-4)对角的一肢背面轴线之惯性矩。

A.6-1　　试求图 A-13 所示四分之一圆的惯性积 I_{xy} 之公式。

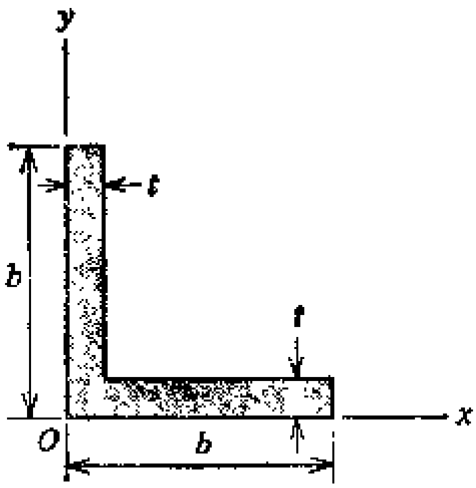
A.6-2　　试算图 A-13 中用阴影所示圆以上部分的惯性组积 I_{xy}。

A.6-3　　试求使图示组合面积的惯性矩为零时 r 与 b 的关系。

A.6-4　　试确定图示角截面的惯性积 I_{xy}，假设 $b=4$ 吋，$t=1$ 吋。



习题 A.6-3



习题 A.6-4

A.6-5　　试确定 6×6×1 吋角形截面(见附录 C 表 C-4)对 1-1 轴和 2-2 轴的惯性积 I_{12}。

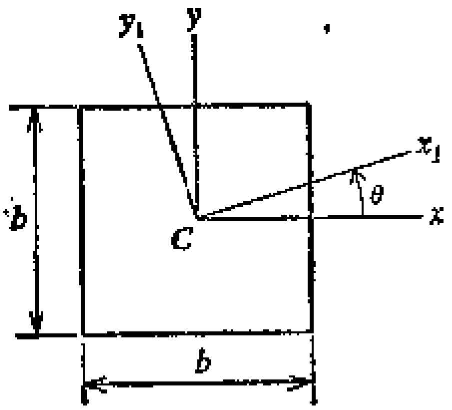
A.7-1　　试确定图示正方形的惯性积 $I_{x_1y_1}$ 和惯性矩 I_{x_1} 和 I_{y_1}。

A.7-2　　有一边长为 a 和 b 的矩形示于图中，试用转轴方程求绕 x_1y_1 轴的惯性矩和惯性积(注意 x_1 轴为矩形的对角线)。

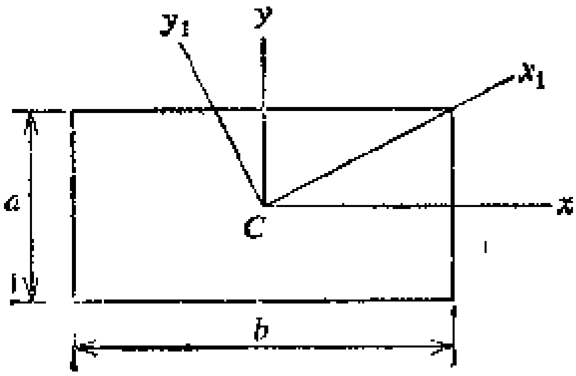
A.8-1　　试确定图 A-18 所示直角三角形上通过 O 点的主轴位置，并计算相应的主惯性矩。假设 $b=6$ 吋，$h=8$ 吋。

A.8-2　　试确定通过角形截面(见图)O 点的主轴位置，并求其相应的主惯性矩。假设 $a=4$ 吋，$b=6$ 吋，$t=1$ 吋。

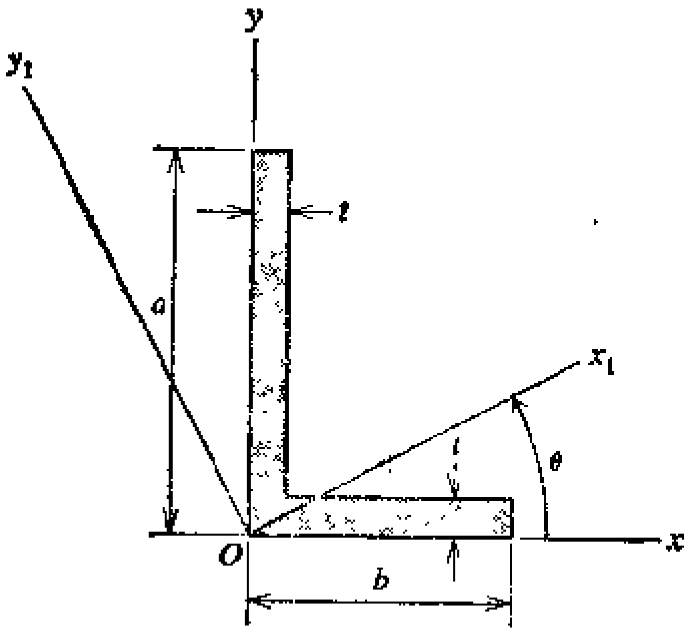
A.8-3　　试确定角形截面(见图)通过形心的主轴位置，并确定



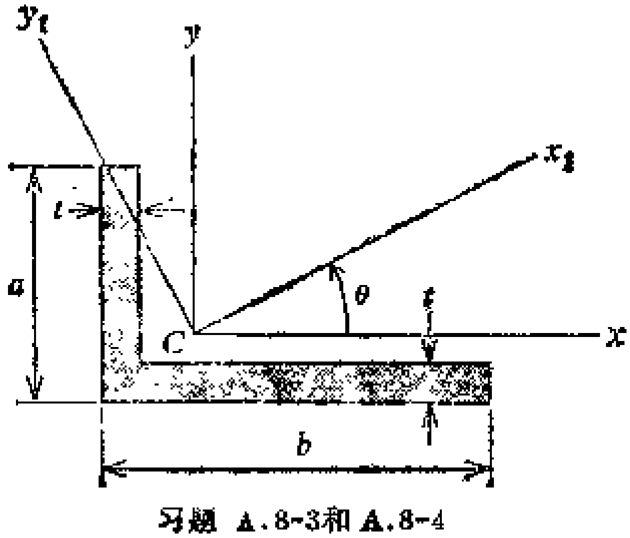
习题 A.7-1



习题 A.7-2



习题 A.8-2



习题 A.8-3和 A.8-4

其相应的主惯性矩。假设 $a=4$ 吋，$b=6$ 吋，$t=1$ 吋。

A.8-4　试确定角形截面(见图)形心主轴的方向，并确定其相应的惯性矩。假设 $a=2.5$ 吋，$b=5$ 吋，$t=0.5$ 吋。

A.8-5　试求图 A-20 所示 Z 形截面形心主轴的方向，并确定其相应惯性矩。假设 $h=10$ 吋，$b=5$ 吋，$t=1$ 吋。

A.8-6　求解上题，但假设 $h=5$ 吋，$b=3.25$ 吋，$t=0.5$ 吋。

附录 B　平面面积的特性

符号：

$\bar{x}, \bar{y}$ = 至形心 C 的距离

A = 面积

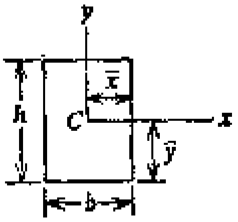
I_x, I_y = 对 x, y 轴的惯性矩

I_{xy} = 对 x, y 轴的惯性积

$J = I_x + I_y$ = 极惯性矩

I_{BB} = 对 B-B 轴的惯性矩

1.



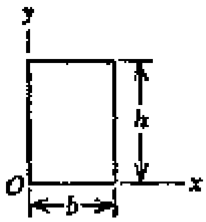
矩形　（坐标轴原点位于形心处。）

$A = bh \qquad \bar{x} = \dfrac{b}{2} \qquad \bar{y} = \dfrac{h}{2}$

$I_x = \dfrac{bh^3}{12} \qquad I_y = \dfrac{hb^3}{12}$

$I_{xy} = 0 \qquad J = \dfrac{bh}{12}(h^2 + b^2)$

2.

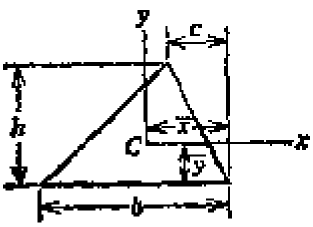


矩形．（坐标轴原点位于角点处．）

$I_x = \dfrac{bh^3}{3} \qquad I_y = \dfrac{hb^3}{3}$

$I_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{4} \qquad J = \dfrac{bh}{3}(h^2 + b^2)$

3.



三角形．（坐标轴原点位于形心处．）

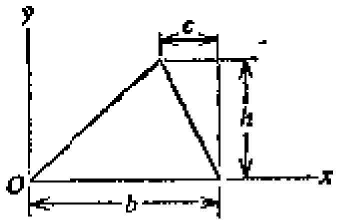
$A = \dfrac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \dfrac{b+c}{3} \qquad \bar{y} = \dfrac{h}{3}$

$I_x = \dfrac{bh^3}{36} \qquad I_y = \dfrac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$

$I_{xy} = \dfrac{bh^2}{72}(b - 2c)$

$J = \dfrac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$

4



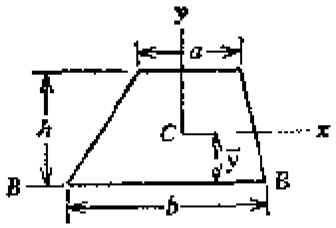
三角形.（坐标轴原点位于角点处。）

$$I_x=\frac{bh^3}{12}\quad I_y=\frac{bh}{12}(3b^2-3bc+c^2)$$

$$I_{xy}=\frac{bh^2}{24}(3b-2c)$$

$$J=\frac{bh}{12}(h^2+3b^2-3bc+c^2)$$

5.



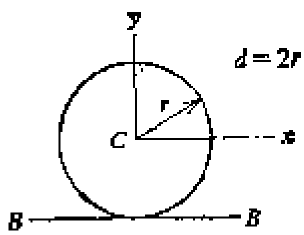
梯形.（坐标轴原点位于形心处。）

$$A=\frac{h(a+b)}{2}\qquad \bar{y}=\frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_x=\frac{h^3(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$$

$$I_{BB}=\frac{h^3(3a+b)}{12}$$

6.



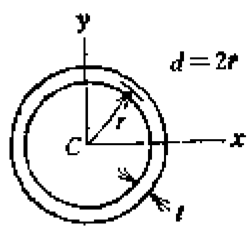
圆.（坐标轴原点位于中心处。）

$$A=\pi r^2=\frac{\pi d^2}{4}\quad I_x=I_y=\frac{\pi r^4}{4}=\frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{xy}=0\qquad J=\frac{\pi r^4}{2}=\frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_{BB}=\frac{5\pi r^4}{4}=\frac{5\pi d^4}{64}$$

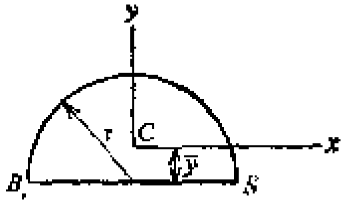
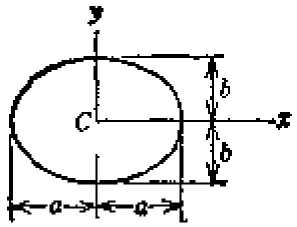
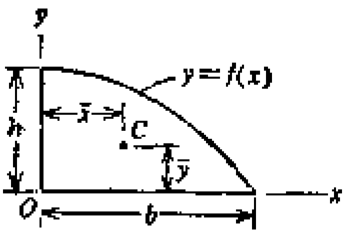
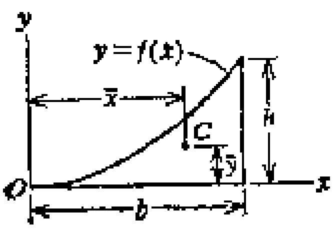
7.



圆环.（坐标轴原点位于中心处。）
当 t 很小情况下的近似公式。

$$A=2\pi rt=\pi dt\quad I_x=I_y=\pi r^3t=\frac{\pi d^3t}{8}$$

$$I_{xy}=0\quad J=2\pi r^3t=\frac{\pi d^3t}{4}$$

8. 	半圆。（坐标轴原点位于形心处。） $A=\frac{\pi r^2}{2}$　$\bar{y}=\frac{4r}{3\pi}$ $I_x=\frac{(9\pi^2-64)r^4}{72\pi}\approx0.1098r^4$ $I_y=\frac{\pi r^4}{8}$　$I_{xy}=0$　$I_{BB}=\frac{\pi r^4}{8}$
9. 	椭圆。（坐标轴原点位于形心处。） $A=\pi ab$　$I_x=\frac{\pi ab^3}{4}$　$I_y=\frac{\pi ba^3}{4}$ $I_{xy}=0$　$J=\frac{\pi ab}{4}(b^2+a^2)$
10. 	抛物线。 $y=f(x)=h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)$ $A=\frac{2bh}{3}$　$\bar{x}=\frac{3b}{8}$　$\bar{y}=\frac{2h}{5}$
11. 	抛物线外面积。（坐标轴原点位于顶点处。） $y=f(x)=\frac{hx^2}{b^2}$ $A=\frac{bh}{3}$　$\bar{x}=\frac{3b}{4}$　$\bar{y}=\frac{3h}{10}$

附录 C · 几种结构型钢的特性

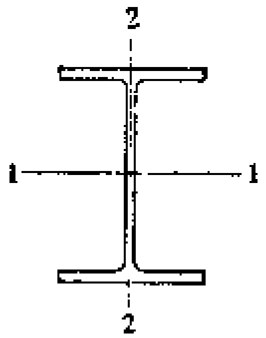
在下面诸表中，提供了便于读者求解本书习题的几种结构型钢的特性。这些表系从 1970 年美国钢结构学会所出版的《钢结构手册》第 7 版中大量表选编面成的。诸表中所用的符号：

I＝惯性矩

S＝截面模量

$r=\sqrt{\frac{I}{A}}$＝回转半径。

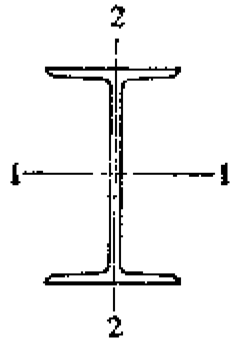
表 C-1 宽翼缘截面(W 型)的特性(节录表)



名称	每呎长重量	面积	高度	翼缘		腹板	轴 1-1			轴 2-2		
				宽度	厚度	厚度	I	S	r	I	S	r
	磅	吋^2	吋	吋	吋	吋	吋^4	吋^3	吋	吋^4	吋^3	吋
W36×300	330	88.3	36.72	16.655	1.680	0.945	20300	1110	15.2	1300	156	3.83
W36×245	245	72.1	36.06	16.512	1.350	0.802	16100	894	15.0	1010	129	3.75
W30×210	210	61.9	30.38	15.105	1.315	0.775	9890	651	12.6	757	100	3.50
W30×172	172	50.7	29.88	14.985	1.065	0.655	7910	530	12.5	598	79.8	3.43
W24×160	160	47.1	24.72	14.091	1.135	0.656	5120	414	10.4	530	75.2	3.35
W24×120	120	35.4	24.31	12.088	0.930	0.556	3650	300	10.2	274	45.4	2.78
W18×114	114	33.5	18.48	11.833	0.991	0.595	2040	220	7.79	274	46.3	2.86
W18×85	85	25.0	18.32	8.838	0.911	0.526	1440	157	7.57	105	23.8	2.05
W16×96	96	28.2	16.32	11.533	0.875	0.535	1360	166	6.93	224	38.8	2.82
W16×50	50	14.7	16.25	7.073	0.628	0.380	657	80.8	6.68	37.1	10.6	1.59
W14×202	202	59.4	15.63	15.750	1.503	0.930	2540	325	6.54	980	124	4.06
W14×103	103	30.3	14.25	14.575	0.813	0.495	1170	164	6.21	420	57.6	3.72
W14×84	84	24.7	14.18	12.023	0.778	0.451	928	131	6.13	225	37.5	3.02
W14×38	38	11.2	14.12	6.776	0.513	0.313	386	54.7	5.88	26.6	7.86	1.54
W12×190	190	55.9	14.38	12.670	1.736	1.060	1890	263	5.82	590	93.1	3.25
W12×106	106	31.2	12.88	12.230	0.986	0.620	931	145	5.46	301	49.2	3.11
W12×72	72	21.2	12.25	12.040	0.671	0.430	597	97.5	5.31	195	32.4	3.04
W12×31	31	9.13	12.09	6.525	0.465	0.265	239	39.5	5.12	21.6	6.61	1.54
W10×112	112	32.9	11.38	10.415	1.248	0.755	719	126	4.67	235	45.2	2.67
W10×72	72	21.2	10.50	10.170	0.808	0.510	421	80.1	4.46	142	27.9	2.59
W10×45	45	13.2	10.12	8.022	0.618	0.350	249	49.1	4.33	53.2	13.3	2.00
W10×25	25	7.36	10.08	5.762	0.430	0.252	133	26.5	4.26	13.7	4.76	1.37
W8×67	67	19.7	9.00	8.287	0.933	0.575	272	60.4	3.71	88.6	21.4	2.12
W8×48	48	14.1	8.50	8.117	0.683	0.405	184	43.2	3.61	60.9	15.0	2.08
W8×40	40	11.8	8.25	8.077	0.558	0.365	146	35.5	3.53	49.0	12.1	2.04
W8×28	28	8.23	8.06	6.540	0.463	0.285	97.8	24.3	3.45	21.6	6.61	1.62

注：轴 1-1 和轴 2-2 均为形心主轴.

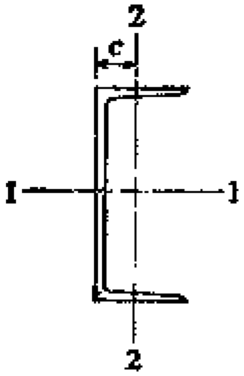
表 C-2 I-梁截面(S 型)的特性(节录表)



名　称	每呎长重量	面积	高度	翼缘		腹板	轴 1-1			轴 2-2		
				宽度	平均厚度	厚度	I	S	r	I	S	r
	磅	吋²	吋	吋	吋	吋	吋⁴	吋³	吋	吋⁴	吋³	吋
S 24×120	120.0	35.3	24.00	8.048	1.102	0.798	3030	252	9.26	84.2	20.9	1.54
S 24×105.9	105.9	31.1	24.00	7.875	1.102	0.625	2830	236	9.53	78.2	19.8	1.58
S 24×79.9	79.9	23.5	24.00	7.001	0.871	0.501	2110	175	9.47	42.3	12.1	1.34
S 18×70	70.0	20.6	18.00	6.251	0.691	0.711	926	103	6.71	24.1	7.72	1.08
S 18×54.7	54.7	16.1	18.00	6.001	0.691	0.461	804	89.4	7.07	20.8	6.94	1.14
S 12×50	50.0	14.7	12.00	5.477	0.659	0.687	305	50.8	4.55	15.7	5.74	1.03
S 12×40.8	40.8	12.0	12.00	5.252	0.659	0.472	272	45.4	4.77	13.6	5.16	1.06
S 12×31.8	31.8	9.35	12.00	5.000	0.544	0.350	218	36.4	4.83	9.36	3.74	1.00
S 8×23	23.0	6.77	8.00	4.171	0.425	0.441	64.9	16.2	3.10	4.31	2.07	0.798
S 8×18.4	18.4	5.41	8.00	4.001	0.425	0.271	57.6	14.4	3.26	3.73	1.86	0.831
S 7×20	20.0	5.88	7.00	3.860	0.392	0.450	42.4	12.1	2.69	3.17	1.64	0.734
S 7×15.3	15.3	4.50	7.00	3.662	0.392	0.252	36.7	10.5	2.86	2.64	1.44	0.766
S 6×17.25	17.25	5.07	6.00	3.565	0.359	0.465	26.3	8.77	2.28	2.31	1.30	0.675
S 6×12.5	12.5	3.67	6.00	3.332	0.359	0.232	22.1	7.37	2.45	1.82	1.09	0.705
S 5×14.75	14.75	4.34	5.00	3.284	0.326	0.494	15.2	6.09	1.87	1.67	1.01	0.620
S 5×10	10.0	2.94	5.00	3.004	0.326	0.214	12.3	4.92	2.05	1.22	0.809	0.643
S 4×9.5	9.5	2.79	4.00	2.796	0.293	0.326	6.79	3.39	1.56	0.903	0.646	0.569
S 4×7.7	7.7	2.26	4.00	2.663	0.293	0.193	6.08	3.04	1.64	0.764	0.574	0.581

注：轴 1-1 和轴 2-2 均为形心主轴。

表 C-3　槽形截面(C型)的特性(节录表)



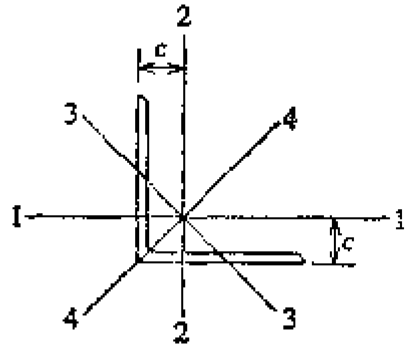
名　称	每呎长重量	面积	高度	翼缘 宽度	翼缘 平均厚度	腹板 厚度	轴 1-1 I	轴 1-1 S	轴 1-1 r	轴 2-2 I	轴 2-2 S	轴 2-2 r	轴 2-2 c
	磅	吋²	吋	吋	吋	吋	吋⁴	吋³	吋	吋⁴	吋³	吋	吋
C15×50	50.0	14.7	15.00	3.716	0.650	0.716	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867	0.799
C15×40	40.0	11.8	15.00	3.520	0.650	0.520	349	46.5	5.44	9.23	3.36	0.886	0.778
C12×30	30.0	8.82	12.00	3.170	0.501	0.510	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763	0.674
C12×20.7	20.7	6.09	12.00	2.942	0.501	0.282	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799	0.698
C10×30	30.0	8.82	10.00	3.033	0.436	0.673	103	20.7	3.42	3.94	1.65	0.669	0.649
C10×20	20.0	5.88	10.00	2.739	0.436	0.379	78.9	15.8	3.66	2.81	1.32	0.691	0.606
C8×18.75	18.75	5.51	8.00	2.527	0.390	0.487	44.0	11.0	2.82	1.98	1.01	0.599	0.565
C8×11.5	11.5	3.38	8.00	2.260	0.390	0.220	32.6	8.14	3.11	1.32	0.781	0.625	0.571
C6×13	13.0	3.83	6.00	2.157	0.343	0.437	17.4	5.80	2.13	1.05	0.642	0.525	0.514
C6×8.2	8.2	2.40	6.00	1.920	0.343	0.200	13.1	4.38	2.34	0.692	0.492	0.537	0.512
C4×7.25	7.25	2.13	4.00	1.721	0.296	0.321	4.59	2.29	1.47	0.432	0.343	0.450	0.459
C4×5.4	5.4	1.59	4.00	1.584	0.296	0.184	3.85	1.93	1.56	0.319	0.283	0.449	0.458

注：1．轴 1-1 和轴 2-2 均为形心主轴.

2．距离 c 系从形心量至腹板的背面.

3．表列对轴 2-2 的 S 值系对此轴的两个截面模量中的较小值.

表 C-4 等肢角形截面(L 型)的特性(节录表)



名　　称	每呎长重量	面　积	轴 1-1 和轴 2-2				轴 3-3
			I	S	r	c	r_{min}
吋	磅	吋²	吋⁴	吋³	吋	吋	吋
L8×8×1	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56
L8×8×$\frac{1}{2}$	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59
L6×6×1	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17
L6×6×$\frac{1}{2}$	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18
L5×5×$\frac{7}{8}$	27.2	7.98	17.8	5.17	1.49	1.57	0.973
L5×5×$\frac{1}{2}$	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983
L4×4×$\frac{3}{4}$	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778
L4×4×$\frac{3}{8}$	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788
L3$\frac{1}{2}$×3$\frac{1}{2}$×$\frac{1}{2}$	11.1	3.25	3.64	1.49	1.06	1.06	0.683
L3$\frac{1}{2}$×3$\frac{1}{2}$×$\frac{1}{4}$	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694
L3×3×$\frac{1}{2}$	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584
L3×3×$\frac{1}{4}$	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592

注：1．轴 1-1 和轴 2-2 均为平行于两肢的形心轴．

2．距离 c 系从形心量至两肢的背面．

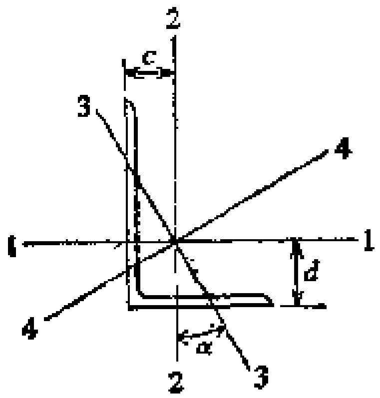
3．表列对轴 1-1 和轴 2-2 的 S 值系对这两轴的两个截面模量中的较小值．

4．轴 3-3 和轴 4-4 均为形心主轴．

5．对轴 3-3 的惯性矩系两个主惯性矩的较小值，可从方程 $I_{33}=Ar^2_{min}$ 求得．

6．对轴 4-4 的惯性矩系两个主惯性矩的较大值，可从方程 $I_{44}+I_{33}=I_{11}+I_{22}$ 求得．

表 C-5　不等肢角形截面(L 型)的特性(节录表)

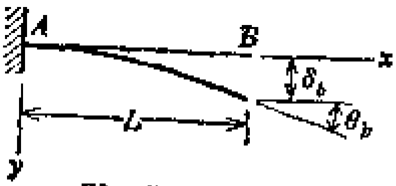


名　　称	每呎长重量	面积	轴 1-1				轴 2-2				轴 3-3	
			I	S	r	d	I	S	r	c	r_{min}	$\tan\alpha$
吋	磅	吋^2	吋^4	吋^3	吋	吋	吋^4	吋^3	吋	吋	吋	
L8×6×1	44.2	13.00	80.8	15.1	2.49	2.65	38.8	8.92	1.73	1.65	1.28	0.543
L8×6×$\frac{1}{2}$	23.0	6.75	44.3	8.02	2.56	2.47	21.7	4.79	1.79	1.47	1.30	0.558
L7×4×$\frac{7}{8}$	30.2	8.86	42.9	9.65	2.20	2.55	10.2	3.46	1.07	1.05	0.856	0.318
L7×4×$\frac{1}{2}$	17.9	5.25	26.7	5.81	2.25	2.42	6.53	2.12	1.11	0.917	0.872	0.335
L6×4×$\frac{7}{8}$	27.2	7.98	27.7	7.15	1.86	2.12	9.75	3.39	1.11	1.12	0.857	0.421
L6×4×$\frac{1}{2}$	16.2	4.75	17.4	4.33	1.91	1.99	6.27	2.08	1.15	0.987	0.870	0.440
L5×3$\frac{1}{2}$×$\frac{3}{4}$	19.8	5.81	13.9	4.28	1.55	1.75	5.55	2.22	0.977	0.996	0.748	0.464
L5×3$\frac{1}{2}$×$\frac{3}{8}$	10.4	3.05	7.78	2.29	1.60	1.61	3.18	1.21	1.02	0.861	0.762	0.486
L5×3×$\frac{1}{2}$	12.8	3.75	9.45	2.91	1.59	1.75	2.58	1.15	0.829	0.750	0.648	0.357
L5×3×$\frac{1}{4}$	6.6	1.94	5.11	1.53	1.62	1.66	1.44	0.614	0.861	0.657	0.663	0.371
L4×3×$\frac{5}{8}$	13.6	3.98	6.03	2.30	1.23	1.37	2.87	1.35	0.849	0.871	0.637	0.534
L4×3×$\frac{3}{8}$	8.5	2.48	3.96	1.46	1.26	1.28	1.92	0.866	0.879	0.782	0.644	0.551

注：1. 轴 1-1 和轴 2-2 均为平行于两肢的形心轴.
2. 距离 c 和 d 均从形心量至两肢的背面.
3. 表列对轴 1-1 和轴 2-2 的 S 值系对这两轴的两个截面模量中的较小值.
4. 轴 3-3 和轴 4-4 均为形心主轴.
5. 对轴 3-3 的惯性矩系对两个主惯性矩的较小值，可从方程 $I_{33}=Ar^2_{min}$ 求得.
6. 对轴 4-4 的惯性矩系两个主惯性矩的较大值，可从 $I_{44}+I_{33}=I_{11}+I_{22}$ 求得.

附录 D　梁的挠度和斜度

表 D-1　悬臂梁的挠度和斜度



EI = 常数:

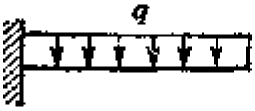
v = 顺 y 方向的挠度

$v' = \dfrac{dv}{dx}$ = 挠度曲线的斜度

$\delta_b = v(L)$ = 梁右端处的挠度

$\theta_b = v'(L)$ = 梁右端处的斜度

1.

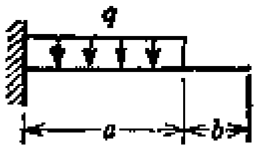


$$v = \frac{qx^2}{24\,EI}(6\,L^2 - 4\,Lx + x^2)$$

$$v' = \frac{qx}{6\,EI}(3\,L^2 - 3\,Lx + x^2)$$

$$\delta_b = \frac{qL^4}{8\,EI} \qquad \theta_b = \frac{qL^3}{6\,EI}$$

2.



$$v = \frac{qx^2}{24\,EI}(6\,a^2 - 4\,ax + x^2) \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

$$v' = \frac{qx}{6\,EI}(3\,a^2 - 3\,ax + x^2) \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

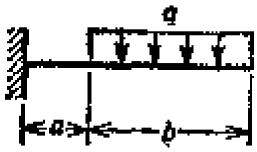
$$v = \frac{qa^3}{24\,EI}(4\,x - a) \qquad v' = \frac{qa^3}{6\,EI} \qquad a \leqslant x \leqslant L$$

在 $x = a$ 处： $v = \dfrac{qa^4}{8\,EI}$　$v' = \dfrac{qa^3}{6\,EI}$

$$\delta_b = \frac{qa^3}{24\,EI}(4\,L - a) \qquad \theta_b = \frac{qa^3}{6\,EI}$$

表 D-1 (续)

3.



$$v=\frac{qx^2}{12EI}(3bL+3ab-2bx)\qquad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$v'=\frac{qbx}{2EI}(L+a-x)\qquad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$v=\frac{q}{24EI}(x^4-4Lx^3+6L^2x^2-4a^3x+a^4)$$

$$a\leqslant x\leqslant L$$

$$v'=\frac{q}{6EI}(x^3-3Lx^2+3L^2x-a^3)\qquad a\leqslant x\leqslant L$$

在 $x=a$ 处：$v=\frac{qa^2b}{12EI}(3L+a)$　$v'=\frac{qabL}{2EI}$

$$\delta_b=\frac{q}{24EI}(3L^4-4a^3L+a^4)$$

$$\theta_b=\frac{q}{6EI}(L^3-a^3)$$

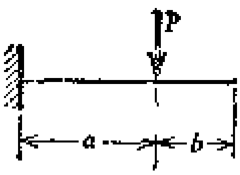
4.



$$v=\frac{Px^2}{6EI}(3L-x)\qquad v'=\frac{Px}{2EI}(2L-x)$$

$$\delta_b=\frac{PL^3}{3EI}\qquad \theta_b=\frac{PL^2}{2EI}$$

5.



$$v=\frac{Px^2}{6EI}(3a-x)\qquad v'=\frac{Px}{2EI}(2a-x)$$

$$0\leqslant x\leqslant a$$

$$v=\frac{Pa^2}{6EI}(3x-a)\qquad v'=\frac{Pa^2}{2EI}\qquad a\leqslant x\leqslant L$$

在 $x=a$ 处：　$v=\frac{Pa^3}{3EI}$　$v'=\frac{Pa^2}{2EI}$

$$\delta_b=\frac{Pa^2}{6EI}(3L-a)\qquad \theta_b=\frac{Pa^2}{2EI}$$

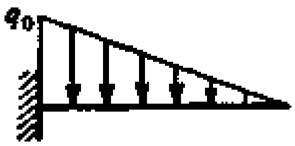
6.



$$v=\frac{M_0x^2}{2EI} \qquad v'=\frac{M_0x}{EI}$$

$$\delta_b=\frac{M_0L^2}{2EI} \qquad \theta_b=\frac{M_0L}{EI}$$

7.

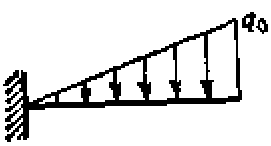


$$v=\frac{q_0x^2}{120LEI}(10L^3-10L^2x+5Lx^2-x^3)$$

$$v'=\frac{q_0x}{24LEI}(4L^3-6L^2x+4Lx^2-x^3)$$

$$\delta_b=\frac{q_0L^4}{30EI} \qquad \theta_b=\frac{q_0L^3}{24EI}$$

8

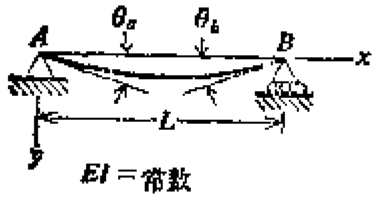


$$v=\frac{q_0x^2}{120LEI}(20L^3-10L^2x+x^3)$$

$$v'=\frac{q_0x}{24LEI}(8L^3-6L^2x+x^3)$$

$$\delta_b=\frac{11q_0L^4}{120EI} \qquad \theta_b=\frac{q_0L^3}{8EI}$$

表 D-2 简单梁的挠度和斜度



v＝顺 y 方向的挠度

$v'=\frac{dx}{dv}$＝挠度曲线的斜度

$\delta_c=v\left(\frac{L}{2}\right)$＝梁中央处的挠度

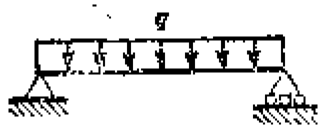
x_1＝从 A 点至最大挠度点的距离

$\delta_{max}=v_{max}$＝最大的挠度

$\theta_a=v'(0)$＝梁左端处的角

$\theta_b=-v'(L)$＝梁右端处的角

1.

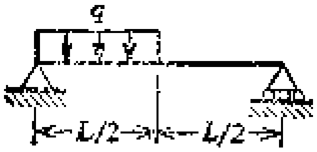


$$v=\frac{qx}{24EI}(L^3-2Lx^2+x^3)$$

$$v'=\frac{q}{24EI}(L^3-6Lx^2+4x^3)$$

$$\delta_c=\delta_{max}=\frac{5qL^4}{384EI}\quad \theta_a=\theta_b=\frac{qL^3}{24EI}$$

2.



$$v=\frac{qx}{384EI}(9L^3-24Lx^2+16x^3)$$

$$0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}$$

$$v'=\frac{q}{384EI}(9L^3-72Lx^2+64x^3)$$

$$0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}$$

$$v=\frac{qL}{384EI}(8x^3-24Lx^2+17L^2x-L^3)$$

$$\frac{L}{2}\leqslant x\leqslant L$$

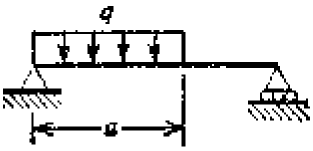
$$v'=\frac{qL}{384EI}(24x^2-48Lx+17L^2)$$

$$\frac{L}{2}\leqslant x\leqslant L$$

$$\delta_c=\frac{5qL^4}{768EI}\quad \theta_a=\frac{3qL^3}{128EI}\quad \theta_b=\frac{7qL^3}{384EI}$$

表 D-2（续）

3.



$$v=\frac{qx}{24LEI}(a^4-4a^3L+4a^2L^2+2a^2x^2-4aLx^2+Lx^3) \qquad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$v'=\frac{q}{24LEI}(a^4-4a^3L+4a^2L^2+6a^2x^2-12aLx^2+4Lx^3) \qquad 0\leqslant x\leqslant a$$

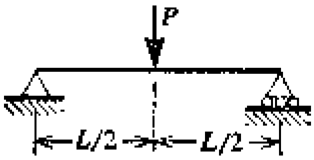
$$v=\frac{qa^2}{24LEI}(-a^2L+4L^2x+a^2x-6Lx^2+2x^3) \qquad a\leqslant x\leqslant L$$

$$v'=\frac{qa^2}{24LEI}(4L^2+a^2-12Lx+6x^2) \qquad a\leqslant x\leqslant L$$

$$\theta_a=\frac{qa^2}{24LEI}(a^2-4aL+4L^2)$$

$$\theta_b=\frac{qa^2}{24LEI}(2L^2-a^2)$$

4.

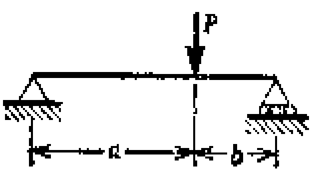


$$v=\frac{Px}{48EI}(3L^2-4x^2) \qquad 0\leqslant x\leqslant \frac{L}{2}$$

$$v'=\frac{P}{16EI}(L^2-4x^2) \qquad 0\leqslant x\leqslant \frac{L}{2}$$

$$\delta_c=\delta_{max}=\frac{PL^3}{48EI} \qquad \theta_a=\theta_b=\frac{PL^2}{16EI}$$

5.



$$v=\frac{Pbx}{6LEI}(L^2-b^2-x^2) \qquad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$v'=\frac{Pb}{6LEI}(L^2-b^2-3x^2) \qquad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$\theta_a=\frac{Pab(L+b)}{6LEI} \qquad \theta_b=\frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

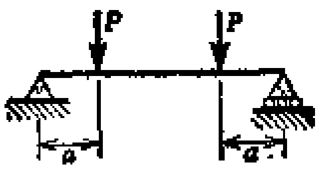
如果 $a\geqslant b,\ \delta_c=\dfrac{Pb(3L^2-4b^2)}{48EI}$

如果 $a\geqslant b,\ x_1=\sqrt{\dfrac{L^2-b^2}{3}}$

和 $v_{max}=\dfrac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$

表 D-2（续）

6.



$$v=\frac{Px}{6EI}(3aL-3a^2-x^2)\quad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$v'=\frac{P}{2EI}(aL-a^2-x^2)\quad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$v=\frac{Pa}{6EI}(3Lx-3x^2-a^2)\quad a\leqslant x\leqslant \frac{L}{2}$$

$$v'=\frac{Pa}{2EI}(L-2x)\quad a\leqslant x\leqslant \frac{L}{2}$$

$$\theta_a=\frac{Pa(L-a)}{2EI}$$

$$\delta_c=v_{max}=\frac{Pa}{24EI}(3L^2-4a^2)$$

7.



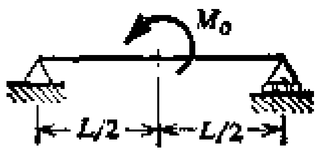
$$v=\frac{M_0x}{6LEI}(2L^2-3Lx+x^2)$$

$$v'=\frac{M_0}{6LEI}(2L^2-6Lx+3x^2)$$

$$\delta_c=\frac{M_0L^2}{16EI}\quad \theta_a=\frac{M_0L}{3EI}\quad \theta_b=\frac{M_0L}{6EI}$$

$$x_1=L\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\text{ 和 }\delta_{max}=\frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

8.



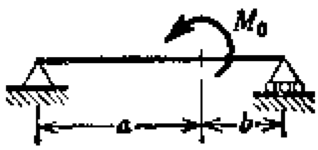
$$v=\frac{M_0x}{24LEI}(L^2-4x^2)\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{L}{2}$$

$$v'=\frac{M_0}{24LEI}(L^2-12x^2)\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{L}{2}$$

$$\delta_c=0\quad \theta_a=\frac{M_0L}{24EI}\quad \theta_b=-\frac{M_0L}{24EI}$$

表 D-2（续）

9.



$$v=\frac{M_0 x}{6LEI}(6aL-3a^2-2L^2-x^2)$$

$$0\leqslant x\leqslant a$$

$$v'=\frac{M_0}{6LEI}(6aL-3a^2-2L^2-3x^2)$$

$$0\leqslant x\leqslant a$$

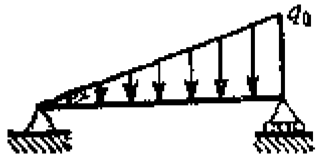
在 $x=a$ 处： $v=\frac{M_0 a}{3LEI}(3aL-2a^2-L^2)$

在 $x=a$ 处： $v'=\frac{M_0}{3LEI}(3aL-3a^2-L^2)$

$$\theta_a=\frac{M_0}{6LEI}(6aL-3a^2-2L^2)$$

$$\theta_b=\frac{M_0}{6LEI}(3a^2-L^2)$$

10.



$$v=\frac{q_0 x}{360LEI}(7L^4-10L^2x^2+3x^4)$$

$$v'=\frac{q_0}{360LEI}(7L^4-30L^2x^2+15x^4)$$

$$\delta_c=\frac{5q_0L^4}{768EI}\quad \theta_a=\frac{7q_0L^3}{360EI}\quad \theta_b=\frac{q_0L^3}{45EI}$$

$$x_1=0.5193L\qquad \delta_{max}=0.00652\frac{q_0L^4}{EI}$$

习 题 答 案

1.2-2 $\sigma=10,000$ 磅/吋^2 $\epsilon=0.000333$

1.3-1 (a)88,200 呎(b)42,400 呎

1.3-2 $d=5.72$ 吋

1.3-3 $P=12,100$ 磅

1.3-4 $\theta=\arctan\sqrt{2}=54°44'$

1.3-5 $A=\dfrac{WL\omega^2}{g\sigma_w}$

1.3-6 $A=2WL\omega^2/(2g\sigma_w-\gamma L^2\omega^2)$

1.4-1 21.764 吋

1.4-2 $d=0.404$ 吋

1.4-3 $P=30,000$ 磅

1.4-4 (a)$\Delta d=0.00061$ 吋(b)$\Delta V=0.0216$ 吋^3

1.5-1 $\delta=\dfrac{PL}{3EA}$(伸长)

1.5-2 (a)$\delta=0.0235$ 吋(b)1.29

1.5-3 (a)0.0736 吋(b)0.0627 吋

1.5-4 $\delta=\dfrac{WL}{2EA}$

1.5-5 0.000189 吋

1.5-6 $\Delta V=\dfrac{WL}{2E}(1-2\nu)$

1.5-7 $\delta=\dfrac{\omega^2L^3}{3gEA}(W_1+3W)$

1.5-8 $\delta=\dfrac{PL}{Et(b_1-b_2)}\ln\dfrac{b_1}{b_2}$

1.5-9 $\Delta V=\dfrac{PL}{E}(1-2\nu)$

1.5-10 0.0255 吋

1.5-11 $r=\left(\dfrac{P}{\pi\sigma_w}e^{\gamma x/\sigma_w}\right)^{1/2}$ $V=\dfrac{P}{\gamma}(e^{\gamma L/\sigma_w}-1)$

1.5-12 $\Delta_{bh}=0.0293$ 吋 $\Delta_{bv}=0.0470$ 吋

1.5-13 $\cot 2\theta=-\frac{A_2\sqrt{2}}{A_1}$

1.5-14 $\theta=55^{\circ}39'$

1.6-2 一半

1.6-3 $x=\frac{LE_2}{E_1+E_2}$

1.6-4 2000 磅/吋^2,压力

1.6-5 $P=224,000$ 磅

1.6-6 $e=\frac{b}{2}\cdot\frac{E_1-E_2}{E_1+E_2}$

1.6-7 $\sigma_{ab}=10,000$ 磅/吋^2 $\sigma_{cd}=20,000$ 磅/吋^2

1.6-9 $F_{ad}=\frac{P}{2\sin\alpha}$ $\Delta_{dv}=\frac{PH}{2EA\sin^3\alpha}$

1.6-10 $F_{ad}=\frac{P}{\sqrt{2}}$ $F_{bd}=P(\sqrt{2}-1)$ $F_{cd}=-\frac{P}{2}(2-\sqrt{2})$

$\Delta_{dh}=\frac{PH}{EA}(\sqrt{2}-1)$ $\Delta_{dv}=\frac{PH}{EA}$

1.7-1 38.4°F 164.7°F

1.7-2 13,650 磅/吋^2,压力

1.7-3 $R=EA\Delta L/L$

1.7-4 28°F

1.7-5 $\Delta T=\frac{P}{E_cA_c(\alpha_c-\alpha_s)}$

1.7-6 $\sigma_{ab}=5,320$ 磅/吋^2 $\sigma_{cd}=22,340$ 磅/吋^2

1.7-7 $\sigma=16,400$ 磅/吋^2

1.7-9 $F_1=-EA\alpha\Delta T\sin^2\beta/(1+2\cos^3\beta)$ $F_2=-2F_1\cos\beta$

1.7-10 $n=\frac{\sigma_0L}{2pE}\left(1+\frac{EA}{2E_cA_c}\right)$

1.7-11 $\sigma_s=\frac{(\alpha_c-\alpha_s)TE_cE_s}{E_c+2E_s}$ $\sigma_c=-2\sigma_s$

1.7-12 11,930 磅/吋^2

1.8-1 $\delta_b=0.12, 0.24, 0.36, 0.66, 0.96$ 吋

1.8-2 $\delta_b=\frac{L}{B\sin\theta}\left(\frac{P}{2A\sin\theta}\right)^n$

1.8-3 $\delta_H=0.0612$ 吋　$\delta_V=0.1209$ 吋

1.8-4 $\delta=\frac{\gamma^n L^{n+1}}{B(n+1)}$

1.8-5 $\delta=1.32$ 呎

1.8-6 $P_u=3.73\sigma_y A$

1.8-7 $P_u=97,200$ 磅

1.8-8 $A_{ab}=1.05$ 吋^2　$A_{bc}=1.21$ 吋^2

1.8-9 $P_y=\sigma_y A$　$P_u=4\sigma_y A/3$

1.9-1 $\tau=625$ 磅/吋^2

1.9-2 $d=0.626$ 吋

1.9-3 $\tau=44,100$ 磅/吋^2　$\sigma=58,900$ 磅/吋^2

1.9-4 $\tau=12,200$ 磅/吋^2

1.9-5 $\tau=7170$ 磅/吋^2

1.10-1 $U=1.5$ 吋-磅和 3.0 吋-磅

1.10-2 $U=\frac{P^2L}{2EA}$

1.10-3 $U=\frac{\gamma^2AL^3}{6E}$

1.10-4 $U=\frac{L}{6EA}(3P^2+3P\gamma LA+\gamma^2L^2A^2)$

1.10-5 $U=\frac{W_1^2L^3\omega^4}{15EAg^2}$

1.10-7 $\sigma=(2WE/A)^{1/2}$

1.10-8 $\sigma=1990$ 磅/吋^2

1.10-9 $h=21.6$ 吋

1.10-10 $\sigma=\frac{W}{A}\left(1+\sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}}\right)$其中 $\delta_{st}=\frac{WL}{EA}+\frac{W}{k}$

2.1-1 $\tau_{max}=11,500$ 磅/吋^2

2.1-2 80 千磅

2.1-3 $\sigma_\theta=-19,010$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-10,980$ 磅/吋^2

2.1-4 $\sigma_x=13,330$ 磅/吋^2 $\theta=18°26'$

2.1-5 $\sigma_\theta=12,000$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=6930$ 磅/吋^2

2.1-7 $\tau_\theta=-\tau'_\theta=8480$ 磅/吋^2 $\sigma_x=18,000$ 磅/吋^2 $\tau_{max}=9000$ 磅/吋^2

2.1-8 $\theta=60°$

2.1-9 $\theta=26°34'$ $P=3750$ 磅

2.2-1 $\sigma_\theta=7500$ 磅/吋^2 $\sigma'_\theta=-1500$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-\tau'_\theta=7790$ 磅/吋^2

2.2-2 $\sigma_\theta=\sigma'_\theta=3000$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-\tau'_\theta=9000$ 磅/吋^2

2.2-3 $\sigma_\theta=\sigma_0$ 和 $\tau_\theta=0$ $\frac{\Delta V}{V}=0.0005$

2.2-4 $\sigma_x=6000$ 磅/吋^2 $\sigma_y=-2000$ 磅/吋^2

2.2-6 $\sigma_x=26,000$ 磅/吋^2 $\sigma_y=-13,200$ 磅/吋^2

2.2-7 0.0000583 吋

2.2-8 $\Delta V=-0.0256$ 吋^3

2.2-9 $\epsilon_z=-0.00009$

2.2-10 $\nu=\frac{2}{7}$

2.2-11 $\epsilon_\theta=\epsilon_x\cos^2\theta+\epsilon_y\sin^2\theta$

2.3-1 $\frac{\Delta V}{V}=0$

2.3-2 $\gamma=0.00167$

2.3-3 $\epsilon_x=-\epsilon_y=0.00125$ $\gamma=0.0025$

2.4-4 $\theta=45°$ $\sigma_\theta=\sigma'_\theta=-4000$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-\tau'_\theta=-8000$ 磅/吋^2

2.4-6 $\sigma_\theta=-3550$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-13,250$ 磅/吋^2

2.4-10 $\sigma_\theta=3500$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-500$ 磅/吋^2

2.5-1 $\theta_p=157.5°$ 和 $\sigma_1=5410$ 磅/吋^2 $\theta_p=67.5°$ 和 $\sigma_2=2590$ 磅/吋^2

2.5-2 $\theta_p=97°1'$ 和 $\sigma_1=3120$ 磅/吋^2 $\theta_p=7°1'$ 和 $\sigma_2=-5120$ 磅/吋^2

2.5-3 $\theta_s=52°1'$ $\sigma_\theta=-1000$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-4123$ 磅/吋^2

2.5-4 $\theta=15^\circ$ $\sigma_\theta=1000$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-1730$ 磅/吋^2

2.5-5 (a)$\theta_p=112.5^\circ$ $\sigma_1=1914$ 磅/吋^2

(b)$\theta_s=67.5^\circ$ $\sigma_\theta=500$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-1414$ 磅/吋^2

2.5-6 (a)$\theta_p=67.5^\circ$ $\sigma_1=4830$ 磅/吋^2

(b)$\theta_s=22.5^\circ$ $\sigma_\theta=2000$ 磅/吋^2 $\tau_\theta=-2830$ 磅/吋^2

2.5-7 $\sigma_x=0$ $\sigma_y=-7500$ 磅/吋^2 $\tau_{xy}=-2165$ 磅/吋^2

2.7-1 $\sigma_{max}=20,000$ 磅/吋^2 $\tau_{max}=10,000$ 磅/吋^2

2.7-2 $p=?60$ 磅/吋^2

2.7-3 $\Delta V=4.19\times10^{-6}$吋^3

2.8-1 $\epsilon_1=575\times10^{-6}$ $\theta_p=-22.5^\circ$

2.8-2 $\epsilon_1=-65\times10^{-6}$ $\theta_p=-22.5^\circ$

2.8-3 $\epsilon_1=934\times10^{-6}$ $\theta_p=39.6^\circ$

3.1-1 $L=93$ 吋

3.1-2 $\frac{L}{d}=\frac{\phi G}{2\tau}=698$

3.1-3 $d=3.87$ 吋

3.1-4 $T=906$ 吋-磅

3.1-5 $G=\frac{8T}{\pi d^3 \theta}$

3.1-6 $\frac{T_1}{8}$

3.1-7 $d=5.63$ 吋

3.1-8 $T=\frac{fPd}{4}$

3.1-9 $\phi=\frac{qL^2}{2GJ}$

3.1-10 $\frac{d_b}{d_a}=1.39$

3.1-11 $\sigma_1=9680$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-3310$ 磅/吋^2 $\tau_{max}=6490$ 磅/吋^2

3.2-1 (a)0.51 (b)1.19

3.2-2 (a)$\phi=0.105$ 弧度 (b)$d=2.98$ 吋

3.2-3 $d=18.3$ 吋

3.2-4 $\frac{a}{L}=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$

3.3-1 $U=4.53$ 吋-磅

3.3-2 $U=\frac{19\,T_1^2L}{128GJ}$

3.3-3 $U=\frac{q^2L^3}{6\,GJ}$

3.3-4 $\frac{U_1}{U_2}=\frac{A_2^2}{A_1^2}$

3.3-5 $U=\frac{G\beta^2}{2}\ \frac{J_aJ_b}{L_aJ_b+L_bJ_a}$

3.3-6 $\tau=22,400$ 磅/吋²

3.4-1 (a)9550 磅/吋² (b)10,400 磅/吋²

3.4-2 (a)$t=0.143$ 吋 (b)$t=0.147$ 吋

3.4-3 2

3.4-4 $\tau=6630$ 磅/吋² $\theta=0.000233$ 弧度/吋

3.4-5 $\tau\propto(\beta+1)^2/\beta$ $J\propto\beta^3/(\beta+1)^4$

3.4-6 $\phi=\frac{2\,TL}{G\pi t d_a^3}\ \frac{d_a}{d_b}\left(\frac{d_a}{d_b}+1\right)$

3.5-2 (a) $\tau_{max}=\frac{Tr}{J}\ \frac{3\,n+1}{4\,n}$ $T_u=\frac{2\,n\pi r^3\tau_0}{3\,n+1}$

3.5-3 $T=\frac{T_y}{3}\left[4-\left(\frac{\gamma_y}{\gamma_{max}}\right)^3\right]$

3.5-4 $\frac{T_u}{T_y}=\frac{4(1-\beta^3)}{3(1-\beta^4)}$ 其中 $\beta=\frac{r_1}{r_2}$

4.2-1 $V=-2400$ 磅 $M=24,000$ 呎-磅

$V_{max}=5600$ 磅 $M_{max}=33,600$ 呎-磅

4.2-2 $V=qb$ $M=-\frac{qb^2}{2}$

4.2-3 $V=286$ 磅 $M=6000$ 呎-磅

4.2-4 $V=-2600$ 磅 $M=-1000$ 呎-磅

4.2-5 $V=-3.5$ 千磅 $M=-33$ 呎-千磅

4.2-6 $V_b=6000$ 磅 $M_b=12,000$ 呎-磅 $V_m=0$ $M_m=24,000$ 呎-磅

4.2-7 $|M_{max}|=Pa$

4.2-8 $\frac{a}{L}=\frac{1}{4}$

4.2-9 $N=P\sin\theta$ $V=P\cos\theta$ $M=Pr\sin\theta$

4.2-10 $V_{max}=\frac{44\,wL^2a}{15\,g}$ $M_{max}=\frac{517\,wL^3a}{180\,g}$

4.4-15 $a=0.686\,L$

4.4-17 $M_{pos}=2448$ 呎-磅 $M_{neg}=-2160$ 呎-磅

4.4-18 $q_a=\frac{3\,P}{4\,L}$ $q_b=\frac{9\,P}{4\,L}$ $M_{max}=\frac{17\,PL}{64}$

4.4-19 (a) $M_{max}=\frac{PL(n+2)}{8(n+1)}$当$n$为偶数； $M_{max}=\frac{PL(n+1)}{8\,n}$

当n为奇数

4.4-20 $x=24$ 呎 $M_{max}=535.2$ 呎-千磅

5.1-1 $\sigma=46,800$ 磅/吋²

5.1-2 $\sigma=49,100$ 磅/吋²

5.1-3 $P=13,900$ 磅 $\delta=0.0864$ 吋

5.1-4 $\sigma_{max}=11.3$ 磅/吋² $\delta=0.182$ 吋

5.1-5 (a) $M_{max}=\frac{b^3\sigma_w}{32}$ (b) $M_{max}=\frac{13\,bh^2\sigma_w}{60}$ (c) M_{max}

$=\frac{15\,\pi d^3\sigma_w}{64}$

5.1-6 $\kappa=\alpha(T_2-T_1)/h$ $\delta=\alpha L^2(T_2-T_1)/8\,h$

5.1-7 $\sigma=1350$ 磅/吋²

5.1-8 $\sigma=972$ 磅/吋²

5.1-9 $\sigma=10,160$ 磅/吋²(拉力)

5.1-10 $P=63.5$ 千磅

5.1-11 $\sigma_{max}=20,400$ 磅/吋²

5.2-1 $d=8.19$ 吋

5.2-2 $b=9.90$ 吋

5.2-3 $h=\sqrt{2}\,b$ $b=d/\sqrt{3}$

5.2-4 $t=0.288$ 吋

5.2-5 W 12×31

5.2-6 (a)$S=19.7$ 吋^3 (b)W 10×25

5.2-7 (a)$S=4.0$ 吋^3 (b)S 5×10

5.2-8 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{2d_2}{d_1}-\frac{d_1}{d_2}$

5.2-9 $\frac{b_1}{b_2}=\frac{2\beta-1}{2-\beta}$

5.2-10 $\delta=0.011d$

5.2-11 $\beta=0.130$

5.3-2 $\tau=56.2$ 磅/吋^2

5.3-3 $P=8330$ 磅

5.3-4 $\tau_{max}=70$ 磅/吋^2

5.3-5 $P=900$ 磅 $\sigma=1350$ 磅/吋^2

5.3-6 $\tau=5870$ 磅/吋^2 $\tau_{approx}=5710$ 磅/吋^2

5.3-7 $\tau_{max}=5700$ 磅/吋^2

5.3-8 $\tau_{max}=265$ 磅/吋^2

5.5-1 2530 磅/吋

5.5-2 2.8 吋 1.4 吋

5.5-3 $s=5.35$ 吋

5.5-4 $V=2760$ 磅

5.6-1 $\sigma_1=7$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-151$ 磅/吋^2 $\theta_p=78°$到 σ_1

5.6-2 $\sigma_1=850$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-6$ 磅/吋^2 $\theta_p=4°44'$到σ_1

5.6-3 (a)$\sigma_1=188$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-188$ 磅/吋^2 $\theta_p=45°$到 σ_2

(b)$\sigma_1=29$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-663$ 磅/吋^2 $\theta_p=12°$到 σ_2

(c)$\sigma_1=0$ $\sigma_2=-1270$ 磅/吋^2 $\theta_p=0°$到 σ_2

5.6-4 (a)$\sigma_1=15,900$ 磅/吋^2 $\sigma_2=0$ $\theta_p=0°$到 σ_1

(b)$\sigma_1=14,100$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-200$ 磅/吋^2 $\theta_p=-7°9'$到σ_1

(c)$\sigma_1=2350$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-2350$ 磅/吋^2 $\theta_p=-45°$到 σ_1

5.7-1 $\sigma_{max}=2\sigma_b=\frac{64PL}{27\pi d_a^3}$位于 $x=\frac{L}{4}$处

5.7-2 $\frac{d_b}{d_a}\leqslant 1.5$

5.7-3 $\sigma_{max}=\frac{8PL}{9h^3}$位于$x=\frac{L}{2}$处

5.7-4 (a)$\sigma_{max}=1250$ 磅/吋^2，位于$x=8$ 吋处

(b)$\tau_{max}=30$ 磅/吋^2 $\tau_{min}=10$ 磅/吋^2

5.7-5 $b=\frac{6Px}{h^2\sigma_w}$

5.7-6 $h=x\sqrt{\frac{3q}{b\sigma_w}}$

5.7-7 $h=\left[\frac{3PL}{2b\sigma_w}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)\right]^{1/2}$

5.8-1 $\sigma_w=-810$ 磅/吋^2 $\sigma_s=10,400$ 磅/吋^2

5.8-2 $M=139,000$ 吋-磅

5.8-3 $M=911,000$ 吋-磅

5.8-4 $M=197,000$ 吋-磅

5.8-5 $t=0.585$ 吋

5.8-6 $S=0.00317$ 吋^3

5.9-1 $\sigma_1=7530$ 磅/吋^2 $\tau_{max}=3780$ 磅/吋^2

5.9-2 $\sigma_1=12,400$ 磅/吋^2 $\tau_{max}=8370$ 磅/吋^2

5.9-3 $\sigma_1=1990$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-3$ 磅/吋^2

5.9-4 $\sigma_1=11,910$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-660$ 磅/吋^2 $\tau_{max}=6290$ 磅/吋^2

5.9-5 $\tau_a=4840$ 磅/吋^2 $\tau_b=1500$ 磅/吋^2 $\tau_c=1820$磅/吋^2

5.9-6 $\sigma_1=8060$ 磅/吋^2 $\sigma_2=-4430$ 磅/吋^2

5.9-7 $M=qR^2(1+\cos\theta)$ $V=qR(\pi-\theta)$ $T=qR^2(\pi-\theta-\sin\theta)$

5.10-1 $\sigma_r=\frac{8P}{a^2}$ $\sigma_\theta=-\frac{4P}{a^2}$

5.10-2 $\sigma_r=\frac{9.11P}{a^2}$ $\sigma_\theta=-\frac{6.36P}{a^2}$

5.10-3 $\alpha=\frac{d_1^2+d_2^2}{4hd_2}$

5.10-4 3600 磅/吋^2， -3710 磅/吋^2

5.10-5 $P=29.6$ 千磅

5.10-6 $s=\frac{h^2}{12(L-x)}$

5.10-7 (a)24 磅/吋^2　−32 磅/吋^2　(b)$d=25.2$ 吋

5.10-8 $d=2.57$ 吋

5.10-9 $s=\frac{L}{2}+\frac{d\tan\alpha}{8}$

5.10-10 21,900 磅/吋^2

5.10-11 18,800 磅/吋^2　−26,000 磅/吋^2

5.10-14 具有相同形心而边长为 $b/4$ 的等边三角形.

5.10-15 与原截面倾斜 45°且对角线长度为 $2b/3$ 的正方形。

5.10-16 对角线等于 11.0 吋和 1.43 吋的菱形。

6.2-2　$\delta=0.281$ 吋

6.2-3　$h=4$ 吋

6.2-4　$h_2/h_1=2$

6.2-5　$a=5L/7$

6.2-6　1.0098

6.3-1　$\theta=4\beta/3$

6.3-2　$\delta/L=1/300$

6.3-6　$\delta_c=\frac{7qL^4}{192EI}$　　$\delta_t=\frac{41qL^4}{384EI}$

6.3-7　$v=-Px^3/3EI$

6.4-7　$\theta_a=\frac{Pa(L-a)(L-2a)}{6LEI}$　　$\delta_1=\frac{Pa^2(L-2a)^2}{6LEI}$　　$\delta_2=0$

6.5-1　$\delta=\frac{97}{768}\frac{qL^4}{EI}$　　$\theta=\frac{85}{192}\frac{qL^3}{EI}$

6.5-2　$\theta_c=\frac{qL(L^2-2a^2)}{24EI}$

6.5-3　$\delta_b=\frac{2}{9}\frac{PL^3}{EI}$

6.5-4　$\delta=\frac{19PL^3}{384EI}$

6.5-5　(a) $M_0=\frac{PL}{2}$　　(b)$\delta=\frac{PL^3}{12EI}$

6.5-6　$a/L=2/3$

6.5-7　$\delta_2/\delta_1=n^2$

6.5-8 $\delta_{max}=\dfrac{39PL^3}{1224EI}$

6.5-9 $\delta=\dfrac{3q_0L^4}{1280EI}$

6.5-10 $\theta_{max}=\dfrac{q_0L^3}{10EI}$

6.5-11 $\delta_c=\dfrac{PaL^2}{16EI}$(向上) $\delta_d=\dfrac{Pa^2(L+a)}{3EI}$(向下)

6.5-12 $\theta_a=\dfrac{PL^2}{24EI}$

6.6-13 $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{3L^2}{16a(a+L)}$

6.5-14 $\delta=\dfrac{5PL^3}{2EI}$

6.5-15 $\delta_h=\dfrac{Pcb^2}{2EI}$ $\delta_v=\dfrac{Pc^2(c+3b)}{3EI}$

6.6-1 $v=\dfrac{Px}{384EI}(15L^2-32x^2)\qquad 0\leqslant x\leqslant\dfrac{L}{4}$

$v=\dfrac{P}{768EI}(L^3+24L^2x-32x^3)\qquad \dfrac{L}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{L}{2}$

6.6-2 $\theta=\dfrac{5PL^2}{16EI}$

6.6-3 $\delta_c=\dfrac{PL^3}{384EI_1}\left(1+\dfrac{7I_1}{I_2}\right)$

6.6-4 $\delta_c=\dfrac{qL^4}{128EI_1}\left(1+\dfrac{15I_1}{I_2}\right)$

6.6-5 $\delta=\dfrac{11PL^3}{64Ebh^3}$

6.6-6 $\delta_t=\dfrac{6.54PL^3}{Ebd_e^3}$

6.6-7 $\delta_b=\dfrac{1.39PL^3}{Etd_e^3}$

6.7-1 $\delta=0.01331\dfrac{qL^4}{EI}$

6.7-2 $\delta=0.02344\dfrac{PL^3}{EI}$

6.7-3 $\delta=0.0137\dfrac{PL^3}{EI}$

6.7-4 $\delta=0.352\dfrac{PL^3}{EI}$

6.7-5 $\delta=0.1328\dfrac{qL^4}{EI}$

6.7-6 $\delta_a=0.0368\dfrac{q_0L^4}{EI}$

6.7-7 $\delta_c=0.0122\dfrac{PL^3}{EI}$

6.7-8 $\delta_b=0.548\dfrac{PL^3}{EI_a}$

6.8-1 $U=\dfrac{bhL\sigma_{max}^2}{6E}$

6.8-2 $U=\dfrac{P^2L^3}{96EI}$

6.8-3 $U=\dfrac{\pi^4EI\delta^2}{4L^3}$

6.8-4 $U=\dfrac{P^2L^3}{48EI}$

6.8-5 $U_1/U_2=1/8$

6.8-6 $U=42.0$ 吋-磅

6.8-7 $\sigma_{max}=\left(\dfrac{18WhE}{AL}\right)^{1/2}$

6.8-8 S6×12.5

6.9-1 $\delta_b=\dfrac{qL^4}{8EI}\left(\dfrac{1}{1-\beta}\right)$其中 $\beta=\dfrac{kL^3}{3EI}$，当 $\beta<1$ 时是稳定的。

6.9-2 $\delta=\dfrac{\delta_0}{1-\gamma}$其中 $\gamma=\dfrac{kL^3}{48EI}$，当 $\gamma<1$ 时是稳定的。

6.9-3 中心处的挠度$=\dfrac{PL^3}{48EI}\psi_2$其中 $\psi_2=\dfrac{12}{a^3L^3}\left(\tan\dfrac{aL}{2}-\tanh\dfrac{aL}{2}\right)$，

当$\dfrac{a^4L^4}{\pi^4}<1$ 时是稳定的。

6.10-1 $v=\frac{\alpha(T_2-T_1)(x)(L-x)}{2h}$

6.10-2 $\delta=\frac{\alpha(T_1-T_2)L^2}{2h}$ $\theta=\frac{\alpha(T_1-T_2)L}{h}$

6.10-3 $v_{max}=\frac{\alpha T_0 L^3}{9\sqrt{3}h}$

7.2-2 $\delta_{max}=0.00542\frac{qL^4}{EI}$ 在 $x=0.5785L$ 处。

7.2-5 $v=\frac{qx^2(L-x)^2}{24EI}$

7.2-6 $R_a=-R_b=\frac{3M_0}{2L}$ $M_a=\frac{M_0}{2}$ $v=\frac{M_0x^2(L-x)}{4LEI}$

7.2-7 $v=\frac{q_0x^2}{120LEI}(4L^3-8L^2x+5Lx^2-x^3)$ $R_a=\frac{2q_0L}{5}$

$R_b=\frac{q_0L}{10}$ $M_a=\frac{q_0L^2}{15}$

7.2-8 $R_a=R_b=\frac{q_0L}{4}$ $M_a=M_b=\frac{5q_0L^2}{96}$

$v=\frac{q_0x^2}{960LEI}(25L^3-40L^2x+16x^3)$ $0\leqslant x\leqslant\frac{L}{2}$

7.2-9 $v=\frac{q_0x^2}{120LEI}(3L^3-7L^2x+5Lx^2-x^3)$ $R_a=\frac{7q_0L}{20}$

$R_b=\frac{3q_0L}{20}$ $M_a=\frac{q_0L^2}{20}$ $M_b=\frac{q_0L^2}{30}$

7.3-3 $R_a=\frac{9q_0L}{40}$ $R_b=\frac{11q_0L}{40}$ $M_a=\frac{7q_0L^2}{120}$

7.3-4 $R_a=\frac{P}{16L}(11L-24a)$ $R_b=\frac{3P}{16L}(7L+8a)$

$M_a=\frac{P}{16}(3L-8a)$

7.3-5 $R_a=\frac{qL}{8}$ $R_b=\frac{33qL}{16}$ $R_c=\frac{13qL}{16}$

7.3-6 $T=\frac{3qAL^4}{8AL^3+24hI}$

181302

7.3-7 $F=\dfrac{5PI_2}{2(I_1+I_2)}$

7.3-8 $R_a=\dfrac{31qL}{48}$ $R_b=\dfrac{17qL}{48}$ $M_a=\dfrac{7qL^2}{48}$

7.3-9 $R_a=R_d=\dfrac{2qL}{5}$ $R_b=R_c=\dfrac{11qL}{10}$

7.3-11 $R_a=\dfrac{13qL}{30}$ $R_b=\dfrac{13qL}{20}$ $R_c=-\dfrac{qL}{10}$ $R_d=\dfrac{qL}{60}$

7.3-12 $\Delta=\dfrac{7qL^4}{72EI}$

7.3-13 $H_a=qL$ $V_b=-V_a=\dfrac{qL}{2}$ $M_a=\dfrac{3qL^2}{8}$

7.3-14 $M_a=\dfrac{4EI\theta}{L}$ $M_b=\dfrac{2EI\theta}{L}$ $R_a=-R_b=\dfrac{6EI\theta}{L^2}$

7.3-15 $M_a=M_b=\dfrac{6EI\Delta}{L^2}$ $R_a=-R_b=\dfrac{12EI\Delta}{L^3}$

7.4-4 $R_a=\dfrac{4P}{3}$ $R_b=\dfrac{2P}{3}$ $M_a=\dfrac{PL}{3}$

7.4-6 $\delta=\dfrac{qL^4}{384EI}$

7.4-7 $R_a=R_b=P$ $M_a=M_b=\dfrac{Pa(L-a)}{L}$

7.4-8 $M_a=M_b=\dfrac{5PL}{48}$

7.5-1 $R_b=0.386\,qL$

7.5-2 $M_a=0.0540\,q_0L^2$

7.5-3 $M_a=M_b=\dfrac{PL}{8}$

7.5-4 $R_b=1.99\,qL$

7.6-3 $M=-\dfrac{qL^2}{8}+\dfrac{3EI\Delta}{L^2}$

7.6-4 $M_2=M_3=-\dfrac{3PL}{20}$ $R_1=R_4=\dfrac{7P}{20}$ $R_2=R_3=\dfrac{23P}{20}$

7.6-5 $M_2=-\dfrac{qL^2}{15}$ $M_3=\dfrac{qL^2}{60}$

7.6-6 $M_2 = M_4 = -\frac{3qL^2}{28}$ $M_3 = -\frac{qL^2}{14}$ $R_1 = R_5 = \frac{11qL}{28}$

$R_2 = R_4 = \frac{8qL}{7}$ $R_3 = \frac{13qL}{14}$

7.6-7 $M_1 = -10$ 呎-千磅 $M_2 = -16.72$ 呎-千磅 $M_3 = -26.47$ 呎-千磅

7.6-8 $M_1 = 3M_2 = -\frac{3qL^2}{28}$

7.6-9 $M_2 = M_7 = -\frac{qL^2}{284}$ $M_3 = M_6 = \frac{qL^2}{71}$ $M_4 = M_5 = -\frac{15qL^2}{284}$

7.6-10 $M_1 = -185.0$ 呎-千磅 $M_2 = -130.0$ 呎-千磅 $M_3 = 80.2$ 呎-千磅

7.7-1 $M_0 = R_a L = -R_b L = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{2h}$

7.7-2 $R_b = -2R_a = -2R_c = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{hL}$

7.7-3 $S = \frac{48EIAH\alpha T}{AL^3 + 48IH}$

7.8-1 $\lambda = \frac{17q^2L^7}{40,320E^2I^2}$

7.8-2 $H = \frac{\pi^2EA\delta^2}{4L^2}$

8.1-2 $\beta = 75°58'$ $\sigma_{max} = 1414$ 磅/吋^2

8.1-3 半轴等于$\frac{PL^3}{3EI_x}$和$\frac{PL^3}{3EI_y}$的椭圆。

8.1-4 $\sigma_{max} = 1000$ 磅/吋^2

8.1-5 $\sigma_{max} = 796$ 磅/吋^2

8.1-6 $\sigma_{max} = 16,400$ 磅/吋^2 $\delta = 0.583$ 吋

8.1-7 $\sigma_{max} = 642$ 磅/吋^2 $\delta_{vert} = 0.126$ 吋

8.1-8 $\sigma_{max} = 1016$ 磅/吋^2 $\delta_{vert} = 0.483$ 吋 $\delta_{horiz} = 0.246$ 吋

8.2-1 $M_z = \frac{\pi r^3 \sigma_{许}}{8}$

8.2-2 $\sigma_t = 15,600$ 磅/吋^2 $\sigma_c = -7600$ 磅/吋^2

8.2-3 $\sigma_a = -\sigma_b = \frac{24M_z}{bh^2}$ $\sigma_d = 0$ 线 CL 为中性轴。

8.2-4　$\sigma_{max}=9730$ 磅/吋²

8.2-5　$\sigma_e=21,200$ 磅/吋²

8.2-6　$M_{max}=52,600$ 吋-磅

8.2-7　$\sigma_{max}=4870$ 磅/吋²，在 B 点处。

8.4-1　(a)$\tau_{max}=172$ 磅/吋²(向上)　(b)$\tau_b=16$ 磅/吋²(向左)

8.4-3　$\tau_{max}=\dfrac{3P}{4bt_f}$

8.4-4　$\tau_{max}=\dfrac{3b_1^2P}{2(t_1b_1^3+t_2b_2^3)}$

8.4-5　$\tau_{max}=\dfrac{3P}{2t_1b_1}$

8.5-1　$\tau_1=1610$ 磅/吋²　　$\tau_2=2860$ 磅/吋²　　$\tau_{max}=4550$ 磅/吋²

$e=1.01$ 吋

8.5-3　$e=\dfrac{2r(\sin\beta-\beta\cos\beta)}{\beta-\sin\beta\cos\beta}$

8.5-4　$e=\dfrac{3(b_2^2-b_1^2)}{h+6(b_1+b_2)}$

8.5-5　$e=\dfrac{4r^2+2b^2+2\pi br}{4b+\pi r}$

8.5-6　$e=\dfrac{3b^2(h_1^2+h_1^2)}{h_2^3+6b(h_1^2+h_2^2)}$

8.5-7　$e=\dfrac{b(2h+3b)}{2h+6b}$

8.5-8　$e=\dfrac{b(2h+3b)}{8h+6b}$

8.5-9　$e=\dfrac{b(3bh^2+6ah^2-8a^3)}{h^3+6bh^2+6ah^2+8a^3-12a^2h}$

8.5-10　$e=\dfrac{b(3bh^2+6ah^2-8a^3)}{h^3+6bh^2+6ah^2+8a^3+12a^2h}$

8.5-11　$\sigma_t=7740$ 磅/吋²　$\sigma_c=-9950$ 磅/吋²

9.3-1　$M_p=6956$ 吋-千磅

9.3-2　$h_1=3$吋　$M_p=2664$ 吋-千磅

9.3-3　$Z=44$ 吋³

9.3-4　$M_p=1089$ 吋-千磅

9.3-5 $f=\frac{16}{3\pi}\approx1.70$

9.3-6 $f=2$

9.3-7 (a) $f=\frac{16\,r_1}{3\pi}\;\frac{r_1^3-r_2^3}{r_1^4-r_2^4}$ (b) $f=\frac{4}{\pi}\approx1.27$

9.3-8 $f=1.12$

9.3-9 $e=h\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{M}{2M_y}}$

9.3-10 (a) $M=2025$ 吋-千磅 (b) $k=1.83\times10^{-4}$/吋

9.3-11 $\frac{M}{M_y}=2-2\left(\frac{k_y}{k}\right)^2+\left(\frac{k_y}{k}\right)^3$

9.4-1 $L_p=L\sqrt{1-1/f}$

9.5-1 (a) $P_u=\frac{M_p}{L}$ (b) $P_u=\frac{3M_p}{L}$

9.5-2 $q_u=750$ 磅/吋

9.5-3 (a) $\frac{d_1}{d_2}=\left(1-\frac{b}{L}\right)^{1/3}$ (b) $b=0.54\,L$

9.5-4 (a) $P_u=\frac{M_p(2L-b)}{b(L-b)}$ (b) $b=0.59\,L$

9.5-5 (a) $P_u=\frac{8M_p}{L}$ (b) $\frac{P_u}{P_y}=\frac{M_p}{M_y}$

9.5-6 (a) $q_u=\frac{16M_p}{L^2}$ (b) $\frac{q_u}{q_y}=\frac{4M_p}{3M_y}$

9.5-7 $P_u=\frac{4M_p}{L}$

9.5-8 (a)当 $\beta\geqslant\frac{1}{4}$，$P_u=\frac{2M_p}{\beta L}$；当 $\beta\leqslant\frac{1}{4}$，$P_u=\frac{6M_p}{(1-\beta)L}$

(b) $\beta=\frac{1}{4}$

9.5-9 $P_u=\frac{9M_p}{2L}$

9.5-10 (a)$q_u=\frac{16\,M_p}{L^2}$ (b)$q_u=\frac{11.66\,M_p}{L^2}$

9.5-11 $P_u=\frac{16\,M_p}{3\,L}$

9.5-12 $P_u=\frac{4\,M_p}{R}$

9.7-1 $M=26,200$ 吋-磅

9.7-2 (a)$h_1=8$ 吋；$h_2=4$ 吋 (b)$\sigma_1=800$ 磅/吋² $\sigma_2=-1600$ 磅/吋² (c)$\rho=10,000$ 吋

9.7-3 $M_{max}=176$ 呎-千磅

9.7-4 $M=\frac{bh^2}{6}(B_1\epsilon_1)\left(1-\frac{3\,B_2\epsilon_1}{4\,B_1}\right)$

9.7-6 $M=\frac{\sigma_1 bh^2}{6}\ \frac{3\,m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}$

9.7-7 $\theta=\frac{50\,P^2L^3}{3\,B^2b^2h^5}$ $\delta=\frac{25\,P^2L^4}{2\,B^2b^2h^5}$

9.8-1 (b)$\sigma_y/2$ (c)$-\sigma_y$ (d)M_p;1.5

9.8-2 (a)$M=M_y(1+\beta)$ (b)$0\leqslant\beta\leqslant\frac{M_p}{M_y}-1$

10.1-2 $\delta=e(\sec kL-1)$ $M_{max}=Pe\sec kL$

10.1-3 $\sigma_t=13,400$ 磅/吋²

10.1-4 $\sigma_c=11,600$ 磅/吋²

10.1-5 $\delta=0.122$ 吋 $\sigma_t=2360$ 磅/吋² $\sigma_c=2380$ 磅/吋²

10.1-6 $P_y=190$ 千磅

10.1-7 $P_y=3650$ 磅

10.2-3 $\frac{P_0}{P_e}=\frac{3}{\pi}=0.955$

10.2-4 $P_{cr}=467$ 千磅

10.2-5 $P_{cr}=104$ 千磅

10.2-6 $P_{cr}=471$ 千磅

10.2-7 $\Delta T=\pi^2 I/\alpha A L^2$

10.2-8 W 14×84

10.2-9 L 5×5×$\frac{1}{2}$

10.2-10 $t=0.120$吋

10.2-11 $Q=3\pi^2 EI/4H^2$

10.2-12 $P_{cr}=36.1\ EI/L^2$

10.2-13 $\theta=\arctan\ \cot^2\beta$

10.3-1 $L=28.7$ 吋

10.2-2 $\sigma_{cr}=6850$ 磅/吋²

10.3-3 $L=49.7$ 吋

10.3-4 $\sigma_{cr}=20{,}600$ 磅/吋²

10.3-5 9520 磅/吋²，5350 磅/吋²，3430 磅/吋²

10.3-6 $\sigma_{cr}=22{,}040$ 磅/吋²　$P=275$ 千磅

10.3-7 $L=267$ 吋

10.4-1 用 L 代替方程(10-12)中的 $L/2$。

10.4-2 $\sigma_{max}=18{,}600$ 磅/吋²　$n=2.03$

10.4-3 $P=9100$ 磅

10.4-4 $P=119$ 千磅

10.4-5 $P=27{,}800$ 磅

10.4-6 $P_2=60{,}400$ 磅

10.5-2 用 $a\sqrt{3}/L$ 代替方程(10-17)中的 a/L。

10.5-3 $\sigma_{max}=21{,}000$ 磅/吋²　$n=1.62$

10.5-4 $P=29{,}300$ 磅

10.5-5 $P=16{,}800$ 磅

10.6-1 $P=446$ 千磅

10.6-2 $P=230$ 千磅 136千磅，61千磅

10.6-3 $L=13.9$ 呎

11.3-1 $\delta_V=\frac{2PL}{EA}$向下　$\delta_H=0$　$\theta_{ab}=\frac{\sqrt{3}P}{EA}$顺时针方向

11.3-2　$\delta_V=\alpha L(\Delta T)$ 向上　$\delta_H=\dfrac{\alpha L(\Delta T)}{\sqrt{3}}$向右

$\theta_{ab}=\dfrac{\alpha(\Delta T)}{\sqrt{3}}$顺时针方向

11.3-3　$\delta_V=0.00784$ 吋，向下　$\delta_H=0.00448$ 吋，向右

11.3-4　0.3 吋

11.3-5　$\delta_V=6.22\dfrac{Pb}{EA}$向下

11.3-6　$1.85\dfrac{Pb}{EA}$

11.3-7　$\delta_V=0.0862$ 吋，向下　$\delta_H=0.0275$ 吋，向右

$\theta_{bc}=36.2\times10^{-6}$ 弧度，反时针方向

11.3-8　0.00139 吋

11.3-11　$\delta=\dfrac{2PL^3}{9EI}$　$\theta=\dfrac{5PL^2}{18EI}$

11.3-12　$\delta_c=\dfrac{Pb^2(L+b)}{3EI}$　$\theta_c=\dfrac{Pb(2L+3b)}{6EI}$

11.3-13　$\delta=\dfrac{PbL^2}{16EI}$　$\theta=\dfrac{PbL}{6EI}$

11.3-14　$\theta=\dfrac{\alpha(T_2-T_1)(L+2b)}{2h}$反时针方向

11.3-18　$\delta=\dfrac{2PL^3}{3EI}$

11.3-19　$\delta_H=\dfrac{PHL^2}{8EI_2}$向左　$\theta=\dfrac{PL^2}{16EI_2}$顺时针方向

11.3-20　$\delta_H=\dfrac{2QH^3}{3EI_1}+\dfrac{QLH^2}{EI_2}$　$\theta=\dfrac{QH^2}{2EI_1}+\dfrac{QHL}{2EI_2}$

11.3-21　$\theta=\dfrac{33Pb^2}{2EI}$

11.3-22　$\Delta=\dfrac{2PL^3\sin^2\beta}{3EI}+\dfrac{2PL\cos^2\beta}{EA}$

11.3-23　$\delta_H=\dfrac{\alpha H^2(T_2-T_1)}{2h}$向左　$\delta_V=\dfrac{\alpha L(L+2H)(T_2-T_1)}{2h}$ 向上

$$\theta=\frac{\alpha(H+L)(T_2-T_1)}{h}\text{反时针方向}$$

11.3-24 $\delta=\dfrac{PL^3(n)(4n^2+3n+1)}{6EI}$

11.3-25 $\delta_V=\dfrac{\pi PR^3}{4EI}\qquad\theta=\dfrac{PR^2}{EI}$

11.3-26 $\delta_V=\dfrac{3\pi PR^3}{2EI}$

11.3-27 $\Delta=\dfrac{P}{6EI}(4L^3+6\pi L^2R+24LR^2+3\pi R^3)$

11.3-28 $M_{max}=\dfrac{2EIe}{3\pi R^2}$

11.3-29 $\delta_V=\dfrac{\pi PR^3}{4EI}+\dfrac{(3\pi-8)PR^3}{4GJ}$

11.3-30 $\phi=\dfrac{\pi PR^2}{4EI}+\dfrac{(\pi-4)PR^2}{4GJ}$

11.3-31 $\delta=1.85$ 吋　$\phi=0.00876$ 弧度

11.3-32 $\Delta=\dfrac{5PL^3}{6EI}+\dfrac{3PL^3}{2GJ}$

11.6-1 $X_1=\dfrac{3PL}{28}\qquad X_2=\dfrac{17P}{14}$

11.6-2 $X_1=-\dfrac{5qL^2}{608}\qquad X_2=-\dfrac{33qL^2}{152}$

11.6-3 $X_2=2X_1=-\dfrac{qL^2}{12}$

11.6-4 $N_1=N_2=N_3=0.396P\quad N_4=-0.604P\quad N_5=0.854P$

$N_6=-0.561P$

11.6-5 $N_{ab}=-19.10$ 千磅

11.6-6 $X_1=-0.521P\quad X_2=-0.376P$

11.6-7 $X_1=457$ 磅　$X_2=84$ 磅

11.6-8 $R_c=\dfrac{3qL}{8}\cdot\dfrac{L+4H}{L+3H}$

11.6-9 $R_1=R_4=\dfrac{Pb(L-b)}{2HL}\cdot\dfrac{3LI_2}{3LI_2+2HI_1}\qquad R_2=\dfrac{P(L-b)}{L}$

$R_B=\frac{Pb}{L}$

11.6-10 $H_a=\frac{P}{8}$ $V_a=\frac{P}{2}$ $M_a=-\frac{PL}{24}$

11.6-11 $H_d=-\frac{P}{2}$ $V_d=\frac{3P}{14}$ $M_d=\frac{PL}{7}$

11.6-12 $M_a=\frac{PR}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$ $M_b=\frac{PR}{\pi}$

11.6-13 $H_d=-6.24$ 千磅 $V_d=5.06$ 千磅 $M_d=49.7$ 呎-千磅

11.7-1 $D=\frac{PL^3}{12EI}$ $M_b=\frac{5PL}{18}$

11.7-2 $D_1=\frac{3PL^3}{16EI}$ $D_2=-\frac{3PL^2}{32EI}$ $R_a=\frac{13P}{8}$ $M_a=\frac{PL}{2}$

11.7-3 $D_1=-\frac{PL^2}{36EI}$ $D_2=-\frac{5PL^3}{36EI}$ $M_a=\frac{5PL}{72}$ $M_c=-\frac{7PL}{72}$

11.7-4 $D=\frac{PL^2H}{32EI(L+H)}$ $R_1=-\frac{3PL^2}{16H(L+H)}$ $R_2=\frac{P(8L+11H)}{16(L+H)}$

$M_1=\frac{PL(2L+3H)}{16(L+H)}$

11.7-5 $R_a=\frac{37P}{60}$ $R_b=\frac{49P}{120}$ $R_c=\frac{23P}{60}$ $M_a=\frac{59PL}{360}$

11.7-6 $R_a=\frac{39P}{64}$ $R_f=\frac{1049P}{576}$ $R_c=\frac{427P}{576}$ $M_a=\frac{31PL}{192}$

11.7-7 $H_a=\frac{27P}{448}$ $V_a=\frac{31P}{56}$ $M_a=\frac{PL}{7}$ $H_d=-\frac{27P}{224}$

$V_d=\frac{3P}{2}$ $M_d=\frac{3PL}{112}$

11.7-8 $R_1=\frac{45qL}{28}$ $R_2=-\frac{3qL}{7}$

11.9-1 (a) $U=\frac{EA\delta^2}{2L}(1+2\cos^3\beta)$ (b) $\delta=\frac{PL}{EA}\frac{1}{1+2\cos^3\beta}$

(c) $N_{ad}=N_{cd}=\frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}$ $N_{bd}=\frac{P}{1+2\cos^3\beta}$

11.11-1 (a) $\delta=\frac{PL^3}{64EI}$ (b) $\delta=\frac{PL^3}{18EI}$

11.11-2 (a) $\delta=\dfrac{4qL^4}{\pi^5 EI}$ (b) $\delta=\dfrac{968qL^4}{243\pi^5 EI}$

11.11-3 $\delta=\dfrac{PL^3}{2\pi^4 EI}$

11.11-4 (a) $\delta=\dfrac{PL^3}{96EI}$ (b) $\delta=\dfrac{PL^3}{90EI}$

11.11-6 (a) $P_{cr}=\dfrac{12EI}{L^2}$ (b) $P_{cr}=\dfrac{168EI}{17L^2}$

11.11-7 $P_{cr}=1.82\dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$

11.12-3 $\delta=\dfrac{L}{B\sin\beta}\left(\dfrac{P}{2A\sin\beta}\right)^n$

11.12-5 $\delta=\dfrac{\gamma^n L^{n+1}}{B(n+1)}$

A.2-1 $\bar{y}=1.1$ 吋

A.2-2 $c^2=ab/2$

A.2-3 $\bar{x}=\bar{y}=5a/12$

A.2-4 $\bar{x}=1.99$ 吋 $\bar{y}=0.99$ 吋

A.3-2 $I=\dfrac{bh^3}{4}$

A.3-3 $I=\dfrac{a^4}{12}$

A.3-5 $I=\dfrac{a^3b^3}{6(a^2+b^2)}$

A.3-6 $r_x=\dfrac{h}{2\sqrt{3}}$ $r_y=\dfrac{b}{2\sqrt{3}}$

A.4-2 $J=\dfrac{bh}{48}(b^2+12h^2)$

A.5-2 $J=\dfrac{\pi ab}{4}(b^2+2a^2)$

A.5-3 $I=(4h^4-3h^2h_1^2-h_1^4)/12$

A.5-4 $I=2225$ 吋^4

A.5-5 $I=16.5$ 吋^4

A.6-1 $I_{xy}=r^4/8$

A.6-2 $I_{xy}=r^4/8$

A.6-3 $b=2r$

A.6-4 $I_{xy}=7.75$ 吋^4

A.6-5 $I_{12}=-20.4$ 吋^4

A.7-1 $I_{x_1}=I_{y_1}=\frac{b^4}{12}$ $\quad I_{x_1y_1}=0$

A.7-2 $I_{x_1}=\frac{a^3b^3}{6(a^2+b^2)}$ $\qquad I_{y_1}=\frac{ab(a^4+b^4)}{12(a^2+b^2)}$

$$I_{x_1y_1}=\frac{a^2b^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)}$$

A.8-1 $\theta_p=60°08', I_2=88.9$ 吋^4 $\quad \theta_p=150°08', I_1=311.1$ 吋^4

A.8-2 $\theta_p=13°31', I_2=19.9$ 吋^4 $\quad \theta_p=103°31', I_1=76.1$ 吋^4

A.8-3 $\theta_p=67°30', I_1=34.89$ 吋^4 $\quad \theta_p=157°30', I_2=6.61$ 吋^4

A.8-4 $\theta_p=75°38', I_1=9.35$ 吋^4 $\quad \theta_p=165°38', I_2=1.00$ 吋^4

A.8-5 $\theta_p=22°09', I_1=282.6$ 吋^4 $\quad \theta_p=112°09', I_2=24.9$ 吋^4

A.8-6 $\theta_p=31°37', I_1=25.4$ 吋^4 $\quad \theta_p=121°37', I_2=2.9$ 吋^4

英制-公制单位换算

一、长度

1 吋（英寸）(inch)＝2.54 厘米

1 呎（英尺）(foot)＝12 吋＝30.48 厘米

1 码(yard)＝3 呎＝36 吋＝91.44 厘米＝0.9144 米

1 哩（英里）(mile)＝1760 码＝5280 呎＝1609 米＝1.609 公里

二、面积

1 吋^2＝6.45 厘米^2

1 呎^2＝144 吋^2＝929 厘米^2＝0.0929 米^2

三、体积

1 吋^3＝16.39 厘米^3

1 呎^3＝1728 吋^3＝0.02832 米^3

四、重力加速度

g＝32.2 呎/秒^2＝981 厘米/秒^2

五、质量、重量

1 盎斯(ounce)＝28.35 克

1 磅(pound)＝16 盎斯＝453.6 克＝0.4536 公斤

1 英吨（长吨）(long ton)＝2240 磅＝1016 公斤＝1.016 公吨

1 美吨（短吨）(short ton)＝2000 磅＝907.2 公斤＝0.9072 公吨

六、力

1 磅重之力＝1 磅×32.2 呎/秒^2

＝453.6 克重之力＝453.6 克×981 厘米/秒^2

＝4.45×10^{5}达因＝4.45 牛顿

七、功与功率

1 呎-磅＝0.1383 公斤-米

1 马力（英）＝550 呎-磅/秒＝1.014 马力（公）＝0.7455 千瓦

八、温度

$1^{\circ}F$（华氏）$=\frac{5}{9}{}^{\circ}C$（摄氏）

九、单位长度荷载

1 磅/吋 = 12 磅/呎 = 0.1786 公斤/厘米

1 磅/呎 = 1.488 公斤/米

十、应力

1 磅/吋^2 = 0.0703 公斤/厘米^2

十一、单位体积重量

1 磅/吋^3 = 0.0277 公斤/厘米^3

十二、力矩

1 吋-磅 = 1.152 公斤-厘米

1 呎-磅 = 12 吋-磅 = 0.1383 公斤-米